Caratteri numerici delle algebre graduate

Giuseppe Valla

Universita' di Genova

Oggetto di studio

Algebre del tipo

$$A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$$

I ideale omogeneo di $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, k un corpo algebricamente chiuso e di caratteristica zero.

Tali sono gli anelli delle coordinate delle varieta‘ algebriche proiettive.

Finalita‘

Si vogliono studiare certi caratteri numerici di tali algebre e, nel caso, il loro significato geometrico.

Finalita‘

Si vogliono studiare certi caratteri numerici di tali algebre e, nel caso, il loro significato geometrico.

Ad esempio la dimensione di Krull di A e’

$$\dim V + 1$$

ove V e’ la corrispondente varieta‘ definita dall’ideale I.

Funzione di Hilbert

Data la azione di un gruppo sulle forme lineari di R, Hilbert voleva capire come la dimensione dello spazio vettoriale delle forme invarianti di grado t varia con t.

In generale si deve studiare la dimensione dello spazio vettoriale su k costituito dalle forme di grado t che stanno in I. Meglio ancora la sua codimensione nello spazio di tutte le forme di grado t in R.

$$H_A(t) := \dim_k R_t - \dim_k I_t.$$

Questa e' per definizione la Funzione di Hilbert di A.

Esempi

1) Se $I = (0)$ si ha $A = R$ e quindi

$$H_R(t) = \binom{n+t-1}{t}.$$

2) Se $I = (F)$, con $deg(F) = d$,

$$H_{R/I}(t) = H_R(t) - H_R(t-d) =$$

$$= \binom{n+t-1}{t} - \binom{n+t-d-1}{t-d}.$$

La serie di Hilbert.

Molto piu' conveniente e significativo e' studiare la funzione generatrice di questa funzione numerica. Tale serie si chiama la Serie di Hilbert di A e per definizione e' la serie

$$P_A(z) = \sum_{t \geq 0} H_A(t) z^t.$$

Tale serie e' razionale e, di piú, si puo‘ scrivere nella forma

$$P_A(z) = \frac{h(z)}{(1-z)^d}$$

$h(z) = h_0 + h_1 z + \cdots + h_s z^s$ ha coefficienti interi e $h(1) \neq 0$.

Ad esempio se $A = R$ si ha

$$P_R(z) = \frac{1}{(1-z)^n}.$$

Se $I = (F)$, con $deg(F) = d$,

$$P_{R/I}(z) = \frac{1-z^d}{(1-z)^n} = \frac{1+z+\cdots+z^{d-1}}{(1-z)^{n-1}}.$$

Il polinomio di Hilbert di A.

Se si pone $e_i := \frac{h^{(i)}(1)}{i!}$ per ogni $i \geq 0$, il polinomio a coefficienti razionali

$$p_A(X) := \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i e_i \binom{X+d-i-1}{d-i-1}$$

verifica per $t >> 0$ $\quad p_A(t) = H_A(t)$.

Il polinomio $p_A(X)$ ha grado $d-1$ e si chiama il polinomio di Hilbert di A.

Grado e genere

Dal polinomio di Hilbert, e quindi dalla serie, possiamo leggere alcuni dei caratteri numerici a cui siamo interessati.

La dimensione di A e' l'ordine di polo della serie di Hilbert o $1+$ il grado del polinomio di Hilbert.

Il grado (o la molteplicita') di A e' l'intero $h(1) = e_0$.

Il genere aritmetico e' l'intero

$$g := \sum_{j=1}^{s} h_j \binom{j-1}{d-1} = (-1)^{d-1}(p_A(0) - 1).$$

Per una ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^{n-1}$ si era visto che

$$P_{R/I}(z) = \frac{1 - z^d}{(1-z)^n} = \frac{1 + z + \cdots + z^{d-1}}{(1-z)^{n-1}}.$$

Dunque

la dimensione e' $n - 2$,

il grado e' d

e il genere aritmetico e' $\binom{d-1}{n}$.

Questi caratteri numerici hanno significato geometrico rilevante: Ad esempio le curve di genere 0 sono le curve razionali, quelle di genere 1 sono le curve ellittiche.

Contesto in cui il polinomio di Hilbert appare:

Il Teorema di Riemann-Roch e' una computazione sul polinomio di Hilbert ed ha un ruolo essenziale in Geometria Algebrica.

L'informazione contenuta nei coefficienti del polinomio di Hilbert si riflette nelle Classi di Chern del fascio corrispondente.

Il Teorema di Macaulay

Il primo problema e' certamente quello di determinare le funzioni numeriche che sono Funzioni di Hilbert di algebre graduate.

Tale problema e' stato risolto da Macaulay giá nel 1927.

Sia d un intero positivo. Ogni intero a si puo' scrivere in modo unico nella forma

$$a = \binom{k_d}{d} + \binom{k_{d-1}}{d-1} + \cdots + \binom{k_j}{j}$$

dove

$$k_d > k_{d-1} > \cdots > k_j \geq j \geq 1.$$

Dati gli interi d ed a poniamo

$$a^{<d>} := \binom{k_d + 1}{d+1} + \cdots + \binom{k_j + 1}{j+1}$$

Una funzione numerica $H : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e' la Funzione di Hilbert di una algebra graduata se e solo se $H(0) = 1$ e $H(t+1) \leq H(t)^{<t>}$ per ogni $t \geq 1$.

Questo risultato formalizza l'intuizione che la parte di grado t di un ideale omogeneo I, genera in grado $t+1$ uno spazio vettoriale di dimensione non troppo piccola.

Ad esempio la funzione numerica

$H = \{1, 3, 4, 5, 7, 0, ...\}$ non e' ammissibile.

Le Funzioni di Hilbert ammissibili per algebre graduate ridotte o Cohen-Macaulay sono completamente determinate.

Per le algebre Cohen-Macaulay integre o Gorenstein il problema e' aperto e lontano da una soluzione.

Gli unici casi risolti sono quelli delle algebre di Cohen-Macaulay integre di codimensione due o Gorenstein di codimensione tre, in virtu' dei teoremi di struttura che valgono in questi casi.

Algebre graduate generiche

E' ancora aperto il problema della determinazione della Funzione di Hilbert delle algebre graduate generiche.

Se $F_1, \ldots, F_t$ sono forme generiche di grado $d_1, \ldots, d_t$ in $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, e poniamo $I = (F_1, \ldots, F_t)$, ci si aspetta

$$P_{R/I}(z) = \left| \frac{\prod(1-z^{d_i})}{(1-z)^n} \right|.$$

Congettura verificata solo se $n = 2, 3$.

La congettura sarebbe provata se fossimo in grado di descrivere una base di Gröbner, rispetto all'ordinamento revlex, di un ideale di forme generiche. Quello che ci si aspetta e' facile da congetturare, ma, al momento, impossibile da verificare.

Se I e' un ideale di R e τ un term order sui monomi di R, sia $in_\tau(I)$ l'ideale generato da $in(F)$ al variare di $F \in I$. Una base di Gröbner di I relativamente a τ e' un insieme di elementi $F_1, \ldots, F_r$ in I tali che

$$in_\tau(I) = (in(F_1), \ldots, in(F_r)).$$

Il problema di Waring e punti grassi

Per ogni $j \geq 2$ determinare il minimo intero $G(j)$ tale che la forma generica di grado j in $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ si possa scrivere come somma di $G(j)$ potenze di forme lineari (rientra nel problema della classificazione delle forme canoniche).

Il numero delle forme di grado j in $n+1$ variabili e' $\binom{n+j}{j}$

Il numero di coefficienti in una somma di G potenze di forme lineari e' $(n+1)G$ e quindi ci si aspetta:

$$G(j) = \min \left\{ t \mid (n+1)t \geq \binom{n+j}{j} \right\}.$$

Ci sono eccezioni: la forma generica di grado 2 in 3 variabili e' irriducibile e quindi non puo' essere la somma di due quadrati.

Se $j \geq 3$, un recente teorema di Hirschovitz-Alexander sulla Funzione di Hilbert di punti grassi generici implica per $G(j)$ il valore aspettato, con l'eccezione di quattro casi completamenti determinati.

Il fatto cruciale e' che $G(j)$ e' il minimo degli interi s tali che esistono s punti generici in $\mathbb{P}^n$ con

$$H_{R/I}(j) = \binom{n+j}{j} = H_R(j)$$

$\wp_1, \ldots, \wp_s$ sono gli ideali dei punti e $I = \wp_1^2 \cap \cdots \cap \wp_s^2$.

La forma generica di grado 4 in 3 variabili non e' la somma di 5 potenze (n=2, j=4): per 5 punti di $\mathbb{P}^2$ passa una conica e quindi c'e' una quartica non nulla in I_4.

Problema rilevante e' lo studio della funzione di Hilbert di punti grassi generici, anche per le applicazioni a symplectic packing problem (Mc Duff-Polterovich).

Notiamo che la funzione di Hilbert di punti semplici generici e' invece completamente determinata.

I numeri di Betti di A.

La Funzione di Hilbert non sempre e' sensibile alle proprieta' geometriche degli schemi considerati.

4 punti generici di $\mathbb{P}^2$ hanno la stessa Funzione di Hilbert di 4 punti speciali, ad esempio tre dei quali siano allineati.

Ma mentre nel primo caso l'ideale ha due soli generatori, nel secondo di generatori ce ne sono tre.

Ci vogliono quindi caratteri numerici piu' raffinati.

Per calcolare la Funzione di Hilbert degli anelli di invarianti, Hilbert aveva osservato che ogni modulo graduato M finitamente generato su R da elementi omogenei $m_1, \ldots, m_r$ di gradi $d_1, \ldots, d_r$, si puó presentare con una successione esatta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L = \oplus_{i=1}^{r} R(-d_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ove si pone $R(-d)_m = R_{m-d}$ e si dice che K e' il modulo delle sizigie di $m_1, \ldots, m_r$.

Poiche' $L = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-d_i)$ e' libero graduato, il problema si riduce al calcolo della Funzione di Hilbert di K.

K e' ancora finitamente generato su R e quindi si puó iterare il procedimento ottenendo una risoluzione libera graduata di M, ossia un complesso esatto di R-moduli liberi graduati e omomorfismi omogenei

$$\cdots \longrightarrow F_h \longrightarrow F_{h-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow$$

$$\longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Il celeberrimo Teorema delle sizigie di Hilbert ci assicura che al piú dopo n passi il nucleo che si trova e' libero e quindi il procedimento termina.

Se ad ogni passo scegliamo un sistema di generatori minimali per i successivi moduli delle sizigie, troviamo una risoluzione libera graduata minimale di M che possiamo scrivere

$$0 \longrightarrow \oplus_{j\geq 0} R(-j)^{\beta_{h,j}} \longrightarrow \oplus_{j\geq 0} R(-j)^{\beta_{h-1,j}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow \oplus_{j\geq 0} R(-j)^{\beta_{0,j}} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Gli interi $\beta_{i,j}$ sono detti i numeri di Betti graduati di M.

Non dipendono dalla risoluzione minimale scelta e infatti:

$$\beta_{i,j} = \dim_k \; Tor_i^R(M,k)_j.$$

Gli interi j tali che $\beta_{i,j} \neq 0$ sono detti gli shifts in posizione i della risoluzione.

La lunghezza h di una risoluzione minimale non dipende quindi dalla risoluzione e si chiama la dimensione omologica $hd(M)$ di M.

Un teorema fondamentale di Auslander-Buchsbaum prova che

$$hd(M) + depth(M) = n.$$

Si dice che M e' Cohen-Macaulay se $depth(M) = \dim(M)$.

Nell'esempio dei 4 punti generici la risoluzione di R/I e'

$$0 \longrightarrow R(-4) \longrightarrow R(-2)^2 \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Nel caso non generico e'

$$0 \longrightarrow \begin{array}{c} R(-3) \\ \bigoplus \\ R(-4) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} R(-2)^2 \\ \bigoplus \\ R(-3) \end{array} \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

Sono entrambi Cohen-Macaulay.

Un esempio di varietá il cui anello di coordinate non e' Cohen-Macaulay e' dato da due rette sghembe in $\mathbb{P}^3$.

Ad esempio

$$A = k[X, Y, Z, T]/(X, Y) \cap (Z, T)$$

ha dimensione 2 ma la sua risoluzione ha lunghezza 3 e quindi $depth(A) = 1$,

$$0 \longrightarrow R(-4) \longrightarrow R(-3)^4 \longrightarrow R(-2)^4 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

I numeri di Betti determinano la Funzione di Hilbert, ma una stessa Funzione di Hilbert puo' corrispondere ad algebre che hanno diversi numeri di Betti.

Un teorema recente di Bigatti e Hulett asserisce pero' che l'ideale lex-segmento con una data Funzione di Hilbert determina una algebra i cui numeri di Betti sono maggiori o eguali ai corrispondenti numeri di Betti di ogni altra algebra graduata con la stessa Funzione di Hilbert.

Un ideale lex-segmento e' un ideale monomiale la cui componente omogenea in ogni grado e' generata da un segmento iniziale nell'ordine lessicografico sui monomi.

Una questione centrale nel programma di trovare una connessione tra la geometria di una varietá e la struttura della risoluzione del suo anello di coordinate e' il chiedersi quali siano i numeri di Betti nel caso di punti generici distinti dello spazio proiettivo.

Per i numeri di Betti di punti generici ci sono dei valori aspettati che sono determinati dal supporre che certe mappe siano di rango massimo. Recentemente F. Schreyer ha peró scoperto, computazionalmente, che per 11 punti di $\mathbb{P}^6$ tali valori non sono realizzati. Notare che per $n+5$ punti di $\mathbb{P}^n$ i numeri di Betti sono quelli aspettati.

La congettura della curva canonica.

Recenti lavori di M. Green hanno mostrato come i numeri di Betti di R/I riflettano profonde proprietá geometriche della varietá corrispondente.

Se ad esempio $\mathcal{C}$ e' una curva liscia di genere g che non e' iperellittica, si ha una immersione

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}.$$

Un classico teorema di Petri dice che se la curva non e' trigonale, ne' una quintica piana, l'ideale di $\mathcal{C}$ e' generato da quadriche.

Green ha congetturato che la risoluzione dell'anello delle coordinate di $\mathcal{C}$ dipende dalle serie lineari che $\mathcal{C}$ possiede.

Piú precisamente la congettura della curva canonica dice che l'indice di Clifford di $\mathcal{C}$ e' maggiore di p se e solo se la risoluzione e' lineare nelle prime p posizioni, ossia se e solo se per ogni $i \leq p$ vale

$$\beta_{i,j} = 0 \quad \forall j \neq i+1.$$

La regolaritá di Castelnuovo-Mumford.

Se M e' un R-modulo graduato finitamente generato, diciamo che $r = reg(M)$ se r e' il minimo intero tale che per ogni $i \geq 0$ e per ogni $j > r$ si ha

$$Tor_i^R(M,k)_{i+j} = 0.$$

Si ha subito

$$reg(M) = \max_{i,j}\{d_{i,j} - i\}$$

ove gli interi $d_{i,j}$ sono gli shifts in posizione i nella risoluzione libera graduata minimale di M.

Diremo che M e' m-regolare se $m \geq reg(M)$.

Allora M e' m-regolare se e solo se

$$Ext^i_R(M, R)_t = 0$$

per ogni $i \geq 0$ e per ogni $t \leq -m - i - 1$.

Per dualitá locale si ottiene

$$reg(M) = \max\{i + j \mid H^i_{\mathcal{M}}(M)_j \neq 0\} =$$

$$= \min\{m \mid H^i_{\mathcal{M}}(M)_t = 0 \ \ \forall\, i \ \ e \ \ \forall\, t \geq m - i + 1\}$$

Un famoso Teorema di Serre ci assicura che

$$H_M(t) = p_M(t) \quad \forall\, t \geq reg(M) + 1.$$

Quindi $reg(M)$ ha un interesse geometrico intrinseco perche' puó essere considerato come un bound universale per certi caratteri numerici delle algebre graduate quali

- il grado massimo delle sizigie

- il grado massimo in cui sono non nulli i moduli di coomologia locale

- il punto in cui Funzione e polinomio di Hilbert coincidono.

La congettura sulla regolaritá.

Uno dei problemi piú rilevanti riguarda la seguente congettura di Eisenbud-Goto.

Se $\wp$ e' un ideale primo non degenere di $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, di codimensione h allora

$$reg(R/\wp) \leq e(R/\wp) - h + 1.$$

La congettura e' stata provata solo per le varietá di dimensione al piú tre.

Algebra locale.

Lo studio delle singolaritá di una varietá affine ha la controparte algebrica nello studio degli anelli locali.

Tre algebre giocano un ruolo essenziale non solo nel processo di scoppiamento di una varietá affine $Spec(A, m)$ lungo la sottovarietá definita da I, ma anche nello studio dei caratteri numerici dell'ideale I.

L'Algebra di Rees di A relativamente ad I

$$\mathcal{R} = \oplus_{n \geq 0} I^n t^n$$

L'anello graduato associato ad I

$$gr_I(A) := \oplus_{n \geq 0} \left(I^n / I^{n+1} \right) = \mathcal{R} / I\mathcal{R}$$

La fibra speciale

$$\mathcal{F} = \oplus_{n \geq 0} \left(I^n / m I^n \right) = \mathcal{R} / m\mathcal{R}$$

In questo ambito i problemi sono ancora piú complicati. Non sappiamo caratterizzare le Funzioni di Hilbert di anelli locali Cohen-Macaulay di dimensione uno, gli anelli delle singolaritá delle curve affini.

La Funzione di Hilbert di un anello locale (A, m) e' per definizione la Funzione di Hilbert dell'algebra graduata $gr_m(A)$ ma, nel passaggio da A a $gr_m(A)$, le buone proprietá si possono perdere.

Aspetti computazionali.

Alcuni dei caratteri numerici introdotti si possono calcolare usando ideali generati da monomi.

Se si considera l'ideale iniziale $in_\tau(I)$ di I rispetto ad un qualunque term order τ sui monomi di R, si ha

$$H_{R/I} = H_{R/in(I)}.$$

L'ideale $in(I)$ si calcola conoscendo una base di Gröbner di I, la quale a sua volta si calcola mediante il celeberrimo algoritmo di Buchberger.

Alcune delle numerose applicazioni che la conoscenza di una base di Gröbner comporta:

- Calcolo dei moduli delle sizigie e quindi di una risoluzione graduata minimale di R/I.

- Operazioni elementari quali intersezioni, colons, annullatori, nuclei e pullbacks.

- Depth di un modulo.

- Teoria della eliminazione.

- Localizzazione e saturazione.

- Sistemi di equazioni polinomiali.

La semplicitá di queste idee fondamentali contrasta con la potenza delle applicazioni. Questo connubio di semplicitá e potenza ha motivato in questi ultimi anni studi profondi di carattere teorico e computazionale che hanno dato un forte rilancio a tanti temi di Algebra Commutativa.

La ricerca in Algebra Commutativa e Geometria Algebrica ha fortemente beneficiato della comparsa di sistemi specializzati di Computer Algebra, quali Macaulay, CoCoA, Singular.

Basati su implementazioni molto raffinate dell'algoritmo di Buchberger, tali sistemi hanno dato la possibilitá di studiare esempi, calcolare caratteri numerici, esplorare oggetti che prima erano assolutamente inaccessibili.

La cosa piú fascinosa di questi sistemi e' che la loro potenza emerge mescolando profonde idee di Matematica e di Computer Science.

Gin(I) e Combinatorica.

Se consideriamo un ideale omogeneo I e operiamo su I con una trasformazione lineare generica g, possiamo considerare l'ideale iniziale di $g(I)$ rispetto all'ordinamento revlex.

Si ottiene un ideale monomiale $Gin(I)$ che si chiama Generic initial ideal e che ha queste proprietá:

- $H_{R/I} = H_{R/Gin(I)}$
- $depth(R/I) = depth(R/Gin(I))$
- $reg(R/I) = reg(R/Gin(I))$

e, in questo ultimo caso, la regolaritá coincide con il massimo dei gradi dei generatori di Gin(I) se la caratteristica e' 0.

L'ideale $Gin(I)$ e' Borel fisso nel senso che se B e' il sottogruppo di $Gl(n,k)$ costituito dalle matrici triangolari superiori,

$$g(Gin(I)) = Gin(I), \ \forall\ g \in B.$$

Il calcolo di Gin(I), le sue proprietá e le connessioni tra i suoi caratteri numerici e quelli della corrispondente varietá, hanno fortemente rafforzato le relazioni tra la Algebra Commutativa e la Combinatorica.

La rilevanza del concetto di ideale iniziale generico e' espressa molto bene in questa frase di Green:

Using Gin(I) one can separate the Geometry and the Combinatorics.

Queste ricerche si inseriscono in quella che viene comunemente chiamata Algebra Commutativa Combinatorica, una nuova ed importante branca della Algebra Commutativa, iniziata da Hochster e Stanley nella metá degli anni settanta.

Gli oggetti combinatorici considerati sono i complessi simpliciali a cui si associano, come controparte algebrica, gli anelli di Stanley-Reisner.

Il numero di facce di un complesso simpliciale e' legato alla Funzione di Hilbert del corrispondente anello di Stanley-Reisner.

Questo e' il punto di partenza di ulteriori investigazioni che sono culminate nella prova di Stanley della Upper Bound Conjecture for simplicial spheres.

I concetti di base della Algebra Commutativa, quali le algebre di Cohen-Macaulay, di Gorenstein, la coomologia locale, la Funzione di Hilbert, sono strumenti cruciali per risolvere problemi puramente combinatorici.

Finitezza delle Funzioni di Hilbert.

Una interessante applicazione del concetto di Gin(I) e' data da queste considerazioni.

Kleiman ha provato che e' limitata la regolaritá di tutte le algebre ridotte di fissata molteplicitá e dimensione.

Per ognuna di tali algebre $A = R/I$ si ha

$$t \geq reg(R/I) = reg(R/Gin(I)).$$

Ma, per definizione, $reg(R/Gin(I))$ e' maggiore od eguale al massimo dei gradi dei generatori di $Gin(I)$ -1.

Siccome ci sono solo un numero finito di monomi di grado $\leq t+1$ in R, e siccome $H_{R/I} = H_{R/Gin(I)}$, si conclude che sono in numero finito le Funzioni di Hilbert delle algebre ridotte di fissata molteplicitá e dimensione.

Questo risultato e' un punto cruciale nella costruzione dello schema di Hilbert o di Picard.