0) limitazioni prezzo call

Data un'azione, le due opzioni call e put (europee, scadenza t0) con prezzo di esercizio X in ogni tempo $t < t0$ si ha

$$\gamma(t)X + c(t) = A(t) + p(t)$$

con A(t) prezzo dell'azione , prezzo della call, prezzo della put , $\gamma(t)X$ valore scontato di X

quindi

$$c(t) = A(t) - \gamma(t)X + p(t) \geq A(t) - \gamma(t)X$$

(per il prezzo della put vale sempre $p(t) \geq 0$)

Se il valore dell'azione al tempo t0 e' A il valore della call e'

$$c(t0) = \max(A-X ,0) < A$$

quindi anche ai tempi precedenti

$$c(t) < A(t)$$

Il valore della call verifica sempre

$$0 \leq A(t) - \gamma(t)X \leq c(t) < A(t)$$

e l'opzione call ha sempre un valore non negativo e limitato.

Queste limitazioni dipendono esplicitamente dal prezzo dell'azione e dai tassi interesse [$\gamma(t)$] ma non dalle previsioni sul valore finale A dell'azione.

1) Caso 2 tempi

Si suppone di avere la seguente situazione

Somma di denaro (es. $B0$) al tempo 0 sara’ (con certezza) al tempo 1 $(1+r)\, B0 = B1$

Un azione che vale $S0$ al tempo 0 e varra’ $S1$ al tempo 1 con due possibili valori

$$S1 = S0\, u \quad \text{(con probabilita' } p_u > 0)$$

$$S1 = S0\, d \quad \text{(con probabilita' } p_d > 0)$$

Un portafoglio composto da una somma di denaro b e da s azioni vale

$$V0(b,s) = b + s\, S0 \qquad [\text{al tempo } 0]$$

e varra’

$$V1(b,s) = b(1+r) + s\, S1 \qquad [\text{al tempo } 1]$$

Il valore $V0(b,s)$ e’ certo mentre $V1(b,s)$ e’ aleatorio

2) Arbitraggio

Un portafoglio si chiama portafoglio di arbitraggio se

$$V0(b,s) = 0 \quad [\Rightarrow \text{nessuna spesa presente}]$$

$$P\left([V1(b,s) \geq 0] \right) = 1 \qquad [\Rightarrow \text{nessuna spesa futura}]$$

$$P\left([V1(b,s) > 0] \right) > 0 \quad [\Rightarrow \text{possibile guadagno}]$$

Nel caso precedente (azione + denaro, due tempi, due possibili valori finali per l’azione)

il portafoglio di arbitraggio e’ escluso se solo se $d < (1+r) < u$

Infatti

a) se $d < u \leq (1+r)$ [$\Rightarrow$ azione rende non piu' del denaro]

si pone $b = S0$ $s = -1$

al tempo 0

$$V0(b,s) = S0 - S0 = 0$$

[incasso S0 dalla vendita (allo scoperto) dell'azione]

al tempo 1

$$V1(b,s) = (1+r)\, S0 - S1$$

[ricavo (1+r) S0 dal denaro e compro l'azione]

ma

$$S1 \leq u\, S0$$

e $V1(b,s) \geq 0$ (con probabilita' p_d $V1(b,s) > 0$)

b) se $(1+r) \leq d < u$ [$\Rightarrow$ azione rende non meno del denaro]

si pone $b = -S0$ $s = 1$

al tempo 0

$$V0(b,s) = -S0 + S0 = 0$$

[prendo il denaro a prestito e compro l'azione]

e al tempo 1

$$V1(b,s) = -(1+r)\, S0 + S1$$

[vendo l'azione pago denaro e interessi]

ma

$$S1 \geq dS0 \geq (1+r)$$

e $V1(b,s) \geq 0$ (con probabilita' p_u $V1(b,s) > 0$)

c) se $d < (1+r) < u$ [$\Rightarrow$ azione rendera' o piu' o meno del denaro]

e esistesse un portafoglio di arbitraggio V(b,s) si dovrebbe avere

$$V0(b,s) = b + sS0 = 0 \text{ e } sS0 = -b$$

Risulta

$$V1(b,s) = b(1+r) + sS1 = b(1+r) + sS0\,\theta = s\,S0\,(-(1+r) + \theta)$$

θ puo' essere solo u o d (con probabilta' > 0) e non e' possibile

$P([V1(b,s) \geq 0]) = 1$

3)Probabilita' neutrali al rischio

Se $d < (1+r) < u$ si possono trovare dei pesi (q_u, q_d) che verificano

$$q_d > 0 , q_u > 0, \quad q_d + q_u = 1$$

e la relazione

$$1+r = q_d\, d + q_u\, u$$

I valori sono

$$q_u = (1+r-d)/(u-d) , \quad q_d = (u-(1+r))/(u-d)$$

Se si avesse (si potesse avere)

$$S1 = S0u \text{ (con probabilita' } q_u \text{)}$$

$$S1 = S0d \text{ (con probabilita' } q_d \text{)}$$

allora il valore atteso di S1 sarebbe

$$q_u\, S0u + q_d\, S0d = S0\,(1+r)$$

Sarebbe indifferente investire del denaro (rendimento 1+r) o acquistare l'azione a S0 (valore atteso S0 (1+r)). I valori (q_u, q_d) sono anche detti probabilita' neutrali al rischio. [(q_u, q_d) non sono delle probabilta' ma delle misure]

4) Replica del derivato :

Si suppone che sull'azione che vale S0 al tempo 0 e varra' S1 al tempo 1

(con possibili valori S1 = S0u S1 = S0d) sia disponibile un'opzione call

con prezzo di esercizio K.

Si suppone

$$S0d < K < S0u$$

{ se K $\leq$ S0d conviene sempre esercitare l'opzione mentre se K $\geq$ S0u l'opzione non verra' mai esercitata. In ambedue i casi non sarebbe una vera opzione (che puo' valere 0 oppure >0) }

Se S1 = S0u allora c1 = S1 - K = S0u - K

se S1 = S0d allora c1 = 0

ovvero

$$c1 = \phi (z) = (S1 - K)_+$$

{ z variabile aleatoria di possibili valori u e d }

Il derivato e' detto replicabile se esiste portafoglio V(b,s) (pesi b,s) per cui con probabilita' 1 V1(b,s) = (valore finale del derivato)

In questo caso V0(b,s) esprime il valore c0 del derivato al tempo 0

[altrimenti uno portafoglio del tipo V(b,s)-c , -V(b,s)+c realizzerebbe un arbitraggio]

V(b,s) replica il derivato se

$z = u \quad \Rightarrow \quad \phi (z) = (1+r)b + s\, S0u = S0u - K = \Phi (u)$

$z = d \quad \Rightarrow \quad \phi (z) = (1+r)b + s\, S0d = 0 = \Phi (d)$

Sistema lineare dimensione 2 e matrice

$$\begin{matrix} (1+r) & S0u \\ (1+r) & S0d \end{matrix}$$

di determinante $(1+r)S0(d-u) \neq 0$

e quindi

$$sS0(u-d) = \Phi(u)-\Phi(d)$$

$$s = (S0)^{-1} \ (\Phi(u) - \Phi(d)) /(u-d)$$

$$b = (1+r)^{-1} \ (u \Phi(d) - d\Phi(u)) /(u-d)$$

Il valore al tempo 0 risulta

$$V0(b,s) = b + s\, S0 = (1+r)^{-1} (u \Phi(d)-d\Phi(u)) /(u-d) + (\Phi(u)-\Phi(d)) /(u-d)$$

$$= (1+r)^{-1} \left(\Phi(u) \ (1+r - d) /(u-d) + \Phi(d) \ (u-(1+r)) /(u-d) \right)$$

$$= (1+r)^{-1} \ (\Phi(u)\, q_u + \Phi(d)\, q_d)$$

Il prezzo iniziale dipende da

- Il tasso di interesse (fattore di sconto $(1+r)^{-1}$)

- i pesi (q_u, q_d) (probabilita’ neutrali al rischio)

- I valori finali possibili ($\Phi(u)$ e $\Phi(d)$)

Non dipende in modo esplicito o implicito dalle vere probabilita’ (p_u, p_d) dell’andamento dell’azione.

5) Caso piu’ periodi

Il risultato di un periodo puo’ essere poco significativo ma e’ possibile

applicare lo stessa schema a piu’ periodi.

Se l’azione vale S0 al tempo 0 potra’ valere

al tempo 1 S0u oppure S0d

al tempo 2 S0uu oppure S0ud oppure S0du oppure S0dd (se ud =1 i valori risultano S0uu , S0 , S0dd

Il valore al tempo 2 del derivato sara' (Φ (uu) o Φ (ud) (=Φ (du)) o Φ (dd)

Noti i valori al tempo 2 si possono calcolare i valori al tempo1 nei due casi

S0u oppure S0d

e da questi il valore al tempo 1

Il ragionamento si puo' ripetere per il caso k periodi ed possibile calcolare

il valore di un generico derivato (non solo call)

La scelta di k (numero dei periodi) e dei valori u e d va fatta con attenzione

6) Cenno al caso generale

Questa derivazione e' semplice ma permette di calcolare il prezzo solo in tempi

fissati (valori k) e in presenza di movimenti di ampiezza fissa (valori u e d) .

Si puo' ottenere una valutazione di questo tipo in tempo continuo e con movimenti continui se si suppone

i) assenza di arbitraggi (= possibilita' di replica)

e si conosce

ii) valore finale del derivato (formula in funzione dello stato finale)

iii) comportamento del denaro (tasso interesse)

iv) possibile dinamica (ma non probabilita' del singolo stato finale)

Mentre si puo' supporre i) ed e' facile conoscere ii) e iii) per il punto iv)

sono richiesti dei concetti e delle tecniche di calcolo delle probabilita'

(processi stocastici …)