Esercizi di Algebra 2

1. Provare che, a meno di isomorfismo, ci sono solo due gruppi abeliani di ordine 108 che hanno uno ed un solo sottogruppo di ordine 3.

2. Provare che, a meno di isomorfismo, ci sono solo due gruppi abeliani di ordine 108 che hanno 4 e solo 4 sottogruppi di ordine 3.

3. Provare che, a meno di isomorfismo, ci sono solo due gruppi abeliani di ordine 108 che hanno 13 e solo 13 sottogruppi di ordine 3.

4. Sia G un gruppo abeliano finito di ordine n multiplo di 10. Provare che G ha un sottogruppo ciclico di ordine 10.

5. Caratterizzare gli interi n tali che tutti i gruppi abeliani di ordine n sono ciclici.

6. Sia G un gruppo abeliano di ordine 16 che contiene un elemento di ordine 8 e due elementi di ordine 2. Quali sono gli invarianti primari di G?

7. Spiegare perché la applicazione $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ che manda a in $3a$ non é un omomorfismo di gruppi.

8. Provare che non c'é un omomorfismo surgettivo da $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

9. Supponiamo che $f : \mathbb{Z}/17\mathbb{Z} \to G$ sia un omomorfismo di gruppi non iniettivo. Come é fatto f?

10. Se $f : \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \to G$ con G gruppo di ordine 5, determinare il nucleo di f.

11. Quanti omomorfismi ci sono da $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ che sono surgettivi?

12. Sia $f : S_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Determinare il nucleo di f. Determinare tutti gli omomorfismi $f : S_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

13. Supponiamo che H e K siano distinti sottogruppi di G di indice 2. Provare che $H \cap K$ é un sottogruppo normale di G di indice 4 e che $G/(H \cap K)$ non é ciclico.

14. Provare che ci sono due gruppi abeliani di ordine 108 che hanno esattamente 4 sottogruppi di ordine 3.

15. Sia G un gruppo abeliano di ordine 120 e che G abbia esattamente 3 elementi di ordine 2. Determinare la classe di isomorfismo di G.

16. Provare che se l'ordine di un gruppo abeliano finito é divisibile per 4, il gruppo non ha necessariamente un sottogruppo ciclico di ordine 4.

17. Determinare la classe di isomorfismo del gruppo

$$G = \{1, 9, 16, 22, 29, 53, 74, 79, 81\}$$

ove l'operazione é la moltiplicazione modulo 91.

18. Sia G un gruppo abeliano di ordine 16. Supponiamo che ci siano in G due elementi a e b tali che $ord(a) = ord(b) = 4$ e $a^2 \neq b^2$. Determinare la classe di isomorfismo di G.

20. Sia G un gruppo finito abeliano. Provare che G ha ordine p^n per qualche primo p se e solo se ogni elemento di G ha per ordine una potenza di p.

21. Sia H un sottogruppo di G di indice 2. Se $x, y \in G$ e $x \notin H$, $y \notin H$, provare che $xy \in H$.

22. Sia H un sottogruppo normale di S_4 di ordine 4. Provare che S_4/H é isomorfo a S_3.

23. Determinare il sottogruppo di torsione del gruppo additivo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

24. Sia $f : D_4 \to G$ un omomorfismo di gruppi. Descrivere tutti i gruppi a cui Imf puó essere isomorfo.

25. Quante sono le classi di isomorfismo dei gruppi abeliani di ordine 64?

26. Provare che se p é un numero primo, allora

$$Aut(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}.$$

27. Determinare una base per il sottogruppo di $\mathbb{Z}^3$ generato da

$$(1, 0, -1), (2, 7, 1), (3, 1, 0), (-2, -1, -3).$$

28. Determinare una base per il sottogruppo di $\mathbb{Z}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = 0 \\ X + 4Y + 9Z = 0 \end{cases}$$

29. Determinare gli invarianti primari e il rango del gruppo $\mathbb{Z}^2/H$ ove H é il sottogruppo generato da $(2, 3), (1, -7)$.

30. Determinare gli invarianti primari e il rango del gruppo $\mathbb{Z}^3/H$ ove H é il sottogruppo generato da $(1, 1, 1), (3, 1, 5)$.

31. Sia H il sottogruppo di $\mathbb{Z}^3$ generato da $(1, 3, 8), (0, 4, 5), (2, 2, 11)$. Decomporre il gruppo $\mathbb{Z}^3/H$ come somma diretta di sottogruppi ciclici.

32. Sia $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}^2$ l'omomorfismo di gruppi definito da

$$f(n, m, p) = (2n + 3m + 7p, 6n + 12m + 16p).$$

a) Determinare una base di Ker f.

b) Determinare una base di Im f.

c) Decomporre $\mathbb{Z}^2/Imf$ come somma diretta di gruppi ciclici.

33. Sia G il sottogruppo di $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ generato da $(\overline{3}, \overline{4}), (\overline{2}, \overline{8})$. Decomporre G come somma diretta di gruppi ciclici.