1 COMLEMENTI SWAP

A) Formule swap

Scambio periodico (tempi 1,..,n) di tasso fisso τ (tasso swap) contro tasso variabile, noto per la prima scadenza, ignoto scadenze successive, tv_i calcolati ambedue rispetto a un nozionale (= C). Scambio τ C contro tv_i C

Noti i fattori di sconto γ_i [corrispondenti/equivalenti ai valori = $(1+t)^{-i}$ = $(1+ t_i)^{-i}$ dove t_i e' il tasso (annuale) a i anni]

Due flussi
- pagamento del variabile -FV e' legato al flusso FA :
 prestito di C ,
 restituzione al termine di (1+tasso variabile)*C , seguita da nuovo prestito ecc

 valore iniziale FA = C (prestito)
 FA comprende anche $-\gamma_n C$ (ultima restituzione C)
$C- FV - \gamma_n C=0$
Valore complessivo del flusso FV (variabile) e' $C - \gamma_n C$

 pagamento tasso fisso FF = rendita di (τC)
valore del flusso FF (correttamento scontato) e' $\Sigma_{i=1,n}\ \gamma_i (\tau C)$

I due flussi hanno lo stesso valore
se FF=FV ovvero

$$C - \gamma_n C = \Sigma_{i=1,n}\ \gamma_i (\tau C)$$

La condizione (indipendente da C) e'

$$(1- \gamma_n) = \tau\, \Sigma_{i=1,n}\ \gamma_i$$

La condizione origina l'equazione $1 - \tau\Sigma_{i=1,n-1}\ \gamma_i = (1+\tau)\gamma_n$

da cui $\gamma_n = (1+ t_n)^{-n} = (1 -\tau\, \Sigma_{i=1,n-1}\ \gamma_i) / (1+\tau)$ con t_n tasso a n (anni)

Noti i fattori di sconto γ_i per le varie scadenze, i=1,...,n-1, la conoscenza del tasso swap (scadenza n) τ permette di calcolare il fattore di sconto γ_n.

Quindi la conoscenza dei tassi swap per tutte le scadenze 1,...,n permette di ricavare facilmente la curva tassi.

B) Curva tassi e tassi swap

Dalla formula (solita)

$$(1-x^n) = (1-x)\,(\Sigma_{i=0,n-1} x^i) = ((1-x)/x)\,(\Sigma_{i=1,n} x^i)$$

con t_n tasso a n anni, $x = (1+t_n)^{-1}$, $x^n = \gamma_n$

si ha

$$(1-\gamma_n) = t_n \Sigma_{i=1,n} \gamma_i(t_n)$$

[dove $\gamma_i(t) = (1+t)^{-i}$ indica il fattore di sconto a i anni calcolato con il tasso t]

$$t_n \Sigma_{i=1,n} \gamma_i(t_n) = \tau \Sigma_{i=1,n} \gamma_i$$

$$t_n / \tau = (\Sigma_{i=1,n} \gamma_i) / (\Sigma_{i=1,n} \gamma_i(t_n))$$

Se $\forall$ i $\gamma_i = (1+t)^{-i}$ allora anche $t_n = t$ e $\tau = t_n = t$

Se $t \le s$ allora $\forall$ i $(1+t)^i \le (1+s)^i$ e $\gamma_i(t) = (1+t)^{-i} \ge (1+s)^{-i} = \gamma_i(s)$.

Se la curva tassi e' non decrescente allora $\forall$ i $< n$ $t_i \le t_n$ e $\gamma_i \ge \gamma_i(t_n)$

Allora

$$t_n / \tau = (\Sigma_{i=1,n} \gamma_i) / (\Sigma_{i=1,n} \gamma_i(t_n)) \ge 1$$

e $t_n \ge \tau$.

Il tasso swap si puo' calcolare per qualsiasi scadenza.
Se la curva tassi e' non decrescente anche la curva dei tassi swap lo e'.
DIM

E' sufficiente dimostrare che $\tau_n \ge \tau_{n-1}$ [τ_k indica il tasso swap per il tempo k] ,
Per la monotonia dei t_i necessariamente $t_n \ge t_{n-1}$ e $t_n \ge \tau_n$
Allora

$$(1+t_n)^n \ge (1+t_n)^{n-1}(1+\tau_n) \ge (1+t_{n-1})^{n-1}(1+\tau_n)$$

e

$$\Leftrightarrow (1/\gamma_n) \ge (1/\gamma_{n-1})(1+\tau_n) \Leftrightarrow \gamma_{n-1} \ge \gamma_n(1+\tau_n) \Leftrightarrow 1-\gamma_n-\gamma_n\tau_n \ge 1-\gamma_{n-1}$$

Dalle formule

$$(1-\gamma_n)-\gamma_n\tau_n = \tau_n \Sigma_{i=1,n} \gamma_i - \gamma_n\tau_n = \tau_n \Sigma_{i=1,n-1} \gamma_i$$

$$1-\gamma_{n-1} = \tau_{n-1} \Sigma_{i=1,n-1} \gamma_i$$

ovvero

$$\tau_n \Sigma_{i=1,n-1} \gamma_i \ge \tau_{n-1} \Sigma_{i=1,n-1} \gamma_i$$

e quindi $\tau_n \ge \tau_{n-1}$.

QED

N.B Se la curva tassi cresce asintoticamente verso un tasso limite t* anche il tasso swap cresce verso t*

3 COMLEMENTI SWAP

C) Legami Bond tasso swap

Bond, capitale C, rata R (=sC) e rimborso (=C) a scadenza , W valore (prezzo)

$$W = \Sigma_{i=1,n} \gamma_i R + \gamma_n C$$

[e Da $(1-\gamma_n) = \tau\Sigma_{i=1,n} \gamma_i$]

$$W = R \ (\tau)^{-1}(1-\gamma_n) + \gamma_n C = C (s/\tau) + \gamma_n C (1-(s/\tau))$$

Se W = C+E si ha

$$C + E = C (s/\tau) (1-\gamma_n) + \gamma_n C$$

e

$$C(1-\gamma_n) + E = C (s/\tau)(1-\gamma_n)$$

Se s =τ (swap) il valore e' C . Viceversa noti τ e γ_n

$$E /C = (s/\tau-1) (1-\gamma_n)$$

e

$$E = (s/\tau-1) (1-\gamma_n) C$$

e $E > 0 \Leftrightarrow s > \tau$

[= aumento % prezzo (rispetto al rimborso) legato all'aumento % del tasso (periodico) rispetto al tasso swap. Quest'analisi considera i fattori di sconto (senza rischio). Se il prezzo ingloba un premio al rischio il risultato e' diverso (prezzo minore)]

Se la curva tassi e' crescente si ha $1-\gamma_n > (1-(1+\tau)^{-n})$

$$E /C = (s/\tau-1) (1-\gamma_n) > (s/\tau-1) (1-(1+\tau)^{-n})$$

$$E > (s-\tau)C /\tau (1-(1+\tau)^{-n})$$

E > Valore attuale (a tasso τ) di una rendita di $(s-\tau) C$ per n anni

D) Rendite e tasso swap (esempio classico : mutuo a tasso fisso)

Il valore attuale corretto (Capitale) legato ad una rendita R (n anni) e'

$C= \Sigma_{i=1,n} \gamma_i R$

La rendita (equa) corrispondente a C dovrebbe essere

$R = C \ (\Sigma_{i=1,n} \gamma_i)^{-1} = C \tau / (1-\gamma_n)$

[Dalle formule Da $(1-\gamma_n) = \tau\Sigma_{i=1,n} \gamma_i$] e $(1-\gamma_n) = t_n \ \Sigma_{i=1,n} \gamma_i(t_n)$

$C t_n / (1-\gamma_n) = R(t_n)$ e' la rendita equivalente (tasso t_n)

$C \tau / (1-\gamma_n(\tau)) = R(\tau)$ e' la rendita equivalente (tasso τ)

$R = R(\tau) \ (1-\gamma_n(\tau)) / (1-\gamma_n) = R(t_n) (\tau / t_n)$

La rendita R corrisponde ad un tasso senza rischi. Abitualmente viene invece applicato il tasso swap (e $R(\tau)$). La rendita risulta maggiorata (ovvero il capitale e' diminuito). La differenza puo' considerata in vari modi (comoda approssimazione, premio al rischio, rimborso spese, piccolo raggiro ecc…). Comunque se la curva tassi e' asintoticamente crescente $R \leq R(\tau) \leq R(t_n) = (t_n / \tau)R$ e per n elevati R prossimo a $R(\tau)$.