1 RENDITE

RENDITA

Pagamento periodico (n volte) di somma R, t interesse (fisso e riferito a ogni periodo)

Valore attuale n pagamenti futuri (capitale)

$$C = \sum_{i=1,n} (1 + t)^{-i} R = \sum_{i=1,n} \gamma^{i} R$$

[con $\gamma = (1 + t)^{-1}$, $1/\gamma = 1 + t$, $t = (1-\gamma) / \gamma$]

e

$$C = \sum_{i=1,n} \gamma^{i} R = \gamma \sum_{i=0,n-1} \gamma^{i} R = \gamma (1 - \gamma^{n}) / (1 - \gamma) R$$

$$= (1 / t) R (1 - (1 + t)^{-n})$$

Formula base

$$C = (R/t) (1 - (1 + t)^{-n})$$

$C = C(n,R,t)$ Lineare in C e R ,

$C = C(t)$ decrescente rispetto a t ($\Rightarrow R = R(t)$ crescente)

$C = C(n)$ crescente rispetto ad n ($\Rightarrow R = R(n)$ decrescente)
[Dalle varie formule si ha anche $C < nR$, $R > tC$]

Se $n \to \infty$ $C \to (R/t)$ (rendita infinita)

Fissato t se $R > t C$ e' sempre possibile determinare minimo n t.c

$$C < R (1/t) (1 - (1 + t)^{-n})$$

Condizione equivale a

$$R/t (1 + t)^{-n} < R/t - C$$

$$(1 + t)^{-n} < 1 - t C / R = a , 0 < a < 1$$

$$- n \log(1 + t) < \log(a) \Rightarrow n \log(1 + t) > - \log(a) = \log(1/a)$$

$$n > \log (1/a) / \log (1+t)$$

Alcuni problemi sulle rendite comportano che il capitale raggiunga il valore
W tra k ($\geq n$?) anni. In questo caso basta ricordare/applicare che

2 RENDITE

il capitale attuale C dara' origine a $C(1+t)^k$.

Ogni capitale (versamento) R al tempo j da origine al tempo k al capitale $R(1+t)^{k-j}$

Quindi i versamenti R ai vari tempi 1,…, n producono complessivamente (al tasso t) al tempo n

$$\sum_{i=1,n} (1 + t)^{n-i} R = (1 + t)^n \sum_{i=1,n} (1 + t)^{-i} R = C (1+t)^n$$

e

$$C (1+t)^n = (R/t) (1 - (1 + t)^{-n}) (1+t)^n = (R/t) ((1+t)^n -1)$$

Interesse non lineare sono possibili stime & calcoli

1) (stima molto grezza)

$$(1+t)^n > (1+nt) \Rightarrow -(1+t)^{-n} > -1/(1+nt)$$

$$C = R (1/t) (1-(1+t)^{-n}) > R (1/t) (1-1/(1+nt)) = nR/(1+nt)$$

$$\text{e} \quad t > (R/C -1/n) = t_1$$

[e la valutazione ulteriore $C(1+nt) > nR$]

2) (stima ragionevole solo se $(1+t)^{-n}$ molto piccolo (n molto grande) n*t>300 (330 ?))

$$C = (R/t) (1-(1+t)^{-n}) < (R/t) \quad \text{e}$$

$$t < R/C = t_2$$

si ha anche come limite superiore

$C = \sum_{i=1,n} (1 + t)^{-i} R < \sum_{i=1,n} R(1+t)^{-1} =(nR) (1+t)^{-1} C$

$(1+t) C < nR$ e

$t < (nR-C)/C= n(R/C)-1$

Un' ulteriore stima semplice potrebbe essere la media tra t_1 e t_2 cioe'

$$t_{12} = R/C - 1/ (2 n)$$

3) Si puo' anche usare la relazione media aritmetica-media geometrica infatti

3 RENDITE

$$(1/n) \sum_{i=1,n} (1+t)^{-i} \geq (\Pi_{i=1,n} (1+t)^{-i})^{1/n} = (1+t)^{-n(n+1)/2n} = (1+t)^{-(n+1)/2}$$

per cui $\sum_{i=1,n} (1+t)^{-i} \geq n (1+t)^{-(n+1)/2}$

e

$$C = \sum_{i=1,n} (1+t)^{-i} R \geq n R (1+t)^{-(n+1)/2}$$

e infine

$$(1+t) \geq (nR/C)^{2/(n+1)}$$

$$t \geq (nR/C)^{2/(n+1)} -1$$

4) metodo iterativo

Trovare t noti n R e C equivale a risolvere l'equazione non lineare (in t)

$$F(t) = C \text{ con } F(t) = (R/t) (1-(1+t)^{-n})$$

E' possibile scrivere la relazione anche

$$t = R/C (1-(1+t)^{-n}) = H(t)$$

che si puo' prestare ad iterazioni tipo punto fisso.

Infatti si ha

$$| H'(t) | = nR/C (1+t)^{-n-1}$$

e $\forall$ t >0 $(1+t)^i \leq (1+t)^n$

$\Rightarrow$ (alla soluzione)

$$nR (1+t)^{-n} < \sum_{i=1,n} R(1+t)^{-i} = C ,$$

$\Rightarrow$ (alla soluzione)

$$n (R / C) (1+t)^{-n} < 1 \quad \text{ovvero } | H' (t) | < (1+t)^{-1} < 1$$

La formula $t^+ = H(t)$ si puo' scrivere semplicemente

$$t^+ = R/C (1-(1+t)^{-n}) = (1/C) t C(t,nR)$$

ovvero

$$t^+ = t (C(t)/C)$$

Risultano pero' piu' veloci altri metodi (metodo di Newton , ecc…).

Una buon punto iniziale puo' essere il valore

4 RENDITE

$$R / C - 1 / (2n) = (t_1 + t_2) / 2$$

Classiche applicazioni delle rendite

i) Pagamento di un debito (mutuo/prestito)
In molti casi il pagamento di un debito avviene attraverso una restituzione rateale (n anni ma anche semestri mesi ecc…)
Caso classico : un capitale finanzia in parte l'acquisto di una casa e il rimborso avviene attraverso un pagamento periodico di una somma costante

ii) Costituzione di un capitale
Un capitale C a tasso t diventa dopo n anni una somma $S = C(1+t)^n$
E'possibile accumulare la somma S al tempo n attraverso il pagamento per n anni di una rendita R (tasso t) equivalente al capitale (valore attuale C) a condizione che le somme versate siano progressivamente sempre investite a tasso t .

Esempio
Funziona secondo questo schema il meccanismo del TFR. E' previsto un pagamento annuale (parte della retribuzione) e un rendimento fissato (legato all'inflazione)
Il numero n dipende dalla durata (eta' del pensionamento/fine rapporto) .
Il capitale accumulato puo' essere trasformato, almeno in parte, in una rendita (di durata incerta)

iii) Confronto acquisto/ affitto
In alcuni casi occorre decidere tra alcune situazioni
Puo' interessare decidere tra un acquisto (prezzo W) o il possibile affitto annuale (A) per un lungo periodo (n anni).
Una possibile indicazione e' il confronto tra il capitale W e il capitale e il valore attuale (tasso t) della rendita generata dall'affitto

Un secondo caso e' il confronto tra due possibili macchinari equivalenti ma
di prezzi diversi (M1 e M2), di durata diversa (n1 e n2) e spese annuali di gestione diverse (G1 e G2)
A tasso t il macchinario 1 prevede un costo
C1 = M1 + (rendita G1 per n1 anni) e se eventualmente rinnovato
equivale ad una rendita C1 pagata ora e successivamente ogni n1 anni…
Il confronto tra i costi (e le rendite ottenute) permette di calcolare
il macchinario piu' economico (e se si vuole la rendita annuale equivalente….)

iv**)** Indicazione valore azione
Alcune societe per azioni distribuiscono periodicamente una parte degli utili (dividendi).
Puo' interessare, noto il tasso t, supponendo i dividendi costanti nel tempo, il valore attuale della rendita infinita e confrontare tale valore con il valore di borsa dell'azione.

5 RENDITE

v) Franchising (acquisto differito)
Alcuni contratti (franchising) prevedono che sia possibile affittare un bene per k anni pagando un affitto periodico A e al termine dei k anni sia possibile (ma non obbligatorio) acquistare la proprieta' del bene pagando una somma ora stabilita S (maxi rata finale)
Puo' interessare confrontare (per esempio)
- il costo dell'acquisto immediato W
- il valore attuale attuale della rendita A (k anni) e il valore attuale del riscatto S
- il costo dell'acquisto immediato attraverso una somma e delle rate costanti (altra rendita)

vi) Immobile : usufrutto/ nuda proprieta'
In alcuni casi e' possibile acquistare la nuda proprieta' di un bene (es. immobile) a costo C risparmiando un valore W rispetto all'acquisto completo.
Se si suppone che l'immobile sara' disponibile tra n anni (in alcuni casi n e' noto, in altri e' solo possibile stimarlo) il risparmio W equivale ad una rata R (n anni a tasso t).
Il confronto tra R, il possibile affitto dell'immobile, il possibile rendimento della somma impegnata (= C) da' indicazioni sulla complessiva convenienza dell'operazione.

<u>Rimborso di un capitale (cenno)</u>

Un caso di calcolo delle rendita e' quando si contrae un mutuo.
Un capitale C viene rimborsato in n periodi (anni o semestri) al tasso t .

Un altro modo di rimborso del debito potrebbe essere il pagamento per gli anni 1..n dell'interesse tC e il rimborso finale (anno n) del capitale C

Il pagamento complessivo risulta nR e poiche'

[$C = \sum_{i=1,n} (1+t)^{-i} R < \sum_{i=1,n} R(1+t)^{-1} = (nR)(1+t)^{-1}$
$(nR) > C(1+t)$]

e da conti precedenti $C > nR/(1+nt)$

$$C(1+t) < nR < C(1+nt)$$

6 RENDITE

Il pagamento risulta compreso tra quello previsto per la restituzione dopo un periodo e quello complessivamente previsto nel caso dei soli interessi con restituzione finale del capitale.

Dalla formula base

$C = (R/t)\ (1 - (1 + t)^{-n})$

$tC = R - R(1 + t)^{-n} < R$

La somma R e’ costante e corrisponde quindi ad un pagamento costante

$R = tC + E$ con $E = R(1 + t)^{-n}$

[Altra formula :

$$C = (R/t)\ (1 - (1 + t)^{-n}) = (R/t)\ ((1 + t)^{n} - 1)/(1 + t)^{n}$$

$$\Rightarrow$$

$$R = tC((1 + t)^{n}) / ((1 + t)^{n} - 1)$$

$$\Rightarrow$$

$$E = R(1 + t)^{-n} = (tC) / ((1 + t)^{n} - 1)$$]

Una somma S ,investito al tasso t, produce dopo k anni $S(1+t)^k$

La somma E e’ pagata ai tempi 1,..n e produce quindi (tasso t, tempo n)

$$(E) \quad \sum_{j=0,n-1} (1 + t)^{j}$$

$$=$$

$$(E/t)\ ((1 + t)^{n} - 1) \quad =$$

Sostituendo si ottiene

$$((1 + t)^{n} - 1)\ (R(1 + t)^{-n}) / t = (R/t)\ (1 - (1 + t)^{-n}) = C$$

Quindi la somma E , pagata oltre agli interessi, investita a tasso t, produrrebbe al tempo n il capitale da restituire.

Si puo’ immaginare l’importo versato in una banca che al tempo n lo restituisce al creditore.

Chi fa (implicitamente) da banca in realta’ e il creditore che incassa le somme R=tC+E

In casi normali una banca vera corrisponderebbe un tasso di interesse $s < t$

7 RENDITE

(chi contrae il mutuo e' piu' rischioso della banca) : risulta conveniente pagare R anziche' pagare solo tC , rinnovare il debito e risparmiare R-tC a meno che non si abbia la possibilita' di un investimento che renda piu' di t .

FUNZIONI EXCEL UTILI
{Notazione : C capitale, R rata, t tasso interesse n numero periodi
Segni : + ricevuto – pagato e quindi segno opposto per C e R }

1) Rata
= PMT(t,n,-C)

2) Capitale (valore attuale rendita)
= PV(t,n,-R)

3) Tasso interesse
= RATE(n,-R,C)

4) Numero periodi fissati capitale rata e tasso
= NPER(t,-R,C)
{ calcola la soluzione di equazione quindi valore non intero }

5) Valore futuro dei pagamenti periodici
= FV(t,n,-R)
[NB:
a) t puo' anche rappresentare un' altro tasso es : inflazione/reinvestimento ecc…
b) FV accetta n negativi e FV(t,-n,-R) da' il valore attuale di un flusso periodico (n periodi) corrispondenti a R {= PV(t,n,-R)}]

NOTA
Nelle versioni italiane di excel le varie funzioni si chiamano

PMT	RATA
PV	VA
RATE	TASSO
NPER	NUM.RATE
FV	VAL.FUT

8 RENDITE

Nel seguente schema sono indicate le soluzioni di alcuni problemi classici legati alle rendite RENDITE

Incognita	FORMULA	Funzione excel Segni : + ricevuto – pagato e quindi segno opposto per C e R
C (capitale attuale) C	C = $(R/t)* (1 - (1 + t)^{-n})$	= PV(t,n,-R) [in italiano VA]
R (rata)	R = $t C (1+t)^n / ((1+t)^n – 1)$	= PMT(t,n,-C) [in italiano RATA]
N (numero rate (minimo)	n > log (1/a) / log (1+t) a= 1 – t C / R	(soluzione dell' equazione e valore non intero) = NPER(t,-R,C) [in italiano NUM.RATE]
Tasso	(stima grossolana) (R/C -1/n) < t < R/C	(valore esatto) = RATE(n,-R,C) [in italiano TASSO]
CF capitale futuro (dopo n anni)	$C (1+t)^n$ $= (R/t)* ((1+t)^n -1)$	= FV(t,n,-R) [in itaIliano VAL.FUT]

R variabile

E' possibile che la rata R sia variabile. E' facile studiare i due casi

$$R_{k+1} = q\, R_k\ ,\ q>0 \qquad , \qquad R_{k+1} = R_k + s\ ,\ s>0$$

9 RENDITE

Caso $R_{k+1} = q\, R_k$

Nel caso si pone

$$R0 = R_1 / q \quad \Rightarrow \quad R_k = q^k\, R0$$

per cui

$$C = \sum_{i=1,n} R_i\, (1 + t)^{-i}$$

$$C = \sum_{i=1,n} (1 + t)^{-i}\, q^i\, R0 = \sum_{i=1,n} \gamma^i\, R0$$

[con $\gamma = q(1 + t)^{-1}$, $1/\gamma = (1 + t)/q$, $(1-\gamma) = 1 - q / (1 + t)^{-1}$
$= (1+t-q)/(1+t)$]

e

$$C = \sum_{i=1,n} \gamma^i\, R0 = \gamma \sum_{i=0,n-1} \gamma^i\, R0 = \gamma\, (1 - \gamma^n) / (1 - \gamma)\, R0$$

$$= (1 - q^n (1+t)^{-n})\ qR0/(1+t)\ (1+t)/(1+t-q)$$

$$= R_1/(1+t-q)\ (1 - q^n (1+t)^{-n})$$

Caso $R_{k+1} = R_k + s$

si ha

$$C = \sum_{i=1,n} R_i\, (1 + t)^{-i}$$

[$= R_1 (1 + t)^{-1} + R_2 (1 + t)^{-2} + \ldots + R_{n-1} (1 + t)^{-(n-1)} + R_n (1 + t)^{-n}$
$= R_1 (1 + t)^{-1} + (R_1 + s) (1 + t)^{-2} + \ldots + (R_1 + (n-1)s) (1 + t)^{-n}$]

$$C(1+t) = \sum_{i=1,n} R_i\, (1 + t)^{-i+1}$$

[$= R_1 + R_2 (1 + t)^{-1} + R_3 (1 + t)^{-2} + \ldots$
$\ldots + R_{n-1} (1 + t)^{-(n-2)}, + R_n (1 + t)^{-(n-1)}$
$= R_1 + (R_1 + s) (1 + t)^{-1} + \ldots + (R_1 + (n-1)s) (1 + t)^{-n-1}$]

e

$$tC = C(1+t)-C = R_1 + s \sum_{i=1,n-1} (1+t)^{-i} - R_n (1+t)^{-n}$$

[$R_n = R_1 + (n-1)s = R_1 + ns - s$; $-R_n = -R_1 - ns + s$]

$$tC = R_1 + s \sum_{i=1,n} (1+t)^{-i} - R_1 (1+t)^{-n} - ns (1+t)^{-n}$$

$$Ct = (R+s/t + ns)(1-(1+t)^{-n}) - ns$$

$$C = (R+s/t + ns) (1/t) (1-(1+t)^{-n}) - ns/t$$

Nella tabella sono riassunte le formule principali relative al capitale equivalente ad una rendita (costante o variabile)

Standard :rata costante (n anni)	$C = (R/t)(1 - (1+t)^{-n})$
Numero rate infinito	$C = R/t$
Rata crescente $R_{k+1} = R_k + s$	$C =$ $(R+s/t + ns) (1/t) * (1-(1+t)^{-n}) - ns/t$
Rata non costante $R_{k+1} = q R_k$ $R_k = q^k R0$	$C = R_1/(1+t-q) (1- q^n(1+t)^{-n})$

***