1 PORTAFOGLIO

<u>Portafoglio Markowitz (2 titoli) (rischiosi)</u>

due titoli rendimento/varianza (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2)

Si suppone $\mu_1 > \mu_2$, $\sigma_1 > \sigma_2$

portafoglio con pesi w_1, w_2

$w_1 = w$, $w_2 = 1- w_1 = 1- w$, $0 \leq w \leq 1$

Rendimento (portafoglio)

$$\mu(w) = w\,\mu_1 + (1-w)\,\mu_2 = \mu_2 + w\,(\mu_1-\mu_2)$$

Varianza (portafoglio) = $w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_{12}$

[$\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$ con ρ correlazione , $-1 \leq \rho \leq 1$]

Varianza (portafoglio)

$$= w^2 \sigma_1^2 + (1-w)^2 \sigma_2^2 + 2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$= w^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) - 2w(\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) + \sigma_2^2$$

<u>Minima varianza</u>

Varianza e' una curva del tipo $aw^2 - 2b\,w + cost$ con

$$a = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) = (1-\rho^2)\,\sigma_1^2 + (\sigma_2 - \rho\sigma_1)^2 > 0 \quad [\text{da } -1 \leq \rho \leq 1]$$

$$b = (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) = \sigma_2\,(\sigma_2-\rho\sigma_1)$$

b<a infatti

$$a - b = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) - (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) = (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2) = \sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2) > 0$$

$$b \geq 0 \iff (\sigma_2 - \rho\sigma_1) \geq 0 \iff \rho \leq \sigma_2 / \sigma_1 \; (<1)$$

La varianza ha minimo per $w_m = b/a < 1$ ed e' crescente in $[w_m, +\infty)$

In $0 \leq w \leq 1$ la varianza ha minimo in $w^* = \max\{w_m, 0\}$

Anche in $[w^*, +\infty) \subseteq [w_m, +\infty)$ la varianza e' crescente.

<u>Portafogli efficienti</u>

Per il rendimento μ in $[w^*, +\infty)$ oppure $[w_m, +\infty)$

$$\mu = \mu_2 + w\,(\mu_1 - \mu_2)$$

e

$$w = (\mu - \mu_2) / (\mu_1 - \mu_2)$$

La sostituzione e' lineare $\Rightarrow$

$\sigma^2(\mu)$ e' una funzione convessa e crescente come $\sigma^2(w)$ (ramo di parabola o suo sottinsieme)

$\sigma^2(\mu)$ e' invertibile e esiste una funzione inversa $\mu(\sigma^2)$ (crescente e concava)

2 PORTAFOGLIO

I punti sul ramo di parabola corrispondono a tutti i portafogli efficienti (non e' possibile aumentare μ senza aumentare σ ovvero diminuire σ senza diminuire μ) e il ceefficiente angolare della tangente alla parabola individua un fattore di scambio rischio-rendimento

<u>Alcune situazioni possibili</u>

1) Se $\rho \leq \sigma_2 / \sigma_1$ (<1) (titoli "poco correlati")
$b \geq 0$, $w_m = w^* > 0$. In corrispondenza di w^* si ha un rendimento
$\mu^* > \mu_2$ e la varianza (minima) e' $\sigma^* < \sigma_2$
Nell'intervallo $(w^*,1)$ vi e' un punto con varianza $= \sigma_2$
e rendimento $\mu > \mu^* > \mu_2$
[$\Rightarrow$ Esistono punti (portafogli) piu' efficienti di (μ_2 , σ_2)
maggiore rendimento e varianza non maggiore]

2) Se $\rho > \sigma_2 / \sigma_1$ (valore < 1) (titoli "abbastanza correlati")
$w_m < 0$ e $w^* = 0$. Tra i portafogli con pesi positivi il solo titolo 2 realizza la minima varianza.
Se e' possibile avere $w = w_m < 0$
[$\Rightarrow$ vendita (scoperto) titolo 1 e acquisto ulteriore di titolo 2]
e' possibile diminuire la varianza fino al minimo assoluto

3) In $0 \leq w \leq 1$ il rendimento massimo μ_1 si ha per $w = 1$ (solo titolo 1)
Se sono ammessi i pesi w negativi si puo' ottenere un rendimento $> \mu_1$
se $w > 1$ e $1-w < 0$ (vendita allo scoperto del titolo 2 per acquistare il titolo 1)
Si puo' cosi' ottenere un rendimento arbitrariamente grande (con σ illimitato).

4) Se $\sigma_2 = 0$ esiste un titolo sicuro con rendimento $\mu_2 > 0$ (denaro , bond ecc..)
si aumenta il rendimento se si prende a prestito del denaro (titolo sicuro) per acquistare il titolo 1 (rischioso)
Le varie formule si semplificano. Se $\sigma_2 = 0$ $a = \sigma_1^2 > 0$, $b = 0$, varianza $= w^2\sigma_1^2$
rendimento $\mu = \mu_2 + w(\mu_1-\mu_2)$ e $w = (\mu - \mu_2) / (\mu_1 - \mu_2)$
qiundi varianza $= (\mu - \mu_2)^2 \ \sigma_1^2 / (\mu_1 - \mu_2)$

Con due titoli si possono quindi impostare e risolvere vari problemi
(permettendo o meno vendite allo scoperto)
-portafoglio di minima varianza
- portafoglio di minima varianza con rendimento $\geq \mu_0$ assegnato
- portafoglio di massimo rendimento con varianza $\leq \sigma_0$ assegnata
- portafoglio corrispondente ad un fattore di cambio rischio-rendimento
(tangente alla curva $\sigma(\mu)$) es max $(\mu-k\sigma^2)$ k fissato

3 PORTAFOGLIO

DUE FONDI

<u>Markowitz (n –titoli)</u>

Disponibili n titoli (μ_i , σ_i). Vale per tutti $\sigma_i > 0$
C matrice (def pos) varianza covarianza

Problema min varianza a rendimento fissato

$$\min w^t C w$$

vincoli

$$\sum w_i = 1,$$

$$\sum w_i \mu_i = \mu_0$$

e condizioni di ottimo

$$Cw = \lambda_0 m + \lambda_1 s$$

dove

$$m = (\mu_1,\ldots, \mu_n)^t$$

$$s = (1,1,\ldots,1)^t$$

Posti

$$w_m = C^{-1}m$$

$$w_s = C^{-1}s$$

Se w risolve (minima varianza r0 fissato) $w = \lambda_0 w_m + \lambda_1 w_s$

Il punto soluzione verifica l’ammissibilita’ e le condizioni di ottimo.
Il problema e’ convesso (obbiettivo convesso e vincoli lineari) e ogni punto che verifica ammissibilita’ e condizioni di ottimo e’ la soluzione per quei valori dei moltiplicatori (di Lagrange) (= λ_0 , λ_1)

<u>COSTRUZIONE DELLA CURVA</u> (Al variare di μ_0)

Se w risolve

$$Cw = \lambda_0 m + \lambda_1 s$$

allora posto

$$w_m = C^{-1}m, \quad w_s = C^{-1}s$$

segue

$$w = \lambda_0 w_m + \lambda_1 w_s$$

e si ha la formula

$$\sigma^2 = w^t C w = \lambda_0 w^t m + \lambda_1 w^t s = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1$$

Inoltre

$$\mu_0 = w^t m = \lambda_0 m^t C^{-1} m + \lambda_1 m^t C^{-1} s$$
$$1 = w^t s = \lambda_0 s^t C^{-1} m + \lambda_1 s^t C^{-1} s$$

Ovvero si ha il sistema lineare (per λ_0, λ_1)

*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*

Con $a = m^t C^{-1} m$, $b = m^t C^{-1} s = s^t C^{-1} m$, $c = s^t C^{-1} s$

Il determinante di A e' $ac-(b)^2$, C e' simmetrica e definita positiva ,

$C = LL^t$ e $= C^{-1} = L^{-t} L^{-1}$

$$a = m^t C^{-1} m = m^t L^{-t} L^{-1} m = z^t z$$

con $z = L^{-1} m$,

$$c = s^t C^{-1} s = s^t L^{-t} L^{-1} s = y^t y$$

con $y = L^{-1} s$

$$b = m^t C^{-1} s = s^t C^{-1} m = m^t L^{-t} L^{-1} s = s^t L^{-t} L^{-1} m = y^t z$$

e quindi (Schwartz)

$ac-b^2 > 0$ (potrebbe essere = 0 solo se s fosse multiplo di m)

Dalla regola di Cramer se $\Delta = ac-b^2 > 0$

$$\lambda_0 = (c\,\mu_0 - b) / \Delta$$
$$\lambda_1 = (a - b\,\mu_0) / \Delta$$

Da

$\sigma^2 = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 1$

$2\Delta\sigma^2 = (c\,\mu_0 - b)\,\mu_0 + (a - b\,\mu_0) = c\,[\,(\mu_0)^2 - (2b/c)\,\mu_0 + a/c\,] =$

$= c\,[\,(\mu_0 - b/c\,)^2 + a/c - (\,b/c)^2\,] =$

e infine

$$\Delta\sigma^2 = c\,(\mu_0 - b/c\,)^2 + \Delta/c$$

Il valore μ_0 corrisponde al rendimento fissato , Δ e c sono dei fattori di scala e b/c un fattore di spostamento.

5 PORTAFOGLIO

Nel piano (μ, σ) interessano i punti sulla curva $\sigma(\mu)$ (= portafogli di minima varianza a μ fissato) o i punti sulla curva corrispondente $\mu(\sigma)$.

E' possibile "costruire la curva" e comunque calcolare la soluzione, fissato μ_0 attraverso conti semplici : si calcolano w_m e w_s , poi a b c , attraverso questi i valori λ_0 , λ_1 e infine la soluzione w e la minima varianza $\sigma^2 = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1$

Si ottiene una soluzione ma senza imporre i vincoli (per ogni componente) $0 \leq w_i$ che vanno gestiti separatamente. La matrice pero' C puo' essere di grandi dimensione, mal condizionata ecc,...

Il legame e' del tipo $\sigma^2 \approx a\,\mu^2 + k$
Come curva si tratta di un'iperbole ovvero (per quello che interessa)
$\sigma \approx (\mu^2 + k)^{1/2}$
oppure
$\mu \approx (\sigma^2 - k)^{1/2}$

Una funzione $\phi(x) = (a\,x^2 + k)^{1/2}$ ha come derivata

$$\phi' = (1/2)\,2ax\,(ax^2 + k)^{-1/2} = \text{cost}\,(1 + k / ax^2)^{-1/2}$$

Per $x > 0$ k / ax^2 e' decrescente quindi $(1 + k / ax^2)^{-1/2}$
e' crescente, e cosi' ϕ' . Quindi la funzione $\sigma = \sigma(\mu)$ e' convessa e
un conto analogo mostra che funzione $\mu = \mu(\sigma)$ e ' concava

6 PORTAFOGLIO

PORTAFOGLIO DI MERCATO

Il legame (σ, μ) e'

$$\Delta\sigma^2 = c\,(\mu_0 - b/c)^2 + \Delta/c$$

Necessariamente $c > 0$, $\mu > 0$, $\sigma^2 > 0$, $\Delta > 0$. Il minimo di $c\,(\mu - b/c)^2 + \Delta/c$ si realizza per $\mu = b/c$.
Posto $\mu^* = \max\{ 0, b/c \}$ ha senso considerare i valori μ in $[\mu^* , +\infty) \subseteq [b/c , +\infty)$
In ogni caso esiste un valore minimo $\sigma^{*2} \geq 1/c > 0$.
σ^* e' anche il valore minimo possibile per σ e la curva concava $\mu(\sigma)$ va considerata nell'intervallo $[\sigma^* , +\infty)$. Ovviamente $\mu(\sigma) = \mu^*$
Se $\mu^* = b/c > 0$ $\quad \sigma^2 = 1/c$ e $\mu(\sigma) = b/c + ((\Delta/c)\,(\sigma^2 - 1/c))^{1/2}$
ha tangente verticale in σ^*

Ogni punto P (portafoglio) sulla curva e' caratterizzato dai valori (μ_P, σ_P). Se e' disponibile una risorsa senza rischio (denaro) con rendimento i0 e varianza 0 il punto (i0 , 0) e' esterno alla curva $\mu(\sigma)$.

Ogni retta del tipo $\mu - i0 = (\sigma)\,K$ passa per il punto (i0 , 0)
e data la forma (concavita') della curva $\mu(\sigma)$ puo'
non incontrare la curva
incontrare la curva in solo punto (tangente)
incontrare la curva in piu' punti

Esiste quindi un'unico punto $M = (\mu_M , \sigma_M)$
che corrisponde al punto di tangenza.

Esiste un valore K per cui la retta
$\mu - i_0 = (\sigma)\,K$ passa per $M = (\mu_M , \sigma_M)$
La retta ha coefficiente angolare $K = (\mu_M - i0) / \sigma_M = \theta_M$
La retta e' tangente in (μ_M , σ_M) alla curva convava $\mu(\sigma)$, domina la curva
e per ogni altro portafoglio (μ_P , σ_P)

$$\mu_P = \mu(\sigma_P) \leq \mu_M + \theta_M\,(\sigma_P - \sigma_M) = i0 + \theta_M\,\sigma_P = i0 + (\mu_M - i0)\,(\sigma_P / \sigma_M)$$

Se si pone $\theta_P = (\mu_P - i0) / (\sigma_P)$ si ha la condizione equivalente $\theta_P \leq \theta_M$

A parita' di rischio (σ) il miglior rendimento si ottiene da combinazione lineare della risorsa senza rischio e del portafoglio M (detto portafoglio di mercato). Se i pesi sono w per il portafoglio, 1-w per la risorsa i si ha

$$\mu_w = w\,(\mu_M) + (1-w)\,i0 = i0 + w\,(\mu_M - i0)$$

7 PORTAFOGLIO

e

$$(\sigma_W)^2 = w^2 (\sigma_M)^2$$

Per sostituzione

$$w = (\sigma_W) / (\sigma_M)$$

$$\mu_W = i0 + w (\mu_M - i0) = i0 + (\sigma_W)(\mu_M - i0) / (\sigma_M) = i0 + (\sigma_W)\theta_M$$

e ancora

$$\mu_W - i0 = (\sigma_W)\, \theta_M$$

Noto i0 e calcolato il portafoglio M (= noto θ_M) si puo' fissare μ e calcolare il valore σ e il peso w oppure fissare σ e calcolare μ e w.

I valori per cui w risulta >1 prevedono 1-w < 0 in tal caso si suppone di
prendere in prestito la risorsa i0 (contante)
con tale somma acquisitare il portafoglio (titolo rischioso) ,

Il portafoglio M si chiama portafoglio di mercato perche se si suppone
i) noti i prezzi e corretti i valori probabilistici (media e varianza)
ii) unica risorsa (denaro) con rendimento e costo i0
iii) stesso orizzonte temporale (1 periodo) per tutti gli operatori

ogni operatore dovrebbe fare utilizzo solo di denaro contante (prestato e preso a prestito)
e quote del portafoglio M se vuole ottimizzare rischio o rendimento

INDICE DI SHARPE

Il conto precedente (combinazionelineare di risorsa senza rischi e portafoglio efficiente ovvero sulla curva) puo' essere eseguito per qualunque titolo o portafoglio (μ_P , σ_P)
Con peso w per il portafoglio, 1-w per la risorsa i
si ha ancora

$$\mu_W = w(\mu_P) + (1-w)\, i0 = i0 + w\,(\mu_P - i0)$$

$$(\sigma_W)^2 = w^2 (\sigma_P)^2$$

e per sostituzione

$$w = (\sigma_W)/(\sigma_P)$$

$$\mu_W = i0 + w\,(\mu_P - i0) = i0 + (\sigma_W)(\mu_P - i0)/(\sigma_P)$$

Posto

$$\theta_P = (\mu_P - i0)/(\sigma_P)$$

si ha

$$\mu_W - i0 = (\sigma_W)\,\theta_P$$

Fissato il portafoglio (μ_P , σ_P) e' possibile ottenere qualsiasi rendimento μ_W a condizione di accettare un rischio $\sigma_W = (\mu_W - i0)/\theta_P$
e attribuendo un peso $w = (\sigma_W)/(\sigma_P) = (\mu_W - i0)/(\mu_P - i0)$

Un sistema possibile per confrontare le performance di un titolo(singolo) o di un portafoglio (fissato) e' quello di calcolare in qualche modo il valore θ_P
[che dipende solo dal titolo e dal portafoglio, ma non dalle correlazioni con altri titoli]

Se si confrontano due portafogli/titoli P e Q

$$\theta_P < \theta_Q \;\Rightarrow\; (\mu_P - i0)/(\sigma_P) < (\mu_Q - i0)/(\sigma_Q)$$

e quindi

$$(\mu_P - i0)/(\mu_Q - i0) < \sigma_P/\sigma_Q$$

$\Rightarrow$ A parita' di rendimento P ha maggior rischio (varianza) e parita' di varianza Q ha minor rendimento.
Un titolo (portafoglio) con massimo θ_P dovrebbe essere preferito da tutti gli investitori razionali e in possesso dell'informazione.
Il valore

$$\theta_P = (\mu_P - i0)/(\sigma_P)$$

si chiama indice di Sharpe del titolo (portafoglio)

9 PORTAFOGLIO

CAPM (formule)

Ogni vettore di pesi w produce un portafoglio, attraverso questo i valori μ_P , σ_P e il rapporto $\theta_P = (\mu_P - i0) / (\sigma_P)$

Il portafoglio di mercato M corrisponde

$$\max (\theta_P)$$
$$\text{con vincolo } \sum w_i = 1 \text{ [ovvero } 1 = w^t s \text{]}$$

La condizione di ottimo e'

$$\nabla\theta_P - \lambda_M \nabla(w^t s-1) = 0$$

(i gradienti sono rispetto a w e λ_M e' il moltiplicatore di Lagrange)

$\nabla\theta_P$ Calcolo (esplicito)

Vale

$$\nabla_W (\theta_P) = (1/\sigma_P) (\nabla_W (\mu_P) - (\theta_P) \nabla_W (\sigma_P))$$

Dalle formule

$$\sum w_i \mu_i = \mu_P \Rightarrow \nabla_W (\mu_P) = m$$

$$w^t C w = (\sigma_P)^2 \Rightarrow \nabla_W (\sigma_P)^2 = 2Cw$$

Ovviamente

$$\nabla_W (\sigma_P)^2 = 2 (\sigma_P) \nabla_W (\sigma_P) \Leftrightarrow \nabla_W (\sigma_P) = 1/(2\sigma_P)\nabla_W (\sigma_P)^2$$
$$\nabla_W (\sigma_P) = 1/(2\sigma_P) \nabla_W (\sigma_P)^2 = (\sigma_P)^{-1} Cw$$

Sostituendo

$$\nabla_W(\theta_P) = (1/\sigma_P) (\nabla_W (\mu_P) - (\theta_P)\nabla_W (\sigma_P)) = (\sigma_P)^{-1} m - (\theta_P) (\sigma_P)^{-2} Cw$$

Calcolo del moltiplicatore di Lagrange λ_M

per M (condizione di ottimo)

$$(\sigma_M)^{-1} m - (\theta_M)(\sigma_M)^{-2} Cw = \lambda_M s$$

Moltiplicando per w^t si ottiene

$(\sigma_M)^{-1} w^t m - (\theta_M) (\sigma_M)^{-2} w^t C w = \lambda_M \; w^t s$

(w coordinate del portafoglio M e quindi $w^t s = 1$, $w^t m = \mu_M$, $w^t C w = (\sigma_M)^2$)

$$(\sigma_M)^{-1}\mu_M - (\theta_M)(\sigma_M)^{-2} (\sigma_M)^2 = \lambda_M$$

e ancora

$$(\sigma_M)^{-1}\mu_M - (\theta_M) = \lambda_M$$

$$(\sigma_M)^{-1} (\mu_M - \mu_M + i0) = \lambda_M$$

e

$\lambda_M = i0 / \sigma_M$

<u>Calcolo per ogni titolo</u>

Nota λ_M per ogni riga k [corrispondente al titolo k e al peso w_k]

$$(\sigma_M)^{-1} \mu_k - (\theta_M) (\sigma_M)^{-2} (Cw)_k = \lambda_M = i0/ \sigma_M$$

e quindi

$$(\sigma_M)^{-1} [\mu_k - i0] = (\theta_M) (\sigma_M)^{-2} (Cw)_k$$

e da $(\theta_M) = (\mu_M - i0) /(\sigma_M)$

$$[\mu_k - i0] = (\theta_M) (\sigma_M)^{-1} (Cw)_k = ([\mu_M - i0]) ((\sigma_M)^{-2}) (Cw)_k$$

scritto come

$$[\mu_k - i0] = [\mu_M - i0] \beta_k$$

con

$$\beta_k = (\sigma_M)^{-2} (Cw)_k$$

11 PORTAFOGLIO

COSA E' β

Il valore $(Cw)_k$ e' dato da $\sum_{j=1:n} C_{kj}\, w_j$ ma

$$C_{kj} = E((O[k,i]-\mu_k)(O[j,i]-\mu_j)) = \text{cov}(k,j)$$

{ dove O[k,i] sono le "osservazioni/uscite ecc..." dei vari titoli e/o rendimenti : titolo k , tempo j }

I pesi w sono quelli di M (portafoglio di mercato) e per linearita'

$$\sum_{j=1:n} C_{kj}\, w_j = \sigma_{kM}$$

(covarianza del titolo k rispetto al portafoglio M , pesi uguali alle coordinate w di M)

Dalle formule

$$\sigma_{kM} = \rho\, \sigma_M\, \sigma_k \quad \text{con} \quad -1 \le \rho \le 1$$

$$\beta_k = ((\sigma_M)^{-2})\, (Cw)_k = (\sigma_M)^{-2}\, \rho\, \sigma_M\, \sigma_k = \rho\, \sigma_k/\sigma_M$$

Quindi

$$\beta_k = \sigma_{kM} / (\sigma_M)^2 \text{e anche}$$

$$\beta_k = \rho\, \sigma_k / \sigma_M$$

La formula

$$[\mu_k - i0] = [\mu_M - i0]\, \beta_k$$

si scrive anche

$$\mu_k = i0 + \beta_k [\mu_M - i0]$$

(= Ogni titolo si sposta "come il mercato" attraverso un fattore che e' legato alla correlazione. Si puo' avere $\beta_k > 1$ (oscilla piu' del mercato) $\beta_k = 1$ (oscilla come il mercato) , $\beta_k < 1$ (oscilla meno del mercato) (= 1 correlazione perfetta , = 0 (oscilla scorrelato dal mercato) ecc..)

Inoltre

$$\theta_k = (\mu_k - i0)/(\sigma_k) = \rho\, [\mu_M - i0] / \sigma_M = \rho\theta_M$$

N.B.

L'analisi vale per ogni titolo (tutti ?) incluso nel portafoglio di mercato.

Il vantaggio dell'approccio $\mu_k = i0 + \beta_k [\mu_M - i0]$

(o analoghi) e' di usare solo le osservazioni/stime/previsioni su mercato, singolo titolo, correlazioni titolo-mercato ma non tutte le correlazioni titolo-titolo.

I valori β rappresentano il legame del singolo titolo al "mercato" ma tutti i titoli, anche se $\beta = 0$ sono nel "mercato" .Titoli scorrelati aumentano la diversificazione.

Molto spesso si usa (arbitrariamente) come "mercato" un qualche indice azionario rappresentativo e come β il valore che si ottiene (stima) dalla formula $\beta_k = \rho\, \sigma_k / \sigma_M$.

Come stima della bonta' degli investimenti (azioni,fondi) e' invece frequente l'uso del rapporto (Sharpe) $\theta_P = (\mu_P - i0) / (\sigma_P)$.

Osservazioni piu' o meno frequenti cambiano il numero dei rilevamenti e i valori stimati (attenzione a confrontare banche dati diverse)