1 DURATION OK

1) Momenti (definizioni) e loro relazioni

Dato un tasso t e n somme future a_i, $a_i \geq 0$, $a_n > 0$ ognuna prevista al tempo i, il loro valore attuale (al tempo 0) risulta

$$W = \sum_{i=1,n} a_i (1+t)^{-i}$$

Si possono definire anche le due quantita' (momenti)

$$MW1 = \sum_{i=1,n} i\, a_i (1+t)^{-i}$$

$$MW2 = \sum_{i=1,n} i^2 a_i (1+t)^{-i}$$

Siano y e z i vettori di componenti
$y_i = [a_i (1+t)^{-i}]^{1/2}$, $z_i = i\, [a_i (1+t)^{-i}]^{1/2}$ allora

$$W = y^t y = ||y||^2 \text{ , } MW2 = z^t z = ||z||^2 \text{ , } MW1 = y^t z \leq ||y||\, ||z||$$

e di conseguenza

$$(MW1)^2 \leq W\, MW2$$

2)) Duration, significato, dipendenza dal tasso

Il valore

$$D = \left(\sum_i i\, a_i (1+t)^{-i}\right) / \left(\sum_i a_i (1+t)^{-i}\right)$$

e' chiamato DURATION, chiaramente D = MW1 / W.

a) Significato 1 (TEMPO)
La duration corrisponde a prendere tutti i vari tempi (= i) ognuno con peso

$$a_i (1+t)^{-i} / \left(\sum_i a_i (1+t)^{-i}\right)$$

[peso = VA(somma prevista al tempo i) / VA(flusso complessivo)]
La somma dei pesi e' 1, risulta una media pesata dei vari tempi (durata finanziaria media) $1 \leq D \leq n$

b) Significato 2 (SENSIBILITA' VALORE ATTUALE)
Dato un generico flusso si osserva che al tasso t per il valore attuale si ha

$$W = \sum_{i=1,n} a_i (1+t)^{-i}$$

La derivata rispetto al tasso risulta

$$W^{(1)} = \sum_{i=1,n} (-i)\, a_i (1+t)^{-i-1}$$

$$= -(1+t)^{-1} \sum_{i=1,n} i\, a_i (1+t)^{-i}$$

$$= -(1+t)^{-1}\, MW1$$

e quindi

$$(1+t)\, W^{(1)} = -MW1$$

2 DURATION OK

In caso di variazione del tasso (da t a t+δ)
si avra'

$$W(t+\delta) \approx W(t) + \delta W^{(1)} = W(t) + \delta (-MW1) (1+t)^{-1}$$

$$= W(t) (1 - \delta (1+t)^{-1} (MW1/W)) = W(t) (1- \delta (1+t)^{-1} D)$$

D indica, a parte il fattore $(1+t)^{-1}$, la sensibilita' (%) del valore attuale alle variazioni di tasso.
Un aumento/diminuzione del tasso di 1% corrisponde a diminuzione/aumento del valore attuale di (circa) D% .
Il valore $(1+t)^{-1}$ MW1 e' detto Duration modificata.

<u>c) Duration come funzione del tasso</u>

Anche la duration varia al variare del tasso.
Si puo' derivare MW1 (funzione di t) rispetto al tasso e

$$MW1^{(1)} = \sum_{i=1,n} -i^2 a_i (1+t)^{-i-1} = - (1+t)^{-1} MW2$$

La duration (MW1/W) ha come derivata

$$D^{(1)} = (W)^{-2} (MW1^{(1)} W - MW1 W^{(1)})$$

che sostituendo diventa

$$(W)^{-2} (- (1+t)^{-1} MW2 W + MW1(1+t)^{-1}MW1)$$

$$= (1+t)^{-1} (W)^{-2} (MW1^{2} - MW2W)$$

Poiche'$(MW1)^{2} \leq W\, MW2$ la Duration e' sempre non crescente rispetto al tasso
Il massimo valore possibile della duration (t=0) e' $(\sum_i i\, a_i) /(\sum_i a_i)$

3 DURATION OK

3) Calcolo Duration (esempi)

a) ZC
Nel caso dello zero coupon si ha solo un pagamento (il rimborso)
e quindi duration = tempo di rimborso

b) RENDITA
Per una rendita di n termini si osserva (se $0<x<1$)

$$(1-x)\ \sum_{i=1,n} i\, x^i = \sum_{i=1,n} i\,(x^i - x^{i+1})$$

$$= (x^1 - x^2) + 2\,(x^2 - x^3) + 3\,(x^3 - x^4) + \ldots.$$

e

$$(1-x) \sum_{i=1,n} i\, x^i = \sum_{i=1,n} x^i - n\, x^{n+1}$$

e

$$\sum_{i=1,n} i\, x^i = (1-x)^{-1}\ (\sum_{i=1,n} x^i - n\, x^{n+1})$$

Nel caso della rendita la duration risulta

$$D = ((\sum_i i\, R(1+t)^{-i}) / ((\sum_i R\,(1+t)^{-i})$$

e se $x = (1+t)^{-1}$
[$1-x = 1-(1+t)^{-1} = t/(1+t)$, $(1-x)^{-1} = (1+t)/t$]

$$D = (\sum_i i\, x^i) / (\sum_i x^i)$$

$$= ((1-x)^{-1} (\sum_{i=1,n} x^i - n\, x^{n+1})) / ((\sum_i x^i)$$

$$= (1-x)^{-1} (1- \ n x^{n+1} / (\sum_i x^i))$$

Si ha anche

$$\sum_{i=1,n} x^i = x\,(1- x^n)/(1-x)$$

$$(\sum_{i=1,n} x^i)^{-1} = (1-x)\, x^{-1}\ (1- x^n)^{-1}$$

$$(1-x)^{-1}\, x^{n+1} / (\sum_i x^i) = x^n\ (1- x^n)^{-1}$$

$$= 1/ (x^{-n} - 1) = ((1+t)^n - 1)^{-1}$$

La Duration della rendita vale

$$D = (1+t)/t - n\,((1+t)^n - 1)^{-1}$$

N.B. Al crescere di n, t fissato la duration tende a $(1+t)/t$
Se $t = 0$ la duration risulta

4 DURATION OK

$$(\Sigma_i\, i\, R(1+t)^{-i}) / (\Sigma_i\, R\, (1+t)^{-i}) = (1/n)\,(n(n+1)/2)$$
$$= (n+1)/2$$

c) PORTAFOGLIO GENERICO

Nel caso di piu' flussi (F^1, F^k) ognuno con la sua duration (D_1,..D_k) e il suo valore attuale (W_1,..W_k) il valore attuale complessivo e' $W = \Sigma_{j=1,k} W_j$

Ogni singolo flusso j e' composto da q pagamenti $(F^j)_i$ (tipo a_i)

Quindi

$$D_j = (\Sigma_{i=1,q}\, i\, (F^j)_i\, (1+t)^{-i}) / (\Sigma_{i=1,q}\, (F^j)_i\, (1+t)^{-i})$$
$$= (\Sigma_{i=1,q}\, i\, (F^j)_i\, (1+t)^{-i}) / W_j$$

Se $p_j = W_j / W$

$$p_j D_j = (\Sigma_{i=1,q}\, i\, (F^j)_i\, (1+t)^{-i}) / W$$

e

$$W p_j D_j = (\Sigma_{i=1,q}\, i\, (F^j)_i\, (1+t)^{-i})$$

La Duration del flusso e' data da

$$(W)^{-1} (\Sigma_{j=1,k} (\Sigma_{i=1,q}\, i\, (F^j)_i\, (1+t)^{-i})) =$$
$$= (W)^{-1} (\Sigma_{j=1,k} W p_j D_j)$$
$$= (\Sigma_{j=1,k} p_j D_j) = (\Sigma_{j=1,k} (W_j/W) D_j))$$

Ogni flusso j (con proprio valore attuale e duration) e da' un contributo $p_j D_j$, (con $p_j = W_j/W$) alla duration complessiva.

La duration del portafoglio si ottiene calcolando

i) valore attuale W_j e duration D_j di ogni flusso

ii) il valore attuale $W = \Sigma_{j=1,k} W_j$, i pesi $p_j = W_j/W$

iii) l'espressione $\Sigma_j p_j D_j$

d) BOND

Il bond e' un portafoglio dato dalla somma di una rendita di n anni (Cedola) e di un capitale C da rimborsare a scadenza (n anni) . Si suppone che la cedola sia j C

La rendita (cedole) ha valore attuale

$$W_R = (j / t)\, (1-(1+t)^{-n})\, C$$

e duration

$$D_R = (1+t) / t - n\, ((1+t)^n-1)^{-1}$$

5 DURATION OK

Lo zero coupon del rimborso capitale ha valore attuale

$$W_Z = (1+t)^{-n} \; C$$

e duration

$$D_Z = n$$

La duration del bond e'

$$p_R \, D_R + p_Z \, D_Z$$

con pesi

$$p_R = W_R / W , \quad p_Z = W_Z / W$$

e $W = W_R + W_Z$

La duration risulta

$$(1+t) / t \; - \; (1+t - nt + nj) \; / \; (j ((1+t)^n -1) \; +t)$$

<u>Dettagli del calcolo</u> (Si suppone C=1)

Si indica con F il valore

$$F = (j ((1+t)^n -1) \; + t)$$

da cui

$$j (1+t)^n - j = F - t$$

$$(1+t)^n - 1 = (F - t) / j$$

[N.B. Se $j = t \Rightarrow F = t (1+t)^n$]

Le formule diventano

$$W_R = (j / t) (1-(1+t)^{-n}) = (j) ((1+t)^n -1) \; / \; (t (1+t)^n)$$

$$= (F-t) / (t (1+t)^n)$$

$$D_R = (1+t) / t - n ((1+t)^n-1)^{-1} = (1+t) / t - n j / (F-t)$$

$$W_Z = 1/(1+t)^n = t / (t (1+t)^n)$$

$$D_Z = n$$

Il valore attuale del bond e'

$$W = W_R + W_Z = (F-t) / (t (1+t)^n) + t / (t (1+t)^n) = F / (t (1+t)^n)$$

I pesi p_R, p_Z sono

$$p_R = W_R / W = (F-t) / (t (1+t)^n) \; (F/(t (1+t)^n)^{-1} = (F-t) / F$$

6 DURATION OK

$$p_Z = W_Z / W = t / (t (1+t)^n) (F/(t (1+t)^n)^{-1} = t / F$$

La duration e’ quindi la somma dei due contributi

$$p_R D_R = (F-t) / F ((1+t) / t - nj /(F-t)) = (1+t) / t - (1+t) / F - nj / F$$

e

$$p_Z D_Z = nt / F$$

e vale

$$(1+t) / t - (1+t + n(j-t)) / F \qquad (\text{con } F = (j ((1+t)^n -1) + t))$$

Per $t > 0$ al crescere di n $(1+t)^n \rightarrow \infty$ e, $F \rightarrow \infty$ e la duration tende a $(1+t)/t$
(come avviene per la rendita)
Se $j=t$ si ha solo
$(1+t) / t - (1+t)/ t (1+t)^n = (1+t)/t (1- (1+t)^{-n})$

Se $t = 0$ la duration comunque risulta

$$(j (n(n+1)/2) + n) / (n j +1) =$$
$$n [1+ j (n+1)/2] / (n j +1) < n$$

7 DURATION OK

Duration (varie formula per tasso t fissato)

Duration	Formula	NOTA
Flusso generico (pagamenti A_i ai tempi 1…n)	MW1/W con MW1 = $\sum_{k=1,n} kA_k(1+t)^{-k}$ W = $\sum_{k=1,n}A_k(1+t)^{-k}$	Valore compreso tra 1 e n
Singolo paganento (ZC) tempo n	n	
Rendita (n pagamenti uguali tempi 1…n)	$(1+t)/t - n((1+t)^n-1)^{-1}$	Per n elevato prossimo a (1+t)/t Sempre < (n+1)/2
Portafoglio n flussi con Valori e Duration (W_i , D_i)	$(\sum_{k=1,n} W_k D_k) / (\sum_{k=1,n} W_k)$	Valore compreso tra min (D_i) e max (D_i)
Bond (n cedole, tasso fisso j % + Rimborso finale)	$(1+t) / t - (1+t - nt + nj) / (j ((1+t)^n - 1) +t)$ [= $(1+t)/t (1- (1+t)^{-n})$ (se j=t)]	Si ricava da Portafoglio ZC + rendita (consigliato calcolo diretto)

4) Immunizzazione , convexity

DURATION = TEMPO OTTIMO

Dato un flusso di somme future a_i, ognuna prevista al tempo i, $a_i \geq 0$, $a_n > 0$
fissato un tempo τ , noto un tasso t (sia di attualizzazione che di rendimento) ,
e' possibile calcolare

- se $i < \tau$ il reinvestimento delle somme a_i dal tempo i fino al tempo τ

$$\sum a_i (1+t)^{\tau-i} \quad (\text{se } i < \tau)$$

- se $i > \tau$ il valore attuale dei flussi futuri

$$\sum a_i (1+t)^{-i+\tau} \quad (\text{se } i > \tau)$$

e la somma complessiva

$$\sum_{i=1,n} a_i (1+t)^{-i+\tau} = (1+t)^\tau W(t) = W_\tau (t)$$

Il conto puo' essere eseguito con un altro tasso s e si avrebbe $W_\tau (s) = (1+s)^\tau W(s)$.
Fissato il flusso e il tempo τ , il valore $W_\tau (s)$ (previsto al tempo τ) e' una funzione di s.
Il valore al tempo τ , calcolato con il tasso t, e' immunizzato rispetto alle variazioni di tasso se $W_\tau (t') \geq W_\tau (t)$ se $t' \neq t$

8 DURATION OK

La condizione equivale a imporre che W_τ (s) abbia minimo in t
La funzione ha come derivata

$$[W_\tau]' = (1+s)^{\tau-1} (\tau W(s) + (1+s)W^{(1)}(s))$$

sostituendo $W^{(1)}(s) = - MW1(s) / (1+s)$

$$[W_\tau]' = (1+s)^{\tau-1} (\tau W(s) + (1+s) (-MW1(s))/ (1+s))$$

$$= (1+s)^{\tau-1} W(s) (\tau- D(s))$$

(con D(s) duration calcolata con il tasso s)

Il segno della derivata dipende da τ - D(s)

La Duration e' decrescente rispetto al tasso quindi la derivata prima e' crescente. La condizione τ = D(s) garantisce minimo in s
(derivata prima negativa(o non positiva) e poi positiva (o non negativa)) .

Noto il flusso e un tasso (corretto) di attualizzazione t, il valore previsto/calcolato per il tempo τ =D(t) e' immunizzato rispetto a variazioni di tasso.
(Si suppone pero' che il tasso vari uniformente per tutte le scadenze sia come tasso di attualizzazione che come tasso di rendimento)

Questo risultato spiega operazioni tipo acquisto di un bond e vendita al tempo duration
(e non alla scadenza).

IMMUNIZZAZIONE : CASO SINGOLA USCITA
Se e' necessario disporre di una somma al tempo τ (singolo pagamento ?) questa puo' essere garantita (immunizzata) da un flusso di duration = τ e di valore attuale uguale al valore attuale del pagamento.
Nel caso ad esempio di due flussi (titoli) di duration D1 e D2 e
valore attuale (quantità minima) (W1 e W2) per immunizzare un pagamento al tempo τ di valore attuale W si acquistano pesi x_1 e x_2 dei due titoli
In modo che

$$x_1 W1+ x_2 W2= W$$

I pesi p_1, p_2 sono

$$p_1 = (x_1 W1) /W$$

$$p_2 = (x_2 W2) / W$$

La Duration risulta

$$D1 (x_1 W1 /W) + D2 (x_2 W2/ W)$$

9 DURATION OK

x_1 e x_2 sono determinati dalla due equazioni

$$x_1\, W1 + x_2\, W2 \;=\; W \qquad [\Leftrightarrow \text{valore attuale} = W\,]$$
$$x_1\,(\,D1\, W1\,) + x_2\,(\,D2W2\,) \;=\; (\,\tau\, W\,) \qquad [\Leftrightarrow\ \text{duration} = \tau]$$

Si possono considerare come incognite le quantita' (x_1 W1) e (x_2 W2) , valori attuali dei due titoli.
Nel caso D1<τ< D2 le soluzione risulta semplicemente

$$x_1\, W1 \;=\; W\,(D2-\tau) / (D2-D1)$$
$$x_2\, W2 \;=\; W\,(\tau-D1) / (D2-D1)$$

Il pagamento del debito e' assicurato dal controvalore al tempo τ della vendita dei due titoli [e dall'investimento (a tasso corrente) fino al tempo τ delle cedole ricevute] .
Se sono previsti k pagamenti a tempi diversi si dovrebbero generare k flussi uno per pagamento di valore attuale W_k (= valore attuale del k-esimo pagamento) e di duration (D_k = tempo del k-esimo pagamento). Il flusso attivo complessivo ha valore attuale $\sum_{i=1,n} W_i$ e duration $(\sum_{i=1,k} W_i)^{-1} (\sum_{i=1,k} D_i\, W_i)$ coincidenti con valore attuale e duration dei pagamenti (flusso passivi). In questo modo ogni flusso va gestito separatamente.

10 DURATION OK

CONVEXITY

Il calcolo esplicito della derivata seconda $[W_\tau]''$ da'

$$[W_\tau]'' = (\tau)(\tau-1)(1+t)^{\tau-2} W + 2\tau (1+t)^{\tau-1} W^{(1)} + (1+t)^{\tau} W^{(2)}$$

$$[W_\tau]'' = (1+t)^{\tau-2} \left((\tau^2-\tau) W + 2\tau (1+t) W^{(1)} + (1+t)^2 W^{(2)} \right)$$

Per $W^{(2)}$

$$W^{(2)} = \sum_{i=1,n} (-i)(-i-1) a_i (1+t)^{-i-2} = (1+t)^{-2} \sum_{i=1,n} (i^2+i) a_i (1+t)^{-i}$$

da cui

$$W^{(2)} = (1+t)^{-2} (MW2+MW1)$$

e

$$(1+t)^2 W^{(2)} = (MW2+MW1)$$

Il valore che determina il segno di $[W_\tau]''$ e'

$$[(\tau^2-\tau) W + 2\tau (1+t) W^{(1)} + (1+t)^2 W^{(2)}]$$
$$=$$
$$[(\tau^2-\tau) W + 2\tau (-MW1) + (MW2+MW1)]$$
$$=$$
$$(W) (\tau^2 - 2\tau (MW1/W) + (MW2/W) + (MW1/W) - \tau)$$

Per qualsiasi tasso D (duration) = $(MW1/W)$ e

$(MW1)^2 \leq W\, MW2$ cioe' $(D)^2 \leq MW2/W$ e cosi'

$$(\tau^2 - 2\tau (MW1/W) + (MW2/W) + (MW1/W) - \tau)$$
$$\geq (\tau^2 - 2\tau D + (D)^2 + D-\tau)$$
$$= (D-\tau)^2 + (D-\tau)$$

$[W_\tau]'' \geq 0$ se calcolato per un tasso t e un tempo τ per cui $D(t) = \tau$.

Il valore esatto della derivata seconda dipende da $W(MW2/W - (D)^2)$ o da $W(MW2/W - (\tau)^2)$.

MW2/W e' chiamato convexity del flusso.

11 DURATION OK

IMMUNIZZAZIONE : CASO PIU' USCITE

In presenza di un flusso a_i, $a_i \geq 0$, $a_n > 0$, fissato un tempo τ , noto un tasso t

la funzione W_τ (t) (valore attuale previsto al tempo τ)

ha come derivate [con C (convexity) = (MW2/W)]

$$[W_\tau]' = (1+t)^{\tau-1} W (\tau - D)$$

$$[W_\tau]'' = (1+t)^{\tau-2} (W) ((D-\tau)^2 + (D-\tau) + C - (D)^2)$$
$$= (1+t)^{\tau-2} (W) (\tau^2 - 2 \tau (D) + C + (D) -\tau)$$

In presenza di due flussi $a_i > 0$, $b_i > 0$ (che rappresentano a_i gli attivi e b_i i passivi) la copertura con a (normalmente a e' costituito da bond) dei passivi b (singoli pagamenti fissati) puo' essere garantita se e' possibile immunizzare la differenza dal rischio di tasso in modo da poter eventualmente vendere degli attivi oppure reinvestire delle somme per coprire i successivi passivi senza perdite

Dovrebbe valere ,almeno al tempo 0, oppure indipendentemente da τ

$$[W_{a\tau}]' - [W_{b\tau}]' = 0, \quad [W_{a\tau}]'' - [W_{b\tau}]'' \geq 0$$

Le condizioni sono

$$[W_{a\tau}]' - [W_{b\tau}]' = (1+t)^{\tau-1} W_a (\tau - D_a) - W_b (\tau - D_b) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$W_a (\tau - D_a) = W_b (\tau - D_b) \Leftrightarrow \tau (W_a - W_b) = (W_a D_a - W_b D_b)$$

e inoltre

$$[W_{a\,\tau}]'' - [W_{b\,\tau}]'' = (1+t)^{\tau-2}\, \Theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Theta \geq 0$$

[Θ indica il valore

$(W_a)(\tau^2 - 2\tau D_a + (C_a) + D_a - \tau) - (W_b) (\tau^2 - 2 \tau D_b + (C_b) + D_b - \tau)$]

Se la condizione fosse imposta solo per $\tau = 0$ basterebbe

$$W_a D_a = W_b D_b = 0$$

e

$$MW2_a \geq MW2_b \qquad (\Leftrightarrow \quad W_a C_a \geq W_b C_b)$$

Per garantirlo per un valore τ generico si impongono le condizioni (piu' restrittive)

$W_a = W_b$ (stesso valore attuale)

$D_a = D_b$ (stessa duration)

$C_a > C_b$ (convexity attivi > convexity passivi)

N.B. $C_a > C_b \Leftrightarrow MW2_a / W_a > MW2_a / W_a \Leftrightarrow MW2_a > MW2_b$ (da $W_a = W_b$)

5) **Determinazione tasso, metodo di Newton (rendita e bond)**

Il metodo di Newton per risolvere F(x)=0 prevede dato x una correzione h in modo che l'approssimazione di F(x+h) data da $F(x) + h\, F^1(x)$ sia 0 ovvero $h = - F(x) / F^1(x)$

Fissato un tasso t questo determina un valore attuale W(t) di un flusso
Se e' noto il valore corretto (prezzo ?) α di un flusso ma non il tasso t si deve risolvere l'equazione $W(t)= \alpha$.
La funzione da considerare e' $F(t) = W(t) - \alpha$.
Ovviamente

$$[F(t)]' = [W(t)]' = -(1+t)^{-1}\, MW1.$$

Da D = MW1/W segue MW1= DW e la correzione del tasso h e' data da

$$h = -F(t)/ [F(t)]' = - (W(t)- \alpha)\, (-(1+t)^{-1}\, DW)^{-1}$$

e piu' semplicemente

$$h = (1+t)\, (W(t)- \alpha)/ (W\, D)$$

Dato un tasso t (inesatto) il metodo di Newton prevede un tasso t^+ dato da $t^+ = t + h$.
Iterando la formula si converge alla soluzione.

Il metodo si presta (per esmpio) per calcolare velocemente il tasso nel caso della rendita o nel caso di un bond a tasso fisso.
In questi casi W e D sono facilmente calcolabili (formule esplicite o semplici da ricavare) Il metodo risulta molto piu' veloce di altre possibili tecniche del tipo $t^+ = F(t)$

Analogo conto e' possibile se si deve calcolare il TIR/IRR rispetto ad un unico pagamento ($a_0 < 0$) e a successive entrate $a_i > 0$

6) Tassi variabili ,definizioni (alternative), terminologia

TASSI VARIABILI

Nel caso di tassi diversi n somme future a_i, $a_i > 0$, ognuna prevista al tempo i, hanno valore attuale

$$W = \sum_{i=1,n} a_i\, (1+t_i)^{-i}$$

La duration si puo' definire come

$$D = (\sum_i i\, a_i (1+t_i)^{-i}) /(\sum_i a_i\, (1+t_i)^{-i})$$

[se $t \in [t0,t1]$, dovrebbe risultare D(t1)<D<D(t0)]

Nel caso di variazione δ di tutti i tassi il valore attuale

13 DURATION OK

diventa

$$W = \sum_{i=1,n} a_i (1+t_i+\delta)^{-i}$$

la cui derivata e'

$$W = \sum_{i=1,n} i\, a_i (1+t_i+\delta)^{-i-1}$$

che in 0 vale

$$\sum_{i=1,n} i\, a_i (1+t_i)^{-i-1}$$

[valore vicino ma non esattamente D/(1+t)]

Se si scrive $((1+t_i)) = \exp(s_i)$

[$\exp(s_i) \sim 1+ s_i$ piu' esattamente $s_i = \log(1+ t_i)$, $t_i = \exp(s_i)-1$]

$$W = \sum_{i=1,n} a_i (1+t_i)^{-i} = \sum_{i=1,n} a_i [\exp(s_i)]^{-i} = \sum_{i=1,n} a_i [\exp(-i\, s_i) \quad]$$

e si immagina una variazione δ dei tassi del tipo
$(s_i +\delta)$ stesso δ

$$W = \sum_{i=1,n} a_i [\exp(-i (s_i +\delta))$$

la derivata rispetto a δ vale

$$W' = \sum_{i=1,n} a_i(-i) [\exp(-i (s_i +\delta))]$$

e se $\delta = 0$

$$W' = \sum_{i=1,n} a_i(-i) [\exp(-i\, s_i)] = \sum_{i=1,n} i\, a_i (1+t_i)^{-i}$$

La duration oltre che una media dei tempi risulta ancora un parametro di sensibilita' rispetto a particolari variazioni di tutti i tassi (shock additivo)
In questi casi si possono generalizzare anche i vari risultati su convexity e immunizzazione.

QUESTIONI NOMINALISTICO-TERMINOLOGICHE

Ricapitolando esistono varie definizioni (possibili, alternative,complementari) di Duration

- nel caso di tasso interesse costante (= t per ogni scadenza)
  formula

$$D = MW1(t)/W(t)$$
$$= (\sum_i i\, a_i(1+t)^{-i}) /(\sum_i a_i (1+t)^{-i})$$

si parla di flat duration o Macaulay (o Macaulay-Hicks) -duration

14 DURATION OK

-la quantità $D/(1+t)$ si chiama <u>duration modificata</u>

Nel caso di tassi variabili (= t_i per ogni scadenza i , in generale $t_i \neq t_j$)
-la quantita'

$$(\sum_i i\, a_i(1+t_i)^{-i}) /(\sum_i a_i (1+t_i)^{-i})$$

si chiama <u>duration di Fischer-Weil</u>

- la quantità

$$(\sum_i i\, a_i(1+t_i)^{-i-1}) /(\sum_i a_i (1+t_i)^{-i})$$

si chiama <u>duration quasi modificata</u>

<u>FUNZIONI EXCEL</u>
Calcoli connessi alla Duration (e immunizzazione) richiedono uso di matrici vettori,sistemi lineari ecc...
Matrici in excel (Operazioni che generano matrici (array))
1) selezionare area
2) inserire funzione
3) tasto F2
4) Contr+Shift+Enter

Principali funzioni

MDETERM Determinante

MINVERSE inversa

TRANSPOSE trasposta

MMULT moltip;icazione A*B (matrici e vettori)

SUMPRODUCT prodotto scalare generalizzato ma non solo)

(norma x-y) SUMXMY2(array_x,array_y)
Array_x is the first array or range of values.
Array_y is the second array or range of values.