0) ITO (cenno a formula e significato)

Fatto (Senza giusticazione)

Se S e' un [qualcosa di stocastico]
del tipo

$$dS= [\mu]dt + [\sigma]dW$$

(solo deterministica se manca la parte $[\sigma]dW$)

e F e' una funzione (regolare C^2) del tipo F(t,S)
allora

$$dF = \{\}dt + \{\sigma\}dW$$

dove

$$\{\}dt = F_t (t,S)dt + F_x(t,S)dx +(1/2) F_{xx}(t,S) \sigma^2 S^2$$

o meglio

$$= F_t (t,S)dt + F_x(t,S) [\mu]dt +(1/2) F_{xx}(t,S) [\sigma]^2 S^2$$

$\{ F_x(t,S) [\sigma]^2\}dW$

Sostanzialmente: al termine previsto (funzione composta) $F_t (t,S)dt + F_x(t,S)dx$
si aggiunge il termine $+(1/2) F_{xx}(t,S) \sigma^2 S^2$

Esempio (importante)
La dinamica di una azione e' descritta come

$$dA(t)= \mu A(t)dt + \sigma A(t)dW$$
$$A(0)= A0$$

[crescita secondo un fattore di sviluppo (tipo interesse) μ + errore (media 0 ecc..) proporzionale a valore dell'azione e moltiplicato per un fattore σ che esprime la variabilità. Tipo modello di Markowitz o almeno compatibile]

Si considera la trasformazione
F= ln(A(t))
Chiaramente
$F_t = 0$, $F_x = (A(t))^{-1}$ $F_{xx} = -(A(t))^{-2}$

e [la parte dt e' $\mu A(t)$ e la parte dW e' $\sigma A(t)$]

$$dF(t)= [F_t (t,A)+ F_x(t,A)dx +(1/2) F_{xx}(t,S) \sigma^2 A^2]dt + \{ F_x(t,S)\sigma A \}dW$$

ovvero

$$dF(t)= [0 +(A(t))^{-1}\, \mu A(t) +(1/2) -(A(t))^{-2}\sigma^{2} A^{2} (t)]\, dt+ [(A(t))^{-1}\sigma A(t)]\, dW$$

$$dF(t)= [\mu -(1/2)\sigma^{2}]\, dt + [\sigma]\, dW$$

da cui

$$F(t) = \ln(A0) + (\mu -(1/2)\sigma^{2})t + \sigma W(t)$$

e

$$A(t) = A0 \exp((\mu -(1/2)\sigma^{2})t + \sigma W(t))$$

[W(t) e ‘ l’errore.…]

1) Dinamica del bond B(t)

$d(B(t)) = r\, B(t)\, dt$

[da cui $B'=rB$, $B=B0\exp(rt)$.
Se t (tempo)=n $B0\exp(rn)= B0[\exp(r)]^{n} = (1+i)^{n}$ con $\exp(r)=1+i$, $i=\exp(r)-1$ ….]

2) Dinamica dell’azione A(t)

$d(A(t)) = \mu\, A(t)\, dt+ \sigma A(t)\, dW(t)$
$A(t0)=A0$

[da cui

$$A(t)= A0\{ \exp (\mu-1/2\, \sigma^{2})t +\sigma\, W(t) \} = A0\{ \exp (\mu-1/2\, \sigma^{2})t + A0\sigma\, W(t)]$$

3) Replica del derivato (opzione call)

$\forall$t (tempo) (la replica e’ costruita con azione [peso a(t)] + bond [peso b(t)]

$V(t,A(t)) = a(t)A(t) +b(t)B(t)$
e quindi

$$\begin{aligned} dV &= a(t)\, d(A(t)) +b(t)\, d(B(t)) \\ &= a(t)\, (\mu\, A(t)\, dt+ \sigma A(t)\, dW(t)) +b(t)(r\, B(t))dt \\ &=\{ a(t)\, (\mu\, A(t) + b(t)(r\, B(t) \}dt +\{ a(t)\, \sigma A(t) \}\, dW(t) \end{aligned}$$

4) Andamento del derivato $V=f(t,A(t))$

[formula che esprime

- andamento “regolare”
- dipendenza da t (tempo) , A(t) valore dell’azione al tempo t]

$$dV = \{\}dt + \{\} dW$$
$$= \{ f_t + f_{xx} 1/2\, \sigma^2 [A(t)]^2 + f_x\, \mu A(t) \}dt + \{ f_x\, \sigma A(t) \} dW$$

5) Coefficienti di 3) e 4) uguali

a) parte (stocastica) dW

$\{ f_x\, \sigma A(t) \} = \{ a(t)\, \sigma A(t) \} \quad \Leftrightarrow f_x = a(t)$

b) parte (deterministica)

$$\{ f_t + f_{xx} 1/2\, \sigma^2 [A(t)]^2 + f_x\, \mu A(t) \} = \{ a(t) (\mu A(t) + b(t)(r B(t) \}$$

$f_x = a(t)$ cancella sia $f_x\, \mu A(t)$ che $a(t) (\mu A(t)$

La relazione di riduce a

$$\{ f_t + f_{xx} 1/2\, \sigma^2 [A(t)]^2 \} = b(t)(r B(t) \}$$

da cui

$$b(t) = (r B(t))^{-1} (f_t + f_{xx} 1/2\, \sigma^2 [A(t)]^2)$$

6) Riscrittura

Si sostituiscono i due valori a(t) e b(t) nell’espressione

$V(t,A(t)) = a(t)A(t) + b(t)B(t)$

Si ha

$$a(t)A(t) = f_x\, A(t)$$
$$b(t)B(t) = (r)^{-1} (f_t + f_{xx} 1/2\, \sigma^2 [A(t)]^2)$$

e

$$V(t,A(t)) = f_x\, A(t) + (r)^{-1} (f_t + f_{xx} 1/2\, \sigma^2 [A(t)]^2)$$

da cui

$$f_t = -1/2\, f_{xx}\, \sigma^2 [A(t)]^2 - f_x\, A(t) + r f(t,x)$$

7) Equazione differenziale

Basta ricordare che $f=V(t,A)$,(& $A=x$)
$f = f_x A(t) +(r)^{-1} (f_t + f_{xx} 1/2 \sigma^2 [A(t)]^2)$
da cui

$$f_t = -1/2 f_{xx} \sigma^2 [A(t)]^2 - f_x A(t) + r f(t,x)$$

L'equazione e' una normale equazione differenziale (tipo calore ?)
con la condizione (finale) $f(T,x) = h(x) = \max(0, K-x)$

8) Calcolo della soluzione

Se $N(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{x} \exp(-s^2/2) ds$

$$F(t,A) = A\, N(d1) – K \exp(-r (T-t))\, N(d2)$$

con
$d1 = \sigma^{-1} (T-t)^{-1/2} (\ln(A/K) + (r+1/2 \sigma^2) (T-t))$

[$d2 = d1 - \sigma [(T-t)^{1/2}$]
$d2 = \sigma^{-1} (T-t)^{-1/2} (\ln(A/K) + (r-1/2 \sigma^2) (T-t))$

9) Osservazioni e commenti

La formula dipende esplicitamente da
- Valore K e tempo finale T
- tasso di interesse (espresso da r)
- variabilita' dell'azione (espressa da σ)
- prezzo dell'azione (A)

<u>Non dipende esplicitamene da μ (andamento previsto per l'azione)</u>

Altri commenti
Risultano
$a(t) = N(d1)$ & $0<a(t)<1$
$b(t)B(t) = - K \exp(-r (T-t)) N(d2)$, $| b(t)B(t)| < K$

Opzione call e' replicata da un peso <1 dell'azione e da un finanziamento (in bond) da restuire