Equazioni non lineari $F(t) = 0$

Metodi di soluzione
- bisezione
- regula falsi

{ intervallo a,b con $F(a) * F(b) <0$ pt (medio ? 0 retta per 2punti ?) nell'intervallo sostituisce a o b a seconda del segno)

Metodi migliori

F contrazione
dist ($F(x)-F(y)$) $< k$ dist$(x-y)$ $k <1$
(basta $F' <= k <1$)
$\| F(x)-F(y) \| < k \|x-y\|$ $k <1$ (basta $F' <= k <1$)

Succ $x_{n+1} = F(x_n)$
$\| x_{n+1} - x_n \| = \| F(x_n) - F(x_{n-1}) \| < k \| x_n - x_{n-1} \|$
$< .. k^2 \| x_{n-1} - x_{n-2} \|$
$< \dots k^n \|x_1 - x_0 \|$

$$\| x_{n+p} - x_n \| = \| \sum_{i=1\ldots p} (x_{n+i} - x_{n+i-1}) \|$$

$$< \sum_{i=1\ldots p} k^{n+i-1} \|x_1 - x_0\|$$

$$< k^{n-1} \|x_1 - x_0\| \sum_{i=1\ldots p} k^i$$
$$< k^{n-1} \|x_1 - x_0\| \; 1/(1-k)$$

Succ x_n cauchy $x_n \to x^*$ x^* pt fisso (unico)
$F(x^*)=x^*$

Errore $e(n) = \|x_n - x^*\|$
$e(n+1) < Ke(n) < K^n e(0)$

Metodo di Newton
$F(x+h) \sim F(x) + F'(x)h$ $h = -F(x)/ F^{(1)}(x)$

Successione
$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F^{(1)}(x_n)$

Errore (senza dim) $e(n+1) < C\, e(n)^2$

Metodo della secante
Se (Metodo Newton +successione x_n) si approssima
$F^{(1)}(x_n)$ con $F(x_n)-F(x_{n-1})/(x_n - x_{n-1})$
si ha metodo della secante
$x_{n+1} = x_n - F(x_n) [F(x_n)-F(x_{n-1})/(x_n - x_{n-1})]^{-1}$

retta che passa per 2 punti ha equazione
$r(t)= F(x_n) + (t- x_n) [F(x_n)-F(x_{n-1})/(x_n - x_{n-1})]$
x_{n+1} e’ punto $r(t)=0$

Equazione errore (senza dim)

$e(n+1) < C\, e(n)^{1.618}$

Metodo secante : noti due punti iniziali
si valuta [ ] e si trova x_{n+1}
(vantaggio : non usa derivate)

Capitalizzazione mista

Determinazione del tasso

al tempo $T = n+a \quad 0<=a<1$

vale

$C(T) = C0 * (1+t)^{n} (1+ a t)$

$(1+t)^{n} (1+at)= r = C(T)/C0$

$(1+t)^{n} = r (1+at)^{-1}$

$t= r^{1/n} (1+at)^{-1/n} - 1 = F(t)$

F(t)= (r)^(1/n) (1+at)^(-1/n)

$|F'(t)| = r^{1/n} (a/n) (1+at)^{-1/n - 1}$

Alla soluzione

$(1+t^*)= r^{1/n} (1+at^*)^{-1/n}$

$|F'(t^*)| = (a/n) (1+t^*) (1+at^*)^{-1}$

$= (1/n) a (1+t^*) (1+at^*)^{-1}$

$a(1+t^*) = a+at^* < (1+at^*)$

$|F'(t^*)| <1/n$

$t_{k+1}= F(t_k)$ = (r)^(1/n) (1+a t_k)^(-1/n)

Punto iniziale (p.e.)

t_0 che verifica $(1+ t_0)^{n+a} = r$

2) Rendita: Determinazione tasso

$C= R (1/ t) *(1- (1+t)^{-n})$

$t = R/C * (1-1+t)^{-n}) = H(t)$

$H(t)' = -(nR/C) * (1+t)^{-n-1})$

Se t tasso ($t \geq t^*$ soluzione)

$(1+t)^{-1} < (1+t^*)^{-1}$

$C \geq \sum R(1+t)^{-k}$

$C(1+t)^{n} \geq \sum R (1+t)^{n-k} \geq nR$

$1 \geq (nR/C)* (1+t)^{-n}$

$H'(t) < (1+t)^{-1} < (1+t^*)^{-1} < 1$

$t_0 = R/C$;

$t_{k+1} = H(t_k) = R/C * (1-(1+ t_k)^{-n})$

Anche se $t_0 < t^*$ ma vicino a t^* t_k converge