1 TIR/IRR

Esistenza del TIR (unico ecc…)

Operazioni ai tempi 0,….n rappresentate da un vettore di dimensione n+1
Ogni componente a_i rappresenta i pagamenti (se <0) o gli incassi (se >0) relativi all'operazione. Si suppone almeno $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$.
Se e' possibile attualizzare tutto allo stesso tasso t si avra'

$$0 = a_0 + \Sigma_{i=1,n} \; a_i (1+t)^{-i}$$

ovvero (supponendo pagamenti b_i , tra cui almeno un primo (unico ?) pagamento b_0 e incassi r_i l'equazione

$$b_0 + \Sigma_{i=1,n} \; b_i (1+t)^{-i} = \Sigma_{i=1,n} \; r_i (1+t)^{-i}$$

Viceversa stabilito il flusso dei pagamenti/incassi se esiste un unico tasso t per cui

$$0 = a_0 + \Sigma_{i=1,n} \; a_i (1+t)^{-i}$$

t e' detto tasso interno di rendimento (TIR) [in inglese IRR Internal Revenue Rate]

Il tasso t ha senso se 1+t >0 (t > -1) e corrisponde ad un guadagno se 1+t >1 (t>0) Cercare il TIR corrisponde a calcolare l'unica soluzione positiva dell'equazione polinomiale

$$P(x) = \Sigma_{i=0,n} \; a_i x^{n-i} = \Sigma_{i=0,n} \; a_i (1+t)^{n-i} = 0$$

Nota la soluzione positiva x si ha che x = 1+t e si ricava t = x-1
Non a tutti i possibili flussi pagamenti/incassi corrisponde un TIR
(solo se P polinomio in x ha un'unica radice positiva x*)

Ad ogni tasso t di attualizzazione si possono calcolare le quantità $S_k(t)$ (SALDI) come

$$S_0(t) = a_0$$

$$S_1(t) = (1+t)a_0 + a_1 = (1+t)\, S_0(t) + a_1$$

$$\ldots$$

$$S_k(t) = (1+t)\, S_{k-1}(t) + a_k$$

La quantita' $S_k(t)$ verificano (induzione)

$$S_k(t) = \Sigma_{i=0,k} \; a_i (1+t)^{k-i}$$

e indicano il saldo al tempo k e tasso t.

Il flusso dei pagamenti previsti ha al tasso t valore attuale

$$\psi(t) = a_0 + \Sigma_{i=1,n} \; a_i (1+t)^{-i}$$

2 TIR/IRR

I pagamenti (dovuti o ricevuti) fino al momento k hanno valore attuale

$$a_0 + \sum_{i=1,k} a_i (1+t)^{-i}$$

Al tasso t il valore ottenuto dal flusso maturato fino all'istante k e'

$$((1+t)^k) (a_0 + \sum_{i=1,k} a_i (1+t)^{-i}) = \sum_{i=0,k} a_i (1+t)^{k-i}$$

da cui il nome di saldo per la quantita'

$$S_k (t) = \sum_{i=0,k} a_i (1+t)^{k-i}$$

Il tasso t e' il TIR/IRR se e' l'unico tasso che verifica

$$S_n (t) = \sum_{i=0,n} a_i (1+t)^{n-i} = (1+t)^n (a_0 + \sum_{i=1,n} a_i (1+t)^{-i}) = 0$$

I valori S_k e le quantità a_k sono legate dalle relazioni

$$S_0(t) = a_0$$

$$S_k(t) = (1+t) S_{k-1}(t) + a_k \Leftrightarrow a_k = S_k(t) - (1+t) S_{k-1}(t)$$

I vettori $S \in R^{n+1}$, $S = [S_0, S_1,\dots, S_n]$, $a \in R^{n+1}$, $a = [a_0,a_1, a_2\dots, a_n]$ sono legati da

$$a = M_t S$$

dove M_t e' la matrice (dimensione n+1) del tipo (struttura)

$$\begin{matrix} 1 & & & & \\ -(1+t) & 1 & & & \\ & -(1+t) & 1 & & \\ & & -(1+t) & \dots & \\ & & & 1 & \\ & & & -(1+t) & 1 \end{matrix}$$

3 TIR/IRR

In particolare M_t e’ una matrice del tipo

1	0	0	0	0
-~	**1**	0	0	0
0	**-~**	**1**		0
	0	**-~**		0
		0	0	
0			**1**	0
0	0		**-~**	**1**

con $\alpha = (1+t)^{-1}$.
L’inversa $(M_t)^{-1}$ ha formula (struttura)

1				
α	1			
α^2	α	1		
α^3	α^2	α		
…	…	…		
α^{n-1}	….	…	1	
α^n	α^{n-1}	…..	α	1

La verifica di $I = M_t (M_t)^{-1}$ e’ immediata.
La matrice$(M_t)^{-1}$ e’ definita e ha elementi non negativi se $t > -1$
Se si indica con F la matrice

0		0	…	0
1	0	0		…
	1	0	…	0
		1	0	0
0			1	0

allora per ogni t

$$M_t = I - (1+t) F$$

Se t e’ TIR /IRR verifica le relazioni $a = M_t S$
e la ulteriore condizione $S_n = 0$.

Un tasso t che verifica le relazioni è un IRR/TIR se e’l’unico tasso che soddisfa le varie condizioni

4 TIR/IRR

Condizione sufficiente (SOPER)

Se per un tasso t si ha $S_n = 0$ e i rimanenti saldi (tutti $\neq 0$) hanno tutti lo stesso segno allora t e' un TIR/IRR

[N.b. la condizione sui saldi indica che se l'operazione inizia con $a_0 < 0$ (pagamento e quindi credito) resta sempre con un saldo negativo (ancora un credito) fino all'ultimo valore a_n che la chiude] .

Dim
(Si deve dimostrare che non e' possibile eseguire conti con un tasso diverso x e ottenere $S_n(x) = 0$)

Se esiste un tasso x ($x \neq t$) che verifica le equazioni allora x genera un vettore di saldi SX e

$$a = M_t S = M_X SX$$

con

$$M_t = (I - (1+t)F) \quad , \quad M_X = (I - (1+x)F)$$

Poiche '

$$M_t = (I - (1+t)F) = (I - (1+x)F) + (x-t)F = M_X + (x-t) F$$

da

$$M_t S = M_X SX$$

segue

$$(M_X + (x-t) F) S = M_X SX$$

ovvero

$$(M_X) (S-SX) = (t-x) (F) S$$

e

$$(S - SX) = (t-x) (M_X)^{-1} (F) S$$

La matrice inversa $(M_X)^{-1}$ è triangolare inferiore con elementi ≥ 0 ,la matrice F ha elementi ≥ 0, il vettore S ha elementi di segno costante, t-x e' uno scalare.
Di conseguenza anche gli elementi non zero del vettore (S-SX) hanno lo stesso segno.

Ma da $S_0 = a_0 = SX_0$,

$$S_1 = (1+t) S_0 + a_1 = (1+t) a_0 + a_1 ,$$

$$SX_1 = (1+x) SX_0 + a_1 = (1+x) a_0 + a_1$$

e

$$S_1 - SX_1 = (t-x)\ a_0$$

Invece da

$$S_n = 0 = (1+t)\ S_{n-1} + a_n$$

si ha

$$S_{n-1} = - a_n / (1+t)$$

Dalle ipotesi su S $S_{n-1} \neq 0$ ($\Leftrightarrow a_n \neq 0$)

Analogamente da

$$SX_n = 0 = (1+x)\ SX_{n-1} + a_n$$

segue

$$SX_{n-1} = - a_n / (1+x)$$

$$S_{n-1} - SX_{n-1} = - a_n /(1+t) + a_n /(1+x)$$

$$S_{n-1} - SX_{n-1} = (1+t)^{-1} (1+x)^{-1} (-a_n) (x - t)$$

Ma

$$\mathrm{sgn}(S_0) = \mathrm{sgn}(a_0) = \mathrm{sgn}(S_{n-1}) = \mathrm{sgn} (-a_n)$$

Ma

$$\mathrm{sgn} (S_1 - SX_1) = \mathrm{sgn} (t - x) \ \mathrm{sgn} (a_0)$$

$$\mathrm{sgn} (S_{n-1} - SX_{n-1}) = \mathrm{sgn} (x - t) \ \mathrm{sgn} (-a_n)$$

e le quantita' $(S_1 - SX_1)$ e $(S_{n-1} - SX_{n-1})$ avrebbero segno opposto

QED

Se si deve calcolare il TIR/IRR si puo' calcolare senza ultreriori condizioni una soluzione t* di

$$0 = a_0 + \sum_{i=1,n} a_i (1+t)^{-i}$$

Il controllo sul segno costante dei valori $S_k (t^*)$ garantisce che t* e' un TIR/IRR.

Un caso in cui la condizione di Soper e' sicuramente verificata ($\Rightarrow$non occorre il controllo esplicito dei valori $S_k (t^*)$) e' il seguente

ESEMPIO (condizione di Lutz)

Se nel vettore si ha $a_i < 0$ per i=0,....,k e $a_i > 0$ per i>k

allora esiste TIR/IRR

6 TIR/IRR

Se esiste un TIR/IRR esiste un tasso t per cui

$$0 = a_0 + \Sigma_{i=1,n} \ a_i (1+t)^{-i}$$

La condizione equivale all'equazione polinomiale (con x=1+t)

$$P(x) = \Sigma_{i=0,n} \ a_i \, x^{\,n-i}$$

e allora $P(0) = a_n > 0$, $\lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty$ ed esiste almeno un punto $x^* > 0$ per cui $P(x^*) = 0$.
In corrispondenza di x^* si considera il tasso $t = x^* - 1$.
Per j = 0,.., k ($\Rightarrow a_i < 0$) i saldi

$$S_j (t) = \Sigma_{i=0,j} \ a_i (1+t)^{\,j-i}$$

sono negativi.
Per n > j > k vale

$$a_0 + \Sigma_{i=1,j} \ a_i (1+t)^{-i} < a_0 + \Sigma_{i=1,n} \ a_i (1+t)^{-i} = 0$$

I vari saldi $S_j (t) = (1+t)^{\,j} *$ (Valore attuale) sono ancora negativi
e la condizione di Soper e' verificata.

La condizione precedente comprende i due casi (importanti)
1) Unico pagamento iniziale e successivamente solo incassi
2) Fino ad un tempo k solo pagamenti e successivamente
solo incassi.

Per il caso 1 comunque un facile conto dimostra che la funzione

$$\psi (t) = a_0 + \Sigma_{i=1,n} \ a_i (1+t)^{-i}$$

verifica $\lim_{t \to \infty} \psi (t) = a_0 < 0$, $\lim_{t \to -1} \psi (t) = +\infty$
$[\psi (t)]' < 0$ se $(1+t) > 0$ e possiede un TIR/IRR .

Nel caso2 l'esistenza di un TIR/IRR si ottiene anche considerando direttamente l'equazione polinomiale. Un teorema (di Lagrange) garantisce l'esistenza di un'unica radice positiva in presenza di una sola variazione di segno nei coefficienti.

N.B.
Ci sono anche dei casi in cui esiste il TIR/IRR ma la condizione dei segni costanti di $S_k(t)$ non e' verificata.

7 TIR/IRR

Ci sono altre condizioni (basate sui polinomi e espresse sui coefficenti a_i) che assicurano che l'equazione polinomiale $P(x) = \sum_{i=0,n} a_i x^{n-i}$
ha una sola radice positiva. Alcune di queste condizioni sono independenti dalla condizione di Soper ma non hanno una chiara interpretazione finanziaria .
Esiste anche una tecnica (sequenza di Sturm) per determinare il numero di radici di un polinomio in un intervallo

CALCOLO DEL TIR/ IRR
Per l'eventuale calcolo si possono utilizzare metodi numerici a seconda delle informazioni disponibili.(Es: bisezione, punto fisso[se si puo' scrivere $t = \Phi(t)$] , metodo di Newton [se e' nota la derivata] , secate ecc…)

Esempio di punto fisso: il tasso (=TIR) della rendita si ottiene dall'iterazione
$t= (R/C) (1-(1+t)^{-n}) = \Phi(t)$

<u>Metodo di Newton</u> : si risolve un'equazione $\Phi(x) = 0$ con la linearizzazione
$\Phi(x+h) \approx \Phi(x)+ h [\Phi(x)]'$ e il passo iterativo $x+ (= x+h)) = x - \Phi(x)/[\Phi(x)]'$

<u>Metodo della secante</u> comodo per il TIR (non necessarie le derivate)
se non e' noto $[\Phi(x)]'$ ma si hanno i punti $\{ x_{k-1}, x_k \}$ si approssima $[\Phi(x)]'$
con $(\Phi(x_k)- \Phi(x_{k-1})) /(x_k- x_{k-1})$ e si ottiene il metodo della secante
$x_{k+1} = x_k - \Phi(x_k) (x_k- x_{k-1})/(\Phi(x_k)- \Phi(x_{k-1}))$

USO DI EXCEL

funzione IRR
argomento di IRR puo' essere
intervallo es IRR(A1:A10) e
un vettore specificato es IRR({-10000,5000,6000})
un ulteriore argomento puo essere un tasso t0 che si suppone prossimo alla soluzione
(excel applica un metodo iterativo) es IRR(A1:A10,1%)