1 PROBABILITA' (per portafoglio)

0) Richiamo probabilistico

Se data una variabile aleatoria X si possono definire valore aspettato (media ) E(X)
Noto m = E(X)
si definisce varianza il valore (aspettato)

$$\sigma^2 = E\,(X-m)^2$$

Il valore positivo

$$\sigma = (\sigma^2)^{1/2}$$

e' detto deviazione standard
Date due variabili aleatorie X e Y di medie $m_x$ e $m_y$ si definisce covarianza il valore $\sigma_{xy}$

$$\sigma_{xy} = E\,(Y - m_y)(X - m_x)$$

Il valore $\rho_{xy}$

$$\rho_{xy} = \sigma_{xy} / \sigma_y\sigma_x$$

e' detto coefficiente di correlazione (tra X e Y ). Da diseguaglianze standard segue

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_y\sigma_x$$

e quindi

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

Se X e Y sono indipendenti $\rho_{xy} = 0$ , ma $\rho_{xy} = 0$ non implica indipendenza.

Se $X_1, X_2, \ldots X_n$ sono v.a. e $p_1, p_2, \ldots p_n$ numeri reali allora

$$Z = \sum_{i=1:n} p_i X_i$$

e' v.a. e

$$E(Z) = E(\sum_{i=1:n} p_i X_i) = \sum_{i=1:n} p_i\, E(X_i)$$

se E( Z )= m le v.a. hanno media $m_1, m_2, \ldots m_n$

$$E(Z) = m = \sum_{i=1:n} p_i\, m_i$$

Per la varianza

$$\sigma(Z)^2 = E\,(Z-m)^2 = E\,(\sum_{i=1:n} p_i X_i - m)^2 = E\,(\sum_{i=1:n} p_i X_i - \sum_{i=1:n} p_i\, m_i)^2$$

e

$$\sigma(Z)^2 = E\,(\sum_{i=1:n} p_i\,(X_i - m_i))^2 = p^t M p \geq 0$$

dove p e'il vettore ( $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ) e M la matrice di elementi $M_{ii} = \sigma_i^2$ e $M_{ij} = \sigma_{ij}$ se $i \neq j$
La matrice M e' positiva definita
(se semidefinita positiva una combinazione lineare di $X_1, X_2, \ldots X_n$ ha varianza =0)

2 PROBABILITA' (per portafoglio)

1) <u>Variazione prezzo titoli</u>
Si suppone che ogni azione possa essere osservata periodicamente (giorno,settimana,mese,anno...)
L'andamento dovrebbe essere la somma di un comportamento deterministico (valore reale della quota) e uno probabilistico (offerta e domanda)
La media riflette il determinismo e indici di dispersione misurano la variabilita'.

Modello 1
$A^+ = c\ A + u$
u variabile aleatoria N(0,s) , c coefficiente di crescita

Pro: modello semplice e compatibile con portafoglio
Contro: oscillazioni limitate ($A^+$ deve rimanere > 0 ) , ampiezza della variazione non legata al prezzo A
$A^+ = c\ A( 1 + u/(cA) )$

Modello 2
$A^+ = u\ A$ la variable aleatoria e'
$\log (A^+)=\log (A) +\log(u)$
si suppone che le log(u) variabile N(1,s) oppure N(c,s)

Pro : compatibile con i prezzi positivi, la variazione aumenta al crescere del prezzo (A amplifica errore casuale)
Contro : i dati reali osservati sono differenti sul lungo periodo (code spesse)

2) <u>Cosa misurare</u>

Si osserva il prezzo dell'azione ai tempi 0,1,....n e si stimano media e varianza
Nel caso di due (o piu' ) azioni si osservano i prezzi ai tempi 0,1,....n e si stimano medie, varianze e covarianze.
Nel caso delle azioni (osservazioni sono i prezzi $A_1,.....,A_n$ si puo' misurare
sia
$A_2/A_1,\ A_3A_2\ ,.....,\ A_{i+1}/A_i$
che
$A_2-A_1,\ A_3-A_2\ ,.....,\ A_{i+1}-A_i,.....,$

Nel modello 1 (con c=1) la v.a. da osservare e'
$[\ A_2/A_1 -1,\ A_3A_2-1\ ,.....,\ A_{i+1}/A_i -1\ ]$
nel modello 2
$[\log(A_2/A_1),\ \log(A_3A_2)\ ,.....,\ \log(A_{i+1}/A_i\ )]$

Per valori molto piccoli comunque
Se $A_2/A_1 = 1+r$ e $A_2/A_1 -1 = r$
$\log (1+r) \sim r$
e $\log(A_2/A_1) = \log (1+r) \sim r$
e i due modelli portano a calcoli simili

E' facile trovare banche dati con stime.
Le stime delle medie (fattori di crescita) dipendono dal periodo di riferimento, le stime delle varianze covarianze dalla frequenza di osservazioni. Esistono anche vari di stimatori.

3 PROBABILITA’ (per portafoglio)

3) <u>Portafoglio</u>
Si costruisce un portafoglio se ad ogni titolo e’ assegnato un peso $w_i$ e per i pesi vale $\sum_{i=1:n} w_i = 1$ , Per i pesi $w_i$ si suppone $w_i \geq 0$.

Se con una somma Q si acquistano n titoli di prezzo $A_1, A_2,....A_n$ in quantita’ $q_1, q_2,....q_n$ allora $Q = \sum_{i=1:n} q_i A_i$ ovvero si acquistano i vari titoli con pesi $w_i \geq 0$ , $w_i = q_i A_i /Q$ e $\sum_{i=1:n} w_i = 1$.
Al periodo successivo i titoli varranno $A^+_1, A^+_2,....A^+_n$ e si avra’ un valore $Q^+ = \sum_{i=1:n} q_i A^+_i$

Se si misura (modello 1) , sapendo $A^+_i = (1+r_i)A_i$

$Q^+/Q -1 = (Q^+-Q) / Q = ( \sum_{i=1:n} q_i A^+_i - \sum_{i=1:n} q_i A_i ) / Q$

$Q^+/Q -1 = \sum_{i=1:n} (q_i A_i /Q) r_i = \sum_{i=1:n} w_i r_i$

mentre per il Modello 2

$[\log (Q^+/Q) ] = \log ( \sum_{i=1:n} q_i A^+_i ) - \log( \sum_{i=1:n} q_i A_i ) =$

$\log ( \sum_{i=1:n} q_i A^+_i )/( \sum_{i=1:n} q_i A_i ) =$

$[ \log (Q^+/Q) ] = \log (\sum_{i=1:n} (q_iA_i/Q) A^+_i/A_i ) > $ (concavita’) $\sum_{i=1:n} w_i \log( A^+_i/A_i )$

4) <u>Portafoglio, Pesi negativi ?</u>
Si possono considerare anche portafogli con alcuni pesi $w_i < 0$. In questo caso al titolo e’ legato un incasso immediato e una spesa successiva. Si puo’ interpretare come vendita allo scoperto

[ La vendita allo scoperto e’ vendita di un bene di cui non si dispone : si suppone di prenderlo in prestito o di avere dei tempi di consegna ( ma non di pagamento) differiti. Entro la scadenza (pattuita o stabilita ) si deve acquistare il bene (l’azione) per la consegna o la restituzione a chi ha prestato. Operazione vantaggiosa se l’azione scende, massimo guadagno limitato ( la somma ricevuta se l’azione scende a 0) ma possibile perdita infinita (se l’azione sale senza limite). Le vendite allo scoperto sono a volte regolamentate ( possibilita’, quantita,tempi ecc..,) e possono richiedere deposito di somme a garanzia. ]