1 UTILITA'

Utilità $U(x) : X \to R$

Modello di scelta "soggettiva" dato dalla funzione U(x)
U puo' essere definita per $X \subset R^k$
U puo' confrontare/pesare piu' obbiettivi [rischio rendimento ecc..]

$U(x)>U(y) \Rightarrow x$ piu' utile (preferito/preferibile) a y

Se U: X ($\subset$ R) $\to$ R allora si puo' supporre crescente
{ x " denaro" }

Se e' solo possibile attivo $U : [0,+\infty] \to R$

Se x e y eventi con probabiltà p e (1-p)
Utilità attesa e' $pU(x) +(1-p)U(y)$
Se x e y guadagni/somme ha senso definire $z = px+(1-p)y$
Meglio z "sicuro" oppure x o y con probabilita' p ,1-p ?

Preferire z sicuro $\Rightarrow$ (utilita') $U(z) = U(px+(1-p)y) > pU(x) +(1-p)U(y)$
$\Rightarrow$ (se vale per ogni coppia x, y e per ogni probabilità (vera o attribuita) p $0<p<1$)
funzione U concava

Se "avversione al rischio" preferenza per z sicuro $\Leftrightarrow$ U concava

Se U crescente , $x<y$ si ha che $x<z<y$ e esiste z* , $x<z^*<z$ per cui
$U(z) > U(z^*) = pU(x) +(1-p)U(y)$
z* e' detto equivalente certo del valore (atteso) $p x+(1-p) y$ (=z).

Misura avversione al rischio (distanza/differenza tra andamento di U e retta)
$c(x) = - U^{(2)}(x)/U^{(1)}(x)$
(per concavità $U^{(2)}(x)< 0$, se U crescente $U^{(1)}(x)> 0$) e rapporto >0
$U^{(1)}(x+h) \approx U^{(1)}(x) + h\, U^{(2)}(x) = U^{(1)}(x) (1+h\, U^{(2)}(x)/U^{(1)}(x)) = U^{(1)}(x) (1+c(x)h)$

Possibili funzioni utilità

ln(x) [avversione al rischio $- U^{(2)}/U^{(1)} = 1/x$]

-exp(-ax) [$U^{(1)} = a \exp(-ax)$ $U^{(2)} = -a^2 \exp(-ax)$, avv. rischio = a]

$x-(a/2) x^2$ = [$U^{(1)} = 1-ax$ $U^{(2)} = - a$, avv. rischio = $a/(1-ax)$]
(funzione interessante (=crescente + positiva) se $0 <x < 1/a$]

La funzione -exp(-ax) si presta all'uso se interessa valutare/classificare preliminarmente l'avversione al rischio (esempio intervista)

2 UTILITA’

Esempio :
Dato un capitale C e’ possibile investire in un attivita’ rischiosa
una quota r ($r<1$) di C.
L’attivita’ rischiosa rende con probabilita’ p meta del valore investito e con
probabilita’ (1-p) 1.2 di quanto investito

I due stati finali possibili sono
$S1= (1-r)C + rC/2 = (1-r/2)C$ (probabilita’ p)
$S2= (1-r)C + 1.2(rC) = C+0.2 r C$ (probabilita’ 1-p)

Se
$U0= p\, U((1-r/2)C) +(1-p)\, U(C+0.2 r C)$
(valore atteso dell’utilita’ al termina dell’operazione)

Esiste un valore X (equivalente certo) per cui
$U(X) = U0$

Senza investire il capitale resta C
Se $X <C$
$U(X)= U0 <U(C)$
(valore atteso utilita’ minore dell’utilita’ senza investimento)

Se $X > C$
$U(C)< U(X) =U0$
valore atteso dell’utilita’ maggiore dell’utilita’ senza investimento

Se l’utilita’ e’
$U= -\exp(-ax)$
se si vuole confrontare quantita’ positive si usa la funzione
$1-\exp(-ax)$.
Quello che realmente importa sono i rapporti delle varie quantita’ rispetto al valore iniziale S
e si possono confrontare i valori di utilita’ modificati
per S $1-\exp(-a)$
per S1 $1-\exp(-a(S1/S) = U1$
per S2 $1-\exp(-a(S2/S)) =U2$
Il valore $U0 = pU1+(1-p)U2$ corrisponde ad un valore
di utilita’ $1-\exp(X/S)$

N.B. Piu’ che la funzione utilita’ (soggettiva) si usano approcci di tipo probabilistico : stime che usano media (rendimento) e varianza (rischio) e concetti come il VaR (Value at Risk) che cerca di quantificare la possibile perdita massima (ad esempio al 90%, al 95%, al 99%). Anche questi approcci dipendono da ipotesi probabilistiche (sulla distribuzione dei rendimenti/oscillazioni) non estremamente ovvie.