Esercizi di Algebra — *C.L. in Matematica, a.a.1999-2000*

Es. 1. Sia $S = \{A \in M_5(\mathbb{C}) \ | \ A^6 = A^3\}$.

a) Provare che se $A \in S$ e A è invertibile, allora A è diagonalizzabile.

b) Sia $A \in S$ una matrice che ha $X^3(X-1)^2$ come polinomio caratteristico. Determinare i possibili polinomi minimi e le relative forme canoniche di Jordan.

Es. 2. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $\mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Im}\,(\varphi)$.

a) Determinare il polinomio caratteristico e il polinomio minimo di φ.

b) Posto $\mathrm{Ker}\,(\varphi) =< (1,1,0,0),(1,-1,1,0) >$, determinare una tale φ e una sua base di Jordan.

Es. 3. Sia $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ un'applicazione lineare tale che $\dim \mathrm{Im}\,(\varphi) = 2$. Determinare i possibili polinomi caratteristici di φ e per ciascuno di essi determinare i possibili polinomi minimi e le corrispondenti forme di Jordan.

Es. 4. Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ con polinomio minimo $X^3 - 2X + 1$. Provare che A è invertibile ed esprimere l'inversa di A^2 come combinazione lineare di A^i, $(0 \le i \le 2)$.

Es. 5. Per ciascuna delle seguenti matrici A trovare una forma canonica di Jordan e una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia in FCJ.

$$\begin{pmatrix} 39 & -64 \\ 25 & -41 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es. 6. Per ciascuna delle seguenti matrici A trovare una forma canonica di Jordan J, una base di Jordan e una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP = J$.

$$\begin{pmatrix} 22 & -2 & -12 \\ 20 & 0 & -12 \\ 30 & -3 & -16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -13 & 8 & 1 & 2 \\ -22 & 13 & 0 & 3 \\ 8 & -5 & 0 & -1 \\ -22 & 13 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Es. 7. Trovare una forma canonica di Jordan della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es. 8. Sia V il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale costituito dai polinomi in $\mathbb{C}[X]$ che hanno grado minore di 4 e sia $D : V \to V$ l'operazione di derivazione. Trovare la forma canonica di Jordan di D.

Es. 9. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $\varphi^5 = \varphi^3 \neq 0$. Determinare i possibili polinomi minimi e le corrispondenti forme di Jordan.

Es. 10. Sia $\varphi : \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3$ un endomorfismo non semplice di $\mathbb{Z}_3$ spazi vettoriali tale che $\varphi^5 = \varphi^2 \neq 0$. Determinare i possibili polinomi minimi e le corrispondenti forme di Jordan.

Es. 11. Sia $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ un'applicazione lineare con polinomio minimo $X^2(X-1)$ e tale che $\dim \operatorname{Im}(\varphi) = 3$. Determinare il polinomio caratteristico e la forma canonica di Jordan di $M_E(\varphi)$.

Es. 12. Nei casi seguenti descrivere le possibili forme di Jordan di una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ di cui è noto il polinomio caratteristico $ch_A(X)$ e il polinomio minimo $m_A(X)$.

$ch_A(X)$	$m_A(X)$
$X^2(X-1)^4$	$X(X-1)^2$
$(X-1)(X-2)^2(X+1)^2$	$(X-1)(X-2)(X+1)^2$
$(X^2+1)^2(X-1)(X+2)^2$	$(X^2+1)(X-1)(X+2)$

Es. 13. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, allora AB e BA hanno la stessa forma canonica di Jordan

a) se A e B sono entrambe invertibili;

b) se A oppure B è invertibile;

c) se e solo se A e B sono invertibili;

d) se e solo se A oppure B è invertibile.

Es. 14. Sia $\varphi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alla base

$$\{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$$

dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Trovare una base di $\mathbb{C}^5$ rispetto a cui la matrice di φ è in forma canonica di Jordan.

Es. 15. Trovare il polinomio minimo della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Quante forme essenzialmente diverse si possono avere con questo polinomio minimo?