

## 1 TIR/IRR

Esistenza del TIR (unico ecc...)

Operazioni ai tempi  $0, \dots, n$  rappresentate da un vettore di dimensione  $n+1$   
Ogni componente  $a_i$  rappresenta i pagamenti (se  $<0$ ) o gli incassi (se  $>0$ )  
relativi all'operazione. Si suppone almeno  $a_0 \neq 0$  e  $a_n \neq 0$ .

Se e' possibile attualizzare tutto allo stesso tasso  $t$  si avra'

$$0 = a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}$$

ovvero (supponendo pagamenti  $b_i$ , tra cui almeno un primo (unico ?) pagamento  $b_0$   
e incassi  $r_i$ ) l'equazione

$$b_0 + \sum_{i=1, n} b_i (1+t)^{-i} = \sum_{i=1, n} r_i (1+t)^{-i}$$

Viceversa stabilito il flusso dei pagamenti/incassi se esiste un unico tasso  $t$  per cui

$$0 = a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}$$

$t$  e' detto tasso interno di rendimento (TIR) [ in inglese IRR Internal Revenue Rate]

Il tasso  $t$  ha senso se  $1+t > 0$  ( $t > -1$ ) e corrisponde ad un guadagno se  $1+t > 1$   
( $t > 0$ ) Cercare il TIR corrisponde a calcolare l'unica soluzione positiva dell'equazione  
polinomiale

$$P(x) = \sum_{i=0, n} a_i x^{n-i} = \sum_{i=0, n} a_i (1+t)^{n-i} = 0$$

Nota la soluzione positiva  $x$  si ha che  $x = 1+t$  e si ricava  $t = x-1$

Non a tutti i possibili flussi pagamenti/incassi corrisponde un TIR  
(solo se  $P$  polinomio in  $x$  ha un'unica radice positiva  $x^*$ )

### Condizione di Soper

Per calcolare IRR/TIR si cerca  $t$  che verifichi

$$0 = a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}$$

Ad ogni tasso  $t$  di attualizzazione si possono calcolare le quantità  $S_k(t)$  (SALDI)  
come

$$S_0(t) = a_0$$

$$S_1(t) = (1+t)a_0 + a_1 = (1+t) S_0(t) + a_1$$

$$\dots$$
$$S_k(t) = (1+t) S_{k-1}(t) + a_k$$

La quantità  $S_k(t)$  verificano (induzione)

$$S_k(t) = \sum_{i=0, k} a_i (1+t)^{k-i}$$

e indicano il saldo al tempo  $k$  e tasso  $t$ .

## 2 TIR/IRR

Il tasso  $t$  e' il TIR/IRR se e' l'unico tasso che verifica

$$S_n(t) = \sum_{i=0, n} a_i (1+t)^{n-i} = (1+t)^n (a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}) = 0$$

I valori e le quantita' sono legate da relazioni

$$S_0(t) = a_0$$

$$S_k(t) = (1+t) S_{k-1}(t) + a_k \Leftrightarrow -a_k = (1+t) S_{k-1}(t) - S_k(t)$$

I vettori  $S \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $S = [S_0, S_1, \dots, S_{n-1}]$ ,  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  sono legati da

$$(-a) = M_t S$$

dove  $M_t$  e' la matrice (dimensione  $n$ ) del tipo (struttura)

$$\begin{matrix} 1+t & -1 & & & \\ & 1+t & -1 & & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \dots & -1 \\ & & & & 1+t \end{matrix}$$

La cui inversa  $(M_t)^{-1}$  e' (verifica immediata)

$$\begin{matrix} (1+t)^{-1} & (1+t)^{-2} & (1+t)^{-3} & \dots & (1+t)^{-n} \\ & (1+t)^{-1} & (1+t)^{-2} & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & (1+t)^{-2} \\ & & & & (1+t)^{-1} \end{matrix}$$

L'inversa e' definita se  $t > -1$ .

Se si indica con  $F$  la matrice

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & \dots \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{matrix}$$

allora  $M_t = (1+t)I - F$

### 3 TIR/IRR

Se  $t$  è TIR/IRR verifica le relazioni

$$S_0 = a_0$$

$$-a = M_t S$$

Le condizione ulteriore  $S_n = 0 = (1+t) S_{n-1} + a_n$  deriva dall'ultima riga della matrice

Si può supporre che  $a_0 < 0$  e quindi  $S_0 < 0$

Un tasso  $t$  che verifica le relazioni allora è un IRR/TIR se è l'unico tasso che soddisfa le varie condizioni.

Condizione sufficiente (SOPER)

Se per un tasso  $t$  si ha  $S_n = 0$  e i rimanenti saldi hanno tutti lo stesso segno

allora  $t$  è un TIR/IRR

Dim

( Si deve dimostrare che non è possibile eseguire conti con un tasso diverso  $x$  e ottenere  $S_n(x) = 0$  )

Se esiste un tasso  $x$  ( $x \neq t$ ) che verifica le equazioni allora  $x$  genera un vettore di saldi  $SX$  e

$$(-a) = M_t S = M_x SX$$

Siccome  $M_t = ((1+t)I - F)$ ,  $M_x = ((1+x)I - F)$

$$(-a) = ((1+t)I - F) S = ((1+x)I - F) SX$$

ovvero

$$(I - F) (S - SX) = x SX - t S = x(SX - S) + (x-t) S$$

$$((1+x)I - F)(S - SX) = M_x(S - SX) = (x-t) S$$

$$(S - SX) = (x-t) (M_x)^{-1} S$$

La matrice inversa  $(M_x)^{-1}$  è triangolare superiore con elementi  $> 0$  ( come  $(M_t)^{-1}$  )

e quindi se  $S$  ha componenti tutte dello stesso segno ( p.e.  $< 0$  se  $a_0 < 0$  ) allora si

avrebbe

$$S > SX \text{ se } x < t$$

$$S < SX \text{ se } x > t$$

$$\text{Ma } S_0 = SX_0, S_1 = (1+t) S_0 + a_1, SX_1 = (1+x) SX_0 + a_1$$

$$\text{e } S_1 - SX_1 = (t-x) S_0$$

$$\text{e } S_1 > SX_1 \text{ se } t < x$$

QED

#### 4 TIR/IRR

Se si deve calcolare il TIR/IRR si può calcolare senza ulteriori condizioni una soluzione  $t^*$  di

$$0 = a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}$$

Il controllo sul segno costante dei valori  $S_k(t^*)$  garantisce che  $t^*$  è un TIR/IRR.

Un caso in cui la condizione di Soper è sicuramente verificata ( $\Rightarrow$  non occorre il controllo esplicito dei valori  $S_k(t^*)$ ) è il seguente

ESEMPIO (condizione di Lutz)

Se nel vettore si ha  $a_i < 0$  per  $i=0, \dots, k$  e  $a_i > 0$  per  $i > k$

allora esiste TIR/IRR

Se esiste un TIR/IRR esiste un tasso  $t$  per cui

$$0 = a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}$$

La condizione equivale all'equazione polinomiale (con  $x=1+t$ )

$$P(x) = \sum_{i=0, n} a_i x^{-i}$$

e allora  $P(0) = a_n > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$  ed esiste almeno un punto  $x^* > 0$  per cui  $P(x^*) = 0$ .

In corrispondenza di  $x^*$  si considera il tasso  $t = x^* - 1$ .

Per  $j=0, \dots, k$  ( $\Rightarrow a_j < 0$ ) i saldi  $S_j(t) = \sum_{i=0, j} a_i (1+t)^{j-i}$  sono negativi.

Per  $n > j > k$  vale

$$a_0 + \sum_{i=1, j} a_i (1+t)^{-i} < a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i} = 0$$

I vari saldi  $S_j(t) = (1+t)^j *$  (Valore attuale) sono ancora negativi e la condizione di Soper è verificata.

La condizione precedente comprende i due casi (importanti)

- 1) Unico pagamento iniziale e successivamente solo incassi
- 2) Fino ad un tempo  $k$  solo pagamenti e successivamente solo incassi.

Per il caso 1 comunque un facile conto dimostra che la funzione

$$\psi(t) = a_0 + \sum_{i=1, n} a_i (1+t)^{-i}$$

verifica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = a_0 < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -1} \psi(t) = +\infty$

$[\psi(t)]' < 0$  se  $(1+t) > 0$  e possiede un TIR/IRR.

## 5 TIR/IRR

Nel caso2 l'esistenza di un TIR/IRR si ottiene anche considerando direttamente l'equazione polinomiale. Un teorema (di Lagrange) garantisce l'esistenza di un'unica radice positiva in presenza di una sola variazione di segno nei coefficienti.

N.B.

Ci sono anche dei casi in cui esiste il TIR/IRR ma la condizione dei segni costanti di  $S_k(t)$  non e' verificata.

Ci sono altre condizioni (basate sui polinomi e espresse sui coefficienti  $a_i$ ) che assicurano

che l'equazione polinomiale  $P(x) = \sum_{i=0,n} a_i x^{n-i}$

ha una sola radice positiva. Alcune di queste condizioni sono indipendenti dalla condizione di Soper ma non hanno una chiara interpretazione finanziaria .

Esiste anche una tecnica (sequenza di Sturm) per determinare il numero di radici di un polinomio in un intervallo

### CALCOLO DEL TIR/ IRR

Per l'eventuale calcolo si possono utilizzare metodi numerici a seconda delle informazioni disponibili.( Es: bisezione, punto fisso[se si puo' scrivere  $t = \Phi(t)$ ], metodo di Newton [se e' nota la derivata], secate ecc...)

Esempio di punto fisso: il tasso (=TIR) della rendita si ottiene dall'iterazione  $t = (R/C) (1 - (1+t)^{-n}) = \Phi(t)$

Metodo di Newton : si risolve un'equazione  $\Phi(x) = 0$  con la linearizzazione  $\Phi(x+h) \approx \Phi(x) + h [\Phi(x)]'$  e il passo iterativo  $x_{k+1} (= x+h) = x - \Phi(x)/[\Phi(x)]'$

Metodo della secante comodo per il TIR (non necessarie le derivate) se non e' noto  $[\Phi(x)]'$  ma si hanno i punti  $\{ x_{k-1}, x_k \}$  si approssima  $[\Phi(x)]'$  con  $(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})) / (x_k - x_{k-1})$  e si ottiene il metodo della secante  $x_{k+1} = x_k - \Phi(x_k) (x_k - x_{k-1}) / (\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1}))$

### USO DI EXCEL

funzione IRR

argomento di IRR puo' essere

intervallo es IRR( A1:A10) e

un vettore specificato es IRR({-10000,5000,6000})

un ulteriore argomento puo essere un tasso t0 che si suppone prossimo alla soluzione ( excel applica un metodo iterativo) es IRR( A1:A10,1%)