Algebra Lineare e Analisi Numerica

Matteo Varbaro

Programma in breve

MATRICI E LORO OPERAZIONI

- Sistemi lineari (Riduzione di Gauss e altri metodi: Cramer e Rouché-Capelli).
- Calcolo vettoriale.

Prime notazioni

Nel seguito con K denoteremo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$ con p numero primo (più in generale la teoria che svilupperemo vale se K è un campo: $(K, +)$, $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppi commutativi e $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \ \forall\, x, y, z \in K$).

Una **matrice** $m \times n$ a entrate in K è

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

m = numero di righe, n = numero di colonne, $a_{ij} \in K$ entrate. Può essere $m \lesseqgtr n$; a volte scriveremo $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$, o anche soltanto $M = (a_{ij})$. L'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate in K verrà denotato con $\mathrm{M}_{mn}(K)$.

Prime notazioni

Esempi

- $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -2 \\ 45 & -7/11 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Q})$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{M}_{22}(\mathbb{Q})$.
- $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$.
- $\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{Z}_2)$.

Prime notazioni

Matrici particolari

- **Matrice nulla** $M = 0$: $M = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0 \ \forall \ i, j$.
- **Matrici quadrate** $(m = n)$. L'insieme delle matrici quadrate, anziché $\mathrm{M}_{nn}(K)$, verrà denotato con $\mathrm{M}_n(K)$
- **Matrici riga** $(1 \times n)$: $R_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{1n}(K)$.
- **Matrici colonna** $(m \times 1)$: $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m1}(K)$.

Matrici quadrate particolari

- **Matrici triangolari**:
  - **triangolari superiori** (T_{sup}): $M = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$, ad esempio $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3/2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$.
  - **triangolari inferiori** (T_{inf}): $M = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$, ad esempio $M = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_3)$.
- **Matrici diagonali** (particolari matrici triangolari): $M = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$, ad esempio $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
- **Matrice identica** (particolare matrice diagonale). $M = (a_{ij})$ con $a_{ij} = 0 \ \forall \ i \neq j$ e $a_{ii} = 1 \ \forall \ i$: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

Prime notazioni

Definizione

La **trasposta** di una matrice $m \times n$ è la matrice $n \times m$ ottenuta scambiando le righe con le colonne.

$$X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K) \quad \mapsto \quad X^T = (y_{ij}) \in \mathrm{M}_{nm}(K), y_{ij} = x_{ji}.$$

Esempi

- $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad X^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$
- $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad X^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Prime notazioni

Definizione

Una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}_n(k)$ si dice **simmetrica** se $A = A^T$.

Esempi

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq X^T$, quindi X *non è simmetrica*.
- Ogni matrice diagonale è simmetrica:
  $$X = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = X^T.$$
- $X = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X^T$, quindi X *è simmetrica*.

Definizione (somma)

Se $X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e $Y = (y_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, la **matrice somma** è $X + Y = (x_{ij} + y_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$.

Esempi

- $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \mapsto X + Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$
- $X = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_5),\ Y = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_5),$

$$X + Y = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_5)$$

Operazioni fra matrici - Somma

Osserviamo che $(\mathrm{M}_{mn}(K), +)$ *è un gruppo commutativo*:

- L'elemento neutro è la matrice nulla $0 \in \mathrm{M}_{mn}(K)$:

$$A + 0 = 0 + A = A \ \forall \ A \in \mathrm{M}_{mn}(K).$$

- L'inversa di $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, che d'ora in avanti chiameremo **opposta**, è la matrice $-A = (-a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0.$$

- Vale la proprietà associativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \ \forall \ A, B, C \in \mathrm{M}_{mn}(K).$$

- Vale la proprietà commutativa:

$$A + B = B + A \ \forall \ A, B \in \mathrm{M}_{mn}(K).$$

Operazione fra matrici - Somma

Esempi

- $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}) \mapsto -X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$.
- $X = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{5} & \overline{3} & \overline{6} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_7) \mapsto -X = \begin{pmatrix} \overline{5} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_7)$.

Osservazioni

- La somma di due matrici diagonali è diagonale.
- La somma di due matrici triangolari superiori è triangolare superiore.
- La somma di due matrici triangolari inferiori è triangolare inferiore.

La somma di due matrici simmetriche è simmetrica?

Esempio

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X^T, \;\; Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = Y^T.$$

$$X + Y = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix} = (X+Y)^T.$$

Si, la somma di matrici simmetriche è simmetrica, e più in generale

$$(A+B)^T = A^T + B^T \;\forall\; A, B \in \mathrm{M}_{mn}(K).$$

Definizione (prodotto per scalare)

Se $X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e $\lambda \in K$, $\lambda X = (\lambda x_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$.

Esempi

- $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}),\ 3X = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}).$
- $X = \begin{pmatrix} 2 & 2-i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2}(\mathbb{C}),\ (2+i)X = \begin{pmatrix} 4+2i & 5 \\ 2i-1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2}(\mathbb{C}).$
- $X = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{4} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_5),\ \overline{2}X = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{4} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{23}(\mathbb{Z}_5).$

Operazioni fra matrici - Prodotto

Il **prodotto riga per colonna** di una matrice riga $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ per una matrice colonna $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è definito come:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -4 + 12 + 0 = 8 \in K.$$

Data una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ denotiamo con

$$R_i^A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \ \forall i = 1, \dots, m, \quad C_j^A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \ \forall\, j = 1, \dots, n.$$

Definizione (prodotto fra matrici)

Date $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{nr}(K)$, **la matrice prodotto** $A \cdot B$ è definita come:

$$A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_{mr}, \quad c_{ij} = R_i^A \cdot C_j^B.$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \; A \cdot B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \text{ dove:}$$

$$R_1^A \cdot C_1^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -4 + 12 + 0 = 8 = c_{11},$$

$$R_1^A \cdot C_2^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 + 0 + 0 = 2 = c_{12},$$

$$R_2^A \cdot C_1^B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 + 28 + 25 = 55 = c_{21},$$

$$R_2^A \cdot C_2^B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 + 0 - 15 = -16 = c_{22}.$$

Quindi $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 55 & -16 \end{pmatrix}$.

Operazioni fra matrici - Prodotto

Anche in questo caso si ha che:

- Il prodotto di due matrici diagonali è diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_i^A C_i^B = a_{ii} b_{ii}]{R_i^A C_j^B = 0 \text{ se } i \neq j} AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

- Il prodotto di due matrici triangolari superiori è triangolare superiore.
- Il prodotto di due matrici triangolari inferiori è triangolare inferiore.

Il prodotto di due matrici simmetriche è una simmetrica? NO:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Come vedremo, il problema è che il prodotto fra matrici (quando si può fare) non è commutativo...

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

L'esempio sopra mostra che, in generale potrebbero verificarsi:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- $A \cdot B \not\Rightarrow A = 0$ o $B = 0$.
- $A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow B = C$.
- $A^2 = 0 \not\Rightarrow A = 0$.

Per le prime tre "non-proprietà" basta scegliere A e B come nell'esempio e $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Per la quarta $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proprietà

Date $A, A' \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, $B, B' \in \mathrm{M}_{nr}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{rs}(K)$ (ad esempio $A, A', B, B', C \in \mathrm{M}_n(K)$), valgono le seguenti proprietà:

- Associatività:
$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$
- Distributività:
$$A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$$
$$(A + A') \cdot B = A \cdot B + A \cdot B'.$$

Inoltre si noti che, se $\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$ è la matrice identica, per ogni $A \in \mathrm{M}_n(K)$ si ha:

$$\mathrm{I}_n \cdot A = A = A \cdot \mathrm{I}_n.$$

Dunque, I_n è l'elemento neutro di $\mathrm{M}_n(K)$, grazie all'associatività del prodotto $(\mathrm{M}_n(K), \cdot)$ *è un monoide* (non commutativo). *Non è un gruppo* in quanto non tutte le matrici quadrate sono invertibili:

Esempio

La matrice nulla ovviamente non è invertibile. Ma esistono anche altre matrici non invertibili, ad esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: infatti per ogni $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha $A \cdot B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathrm{I}_2$.

Grazie alla distributività, $(\mathrm{M}_n(K), +, \cdot)$ *è un anello unitario* ($(\mathrm{M}_n(K), +)$ gruppo commutativo e $(\mathrm{M}_n(K), \cdot)$ monoide e "$\cdot$" si distribuisce rispetto a "$+$").

Prodotto e trasposta

Date $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e $B \in \mathrm{M}_{nr}(K)$, si ha:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

La non-commutatività del prodotto spiega perché il prodotto di matrici simmetriche non è necessariamente una matrice simmetrica. Se A e B sono matrici quadrate simmetriche può accadere:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \neq A^T \cdot B^T = A \cdot B.$$

Matrici invertibili

Mentre ogni elemento non nulllo di K è invertibile rispetto al prodotto di K, come abbiamo visto esistono matrici $\neq 0$ che non sono invertibili.

Definizione

Una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ si dice **invertibile** se esiste $B \in \mathrm{M}_n(K)$ tale che:

$$A \cdot B = \mathrm{I}_n = B \cdot A.$$

La **matrice inversa** B, se esiste, è unica, e si denota con A^{-1}.

Esempi

- Abbiamo già osservato che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.
- Si può vedere che anche $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ non è invertibile.
- Invece $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{I}_2 \,.$$

- Si può vedere che $\begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ è invertibile $\iff$ $p \neq 13$.

Definizione

Una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ si dice **nilpotente** se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $A^N = 0$.

Ad esempio, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è nilpotente, poiché $A^2 = 0$.

Esercizio

Una matrice nilpotente non è invertibile.

Sia A una matrice $n \times n$ nilpotente. Si scelga il più piccolo numero naturale N tale che $A^N \neq 0$ e $A^{N+1} = 0$. Se per assurdo A fosse invertibile, chiamiamo $B = A^{-1}$. Avremmo

$$0 = B \cdot 0 = B \cdot A^{N+1} = (B \cdot A) \cdot A^N = \mathrm{I}_n \cdot A^N = A^N,$$

che è evidentemente una contraddizione.

Proprietà

- La matrice identica I_n è invertibile con inversa $I_n^{-1} = I_n$.
- Se una matrice $A \in M_n(K)$ è invertibile, allora A^{-1} è invertibile e la sua inversa è $(A^{-1})^{-1} = A$. Infatti

$$A^{-1} \cdot A = I_n = A^{-1} \cdot A.$$

- Se $A, B \in M_n(K)$ sono invertibili, allora AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, infatti

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A \cdot (BB^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \cdot (A^{-1}A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

Chiameremo $GL_n(K)$ l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili. Le proprietà sopra dimostrano che $(GL_n(K), \cdot)$ è un gruppo.

Matrici invertibili - Matrici elementari

Esempi importanti di matrici invertibili sono le **matrici elementari**:

- La matrice identica I_n è una matrice elementare ($I_n^{-1} = I_n$)
- Dati $i \neq j$, la matrice E_{ij} ottenuta dalla matrice identica scambiando la riga R_i con la riga R_j è una matrice elementare: ad esempio,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_3 \quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti $E_{13} \cdot E_{13} = I_3$. In generale $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

Matrici invertibili - Matrici elementari

- Se $\lambda \in K \setminus \{0\}$, la matrice $\mathrm{E}_i(\lambda)$ ottenuta dalla matrice identica moltiplicando per λ la riga R_i è una matrice elementare: ad esempio,

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to 3R_2 \quad \mathrm{E}_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Si noti $\mathrm{E}_2(3) \cdot \mathrm{E}_2(1/3) = \mathrm{I}_3$. In generale $\mathrm{E}_i(\lambda)^{-1} = \mathrm{E}_i(\lambda^{-1})$.

- Dati $i \neq j$ e $\lambda \in K$, la matrice $\mathrm{E}_{ij}(\lambda)$ ottenuta dalla matrice identica aggiungendo alla riga R_i la riga λR_j è una matrice elementare: ad esempio,

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 + 4R_1 \quad \mathrm{E}_{21}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Si noti $\mathrm{E}_{21}(4) \cdot \mathrm{E}_{21}(-4) = \mathrm{I}_3$. In generale $\mathrm{E}_{ij}(\lambda)^{-1} = \mathrm{E}_{ij}(-\lambda)$.

Schematicamente possiamo dire:

Schema mnemonico

- E_{ij}: $R_i \leftrightarrow R_j$.
- $\mathrm{E}_i(\lambda)$: $R_i \to \lambda R_i$.
- $\mathrm{E}_{ij}(\lambda)$: $R_i \to R_i + \lambda R_j$.

Data una matrice $A \in \mathrm{M}_{nr}(K)$, moltiplicandola a sinistra con una delle matrici elementari otteniamo esattamente l'effetto descritto sopra. Più precisamente:

Proprietà

- $R_i^{\mathrm{E}_{ij}\,A} = R_j^A$, $R_j^{\mathrm{E}_{ij}\,A} = R_i^A$ e $R_k^{\mathrm{E}_{ij}\,A} = R_k^A \ \forall\ i \neq k \neq j$.
- $R_i^{\mathrm{E}_i(\lambda)A} = \lambda R_i^A$ e $R_k^{\mathrm{E}_i(\lambda)A} = R_k^A \ \forall\ k \neq i$.
- $R_i^{\mathrm{E}_{ij}(\lambda)A} = R_i^A + \lambda R_j^A$ e $R_k^{\mathrm{E}_{ij}(\lambda)A} = R_k^A \ \forall\ k \neq i$.

Esempi

Siano $n = 3$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{Q})$. Allora:

- $\mathrm{E}_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathrm{E}_2(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $E_{31}(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Riduzione di Gauss

Lo scopo è, data $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e usando matrici elementari $m \times m$, ridurre A ad una matrice "a scalini":

Matrice "a scalini"

$$\begin{pmatrix} \color{red}{*} & *\dots* & * & *\dots* & * & *\dots* & * \\ 0 & 0\dots0 & \color{red}{*} & *\dots* & * & *\dots* & * \\ 0 & 0\dots0 & 0 & 0\dots0 & \color{red}{*} & *\dots* & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0\dots0 & 0 & 0\dots0 & 0 & *\dots* & * \end{pmatrix}.$$

$\color{red}{* \neq 0}$, vengono detti *pivot*.

Definizione

Una matrice è detta **"a scalini"** (o **ridotta per righe**) se il primo elemento non nullo della riga $i+1$-esima si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga i-.esima. Tali elementi non nulli sono detti **pivot**.

Esempio

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{34}(\mathbb{R})$.
- $\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 9R_1} A' = \mathrm{E}_{31}(1)\mathrm{E}_{21}(-9)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 18 & -30 \\ 0 & 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
- $\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} A'' = \mathrm{E}_{32}(2)A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 18 & -30 \\ 0 & 0 & 35 & -56 \end{pmatrix}$.

In questo caso la matrice ridotta di A ha tre pivot, come il numero di righe.

Partiamo da una matrice non nulla $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{mn}(K)$.

Algoritmo di Gauss per righe

0. Possiamo supporre che la prima colonna non sia nulla (in caso contrario iniziamo l'algoritmo dalla prima colonna non nulla).
1. Possiamo supporre $a_{11} \neq 0$, altrimenti scambiamo R_1 con R_j:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -3 & 18 & -30 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} E_{12}A = \begin{pmatrix} -3 & 18 & -30 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Usando il pivot della prima colonna otteniamo "0" sotto di esso con operazioni del tipo $R_i \to R_i + \lambda R_1, \quad \lambda = -a_{i1}/a_{11}$.
3. Trascurando la prima colonna e la prima riga, torniamo al passo 0.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}_{34}\, \mathrm{E}_{42}(-1)\, \mathrm{E}_{32}(1)\, \mathrm{E}_{31}(-3)\, \mathrm{E}_{21}(-2)\, \mathrm{E}_{14}\, A.$$

Osserviamo che nell'esempio precedente il numero di pivot è 3, che è minore del numero delle righe. In generale, anche se la matrice ridotta non è unica, si può dimostrare che il numero di pivot, che è sempre minore o uguale al numero di righe, non cambia.

Una matrice si dice **totalmente ridotta (per righe)** se è ridotta, i pivot sono uguali a 1 e sopra hanno solo zeri.

Matrice totalmente ridotta

$$\begin{pmatrix}
{\color{red}1} & *\ldots* & 0 & *\ldots* & 0 & *\ldots* & * \\
0 & 0\ldots0 & {\color{red}1} & *\ldots* & 0 & *\ldots* & * \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & {\color{red}1} & *\ldots* & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\
0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & *\ldots* & *
\end{pmatrix}.$$

Esempio (ridotta $\to$ totalmente ridotta)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to 1/2 R_3]{R_2 \to 1/3 R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + 4/3 R_3]{R_1 \to R_1 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $A \to \mathrm{E}_{12}(2)\, \mathrm{E}_{13}(-3)\, \mathrm{E}_{23}(4/3)\, \mathrm{E}_3(1/2)\, \mathrm{E}_2(1/3) A$.

Domanda

Come può essere la totalmente ridotta di una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}_n(K)$?

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 1/2 R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 9/2 \end{pmatrix} = A'$$

$$A' \xrightarrow[]{\substack{R_1 \to 1/2 R_1 \\ R_2 \to 2/9 R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 1/2 R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{E}_{12}(-1/2)\,\mathrm{E}_2(2/9)\,\mathrm{E}_1(1/2)\,\mathrm{E}_{21}(1/2) A = \mathrm{I}_2$.

Matrici invertibili II

Risposta

La totalmente ridotta di una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è I_n o ha (almeno) l'ultima riga nulla.

Teorema

Data una matrice quadrata $A \in \mathrm{M}_n(K)$ sono fatti equivalenti:

(i) A è invertibile.

(ii) La totalmente ridotta di A è I_n.

Diamo una spiegazione di $(ii) \implies (i)$ costruttiva. Per passare da A alla sua totalmente ridotta si fanno operazioni elementari, quindi per ipotesi abbiamo:

$$\mathrm{E}_r \cdots \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{E}_1 \cdot A = \mathrm{I}_n.$$

Ovvero $A^{-1} = \mathrm{E}_r \cdots \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{E}_1$.

Matrici invertibili II

Notando che $A^{-1} = \mathrm{E}_r \cdots \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_r \cdots \mathrm{E}_2 \cdot \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{I}_n$ è la matrice ottenuta a partire da I_n e performando le stesse operazioni elementari effettuate su A per giungere alla sua totalmente ridotta, riducendo totalmente A otteniamo anche la sua inversa.

Esempio

$$(A \mid \mathrm{I}_2) = \left(\begin{array}{cc||cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 1/2 R_1} \left(\begin{array}{cc||cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to 2/9 R_2]{R_1 \to 1/2 R_1} \left(\begin{array}{cc||cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/9 & 2/9 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 1/2 R_2} \left(\begin{array}{cc||cc} 1 & 0 & 4/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 1/9 & 2/9 \end{array}\right)$$

Quindi l'inversa di A è:

$$A^{-1} = \mathrm{E}_{12}(-1/2)\, \mathrm{E}_2(2/9)\, \mathrm{E}_1(1/2)\, \mathrm{E}_{21}(1/2) = 1/9 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio

Determinare (se esiste) l'inversa di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\left(\begin{array}{ccc||ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\mathrm{I}_3 \parallel A^{-1} \right)$$

Definizione

Un **sistema lineare** a coefficienti in K con n incognite $x_1, \ldots, x_n$ e m equazioni ha la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & \ldots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}, \quad a_{ij}, b_i \in K.$$

A un sistema lineare possiamo associare *la matrice dei coefficienti delle incognite* $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e la *matrice dei termini noti* $B \in \mathrm{M}_{m1}(K)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Se la matrice dei termini noti è nulla ($B = 0$) il sistema lineare si dice **omogeneo**.

Esempio ($m = 2$ equazioni in $n = 4$ incognite)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chiamando $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il sistema lineare può essere scritto in forma matriciale:

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}$$

Scritto così un sistema lineare può evocare un'equazione lineare del tipo $ax = b$ con $a, b \in K$, che ammette un'unica soluzione quando $a \neq 0$ (cioè quando a è invertibile): $x = b/a \ (= ba^{-1})$.

Anche se in generale l'analogia nel caso matriciale non avrebbe senso, l'analogia ha senso se $m = n$, cioè quando il sistema lineare ha tante equazioni quante incognite! In tal caso se $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è invertibile, allora $X = A^{-1}B$, e tale soluzione è unica.

Esempio ($m = n = 2$)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -5x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases} \quad \longleftrightarrow \quad A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ è invertibile con inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 26 \end{cases} .$$

Dunque se $m = n$ e $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è invertibile, esiste un'unica soluzione del sistema $AX = B$, ovvero

$$X = A^{-1}B.$$

Essenzialmente questa è la **regola di Cramer** che discuteremo in seguito. (Ricordiamo che $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n1}(K)$ è una soluzione del sistema lineare $AX = B$ se $A\overline{X} = B$ è verificata).

Sistemi lineari

Dato un sistema lineare $AX = B$ con il $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ osserviamo che le soluzioni del sistema non cambiano se:

Osservazioni

- Invertiamo l'ordine di due equazioni $\mapsto$ $R_i \leftrightarrow R_j$.
- Moltiplichiamo un'equazione per $\lambda \in K \setminus \{0\}$ $\mapsto$ $R_i \to \lambda R_i$.
- Operiamo algebricamente (con somme e differenze) sulle equazioni $\mapsto$ $R_i \to R_i + \lambda R_j$.

Quindi, considerando la matrice

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

le soluzioni non cambiano operando la riduzione di Gauss sulle *righe* della matrice $(A \mid B)$.

Riduzione di Gauss per sistemi lineari

- $AX = B$.
- $(A \mid B) \xrightarrow{\text{riduzione di Gauss}} (A' \mid B')$.
- $AX = B$ ha le stesse soluzioni di $A'X = B'$.

Esempio ($m = n = 4, K = \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -5 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{riduzione di Gauss}} \left(\begin{array}{cccc|c} \color{red}{1} & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \color{red}{\textit{incognite pivotali} : x_1, x_3, x_4}$$

Esempio (continuazione)

Quindi risolvere il sistema dell'esempio equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_4 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\textit{partiamo dal fondo}} \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_4 \\ x_3 = 3 + 3x_4 \\ x_4 = -1/2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 - 1/2 = -x_2 + 1/2 \\ x_3 = 3 - 3/2 = 3/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 + 1/2 \\ x_2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

In questo caso diremo che le soluzioni sono ∞^1, dove 1 è il numero di incognite meno il numero di pivot.

Esempio (no soluzioni)

Il seguente è un'esempio di sistema senza soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} \color{red}{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 0 = 1 \quad \lightning \end{cases}$$

In generale, se c'è un pivot ($\lambda \neq 0$) nell'ultima colonna, impostando il sistema si trova $0 = \lambda$ che è impossibile.

Teorema

Dato un sistema lineare $AX = B$ sono fatti equivalenti:

- $AX = B$ ammette soluzioni (il sistema è compatibile).
- Nella matrice ridotta di $(A \mid B)$ *non* esistono pivot nell'ultima colonna.

Proposizione

Dato un sistema lineare $AX = B$ *compatibile*, se n è il numero di incognite ($=$ numero di colonne di A) e p è il numero di pivot di una riduzione di $(A \mid B)$, allora:

- Se $p = n$ esiste un'unica soluzione.
- Se $p < n$ esistono ∞^{n-p} soluzioni.

Osserviamo che un sistema omogeneo ($AX = 0$) è sempre compatibile: $\overline{X} = 0$ è una soluzione!

Esempio

Il seguente sistema a coefficienti reali, essendo omogeneo, è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 3x_3 = -3x_4 \\ x_2 = 3x_3 + 3x_4 \end{cases} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} -3x_4 \\ 3x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quindi $\exists\ \infty^2$ soluzioni ($2 = n - p$).

Esercizio

Discutere l'esistenza delle soluzioni, al variare di $a \in \mathbb{R}$, del seguente sistema a coefficienti reali:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ ax_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 4 \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - aR_1]{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 4-a \end{array}\right) \xrightarrow{a \neq 1}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a & 6-a-a^2 \end{array}\right)$$

Quindi se $a \neq 1, 2$, allora $\exists!$ soluzione (no pivot nell'ultima colonna e $p = n = 3$).

Esercizio (continuazione)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 4-a \end{array}\right) \xrightarrow{a=1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Quindi se $a = 1$, allora $\nexists$ soluzioni (pivot nell'ultima colonna).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a & 6-a-a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{a=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi se $a = 2$, allora $\exists\ \infty^1$ soluzioni (no pivot nell'ultima colonna, $p < n$ e $n - p = 1$).

Esercizio (continuazione)

Riepilogando:

- $a \neq 1,2 \iff \exists!$ soluzione.
- $a = 1 \iff \nexists$ soluzioni.
- $a = 2 \iff \exists\ \infty^1$ soluzioni.

Determiniamo, quando esistono, le soluzioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 2-a & 2-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a & 6-a-a^2 \end{array}\right) \longrightarrow (*) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ (1-a)x_2 + (2-a)x_3 = 2-a^2 \\ (2-a)x_3 = 6-a-a^2 = (2-a)(a+3) \end{cases}$$

$$(*) \xrightarrow{a\neq 1,2} \begin{cases} x_1 = -3 - \frac{a-4}{1-a} = \frac{2a+1}{1-a} \\ x_2 = \frac{a-4}{1-a} \\ x_3 = a+3 \end{cases} , \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2a+1}{1-a} \\ \frac{a-4}{1-a} \\ a+3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{31}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$(*) \xrightarrow{a=2} \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ -x_2 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} , \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio

Determinare le soluzioni, al variare di $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema *omogeneo* (e quindi compatibile!) a coefficienti reali:

$$\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + ky - 2z = 0 \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & k & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - kR_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - 3 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi se $k \neq \pm\sqrt{3}$, allora $\exists!$ soluzione poiché $p = n = 3$, e l'unica soluzione è $0 \in \mathrm{M}_{31}(\mathbb{R})$.

Esercizio (continuazione)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & k^2-3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{k=\pm\sqrt{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (*).$$

Quindi se $k = \pm\sqrt{3}$, allora $\exists\ \infty^1$ soluzioni ($p < n$ e $n - p = 1$).
Determiniamole:

$$(*) \xrightarrow{k=+\sqrt{3}} \begin{cases} x = -z \\ y = \sqrt{3}z \\ 0 = 0 \end{cases} \quad , \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ \sqrt{3}z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(*) \xrightarrow{k=-\sqrt{3}} \begin{cases} x = -z \\ y = -\sqrt{3}z \\ 0 = 0 \end{cases} \quad , \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\sqrt{3}z \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio

Discutere le soluzioni del seguente sistema a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = \overline{2} \\ \overline{2}x_1 + \overline{2}x_2 + \overline{2}x_3 + \overline{2}x_4 = \overline{0} \\ x_1 + x_2 + \overline{2}x_3 + x_4 = \overline{1} \end{cases} \longrightarrow (A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{1} \end{array}\right)$$

$$(A \mid B) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \overline{2}R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + \overline{2}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{9} & \overline{9} & \overline{6} & \overline{9} & \overline{9} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{array}\right) = (A' \mid B')$$

Quindi $\exists\ \infty^2$ soluzioni poiché $n - p = 2$. Osserviamo che

$$(A' \mid B') \to S = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{2} + \overline{2}x_2 + \overline{2}x_4 \\ x_2 \\ \overline{1} \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{Z}_3 \right\}, \quad |S| = 3^2 = 9.$$

Fissiamo una matrice *quadrata* $A \in \mathrm{M}_n(K)$.

- $n = 1 \to A = (a)$. In questo caso il **determinante** di A è

$$\det A = a.$$

- $n = 2 \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. In questo caso

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

ES : $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 2{\cdot}5 - 3{\cdot}4 = -2, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = 2{\cdot}(-6) - 3{\cdot}(-4) = 0.$

Si noti che $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B \quad \det B = 0.$

- $n = 3 \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. In questo caso

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13},$$

dove A_{ij} è la sottomatrice di A ottenuta cancellando R_i e C_j:

$$\text{ES} : A_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

$$\text{ES} : \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1(3-4) + 2(3-0) + 0(2-0) = -1 + 6 = 5.$$

Osservazione

Si può dimostrare che:

- $\det \mathrm{I}_n = 1$, e più in generale $\det \Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ per ogni matrice diagonale $\Delta = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ (diagonale: $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.
- $\det \mathrm{E}_{ij} = -1 \ \forall\ i \neq j \quad (\mathrm{E}_{ij} : R_i \leftrightarrow R_j)$.
- $\det \mathrm{E}_i(\lambda) = \lambda \ \forall\ \lambda \in K^* \quad (\mathrm{E}_i(\lambda) : R_i \to \lambda R_i)$.
- $\det \mathrm{E}_{ij}(\lambda) = 1 \ \forall\ \lambda \in K \quad (\mathrm{E}_{ij}(\lambda) : R_i \to R_i + \lambda R_j)$.

In particolare osserviamo che il determinante di tutte le matrici elementari è $\neq 0$.

Teorema di Binét

Per ogni $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$, $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$.

Come cambia il determinante eseguendo operazioni elementari?

Sfruttando il teorema di Binét e le osservazioni precedenti, partendo da una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$:

- $R_i \leftrightarrow R_j$ il deteminante cambia segno ($\det(\mathrm{E}_{ij}\, A) = -\det A$).
- $R_i \to \lambda R_i$ il deteminante è moltiplicato per λ ($\det(\mathrm{E}_i(\lambda) A) = \lambda \det A$).
- $R_i \to R_i + \lambda R_j$ il deteminante non cambia ($\det(\mathrm{E}_{ij}(\lambda) A) = \det A$).

$$\text{ES} : A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\det A = \det B = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 8$$

In particolare osserviamo che il determinante di A è $\neq 0$ se e solo se il determinante della totalmente ridotta A' è $\neq 0$.

Determinante

Teorema

Una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. Inoltre, se A è invertibile, allora $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. Infatti per Binét,

$$\det A \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det \mathrm{I}_n = 1.$$

Espansione di Laplace

Data $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ abbiamo:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

dove A_{ij} è la sottomatrice di A ottenuta cancellando R_i e C_j.

ES : $\substack{n=3\\ i=2}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \det A = -a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22} - a_{23} \det A_{23}.$

Esempio

Calcoliamo il determinante della seguente $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{i=3} \det A =$$

$$0 - 2\det\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2(-8) + 3(-1) = 13.$$

L'espansione di Laplace si può fare anche per colonne: data $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$, per ogni $j = 1, \ldots, n$ abbiamo:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

Esempio

Calcoliamo il determinante della seguente $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{terza colonna}} \det A =$$

$$-1 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 0 = -1(1) - 1(0) = -1.$$

Corollario

Per ogni matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ abbiamo

$$\det A = \det A^T.$$

Esercizio

Calcolare il determinante della seguente matrice $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ e stabilire se è invertibile:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Dunque, sviluppando rispetto alla prima colonna, abbiamo

$$\det A = \det B = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det C.$$

$$C \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{prima colonna}} \det C = 1 \det \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = -6.$$

Perciò $\det A = -6 \neq 0$, quindi A è inverrtibile e $\det A^{-1} = -1/6$.

Osservazione

L'espansione di Laplace si può fare anche sviluppando su più righe (o colonne) contemporaneamente: ad esempio il determinante della matrice $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ precedente,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si può anche calcolare come segue:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(1)(-4) - (2)(-3) + (4)(1) - 0 - (-4)(3) + (-8)(3) = -6.$$

Esercizio per casa (*)

Dimostrare per induzione su n che per una matrice triangolare superiore ($a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$) o inferiore ($a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$) $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$:

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Osservazioni

Il determinante di $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è 0 se:

- una riga (o una colonna) di A sono 0.
- due righe (o due colonne) di A sono uguali o proporzionali.

$$\text{ES} : A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \det A = 0.$$

Ricordiamo che una matrice $A \in \mathrm{M}_n(K)$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. Data una matrice invertibile $A \in \mathrm{M}_n(K)$, tramite la riduzione (totale) di Gauss possiamo calcolare A^{-1}.

Mostreremo un metodo alternativo per il calcolo di A^{-1}.

Complemento algebrico

Data $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$, il **complemento algebrico** di a_{ij} è:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \in K,$$

dove A_{ij} è la sottomatrice di A ottenuta cancellando R_i e C_j.

Matrici invertibili III

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Definizione - Matrice aggiunta

Data $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$, la sua **aggiunta** è:

$$A^* = (c_{ij})^T \in \mathrm{M}_n(K).$$

Esempio is ($K = \mathbb{Q}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \ c_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -16.$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \ c_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \ c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 12.$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \ c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \ c_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -16 \\ 0 & -3 & 12 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esempio (continuazione)

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -16 \\ 0 & -3 & 12 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

In un esercizio precedente avevamo visto che $\det A = -6$. Quindi A è invertibile e

$$A^{-1} = -1/6A^* = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 8/3 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 1/3 & -1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Teorema

Data $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A\, \mathrm{I}_n$. In particolare, se $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Esempio ($n = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -cb + da \end{pmatrix} \xrightarrow{se \quad ad-bc\neq 0} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

$$ES: \quad A = \begin{pmatrix} \overline{3} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7) \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{5} \\ \overline{6} & \overline{3} \end{pmatrix}.$$

Si noti che $\det A = \overline{4}$, e quindi $\frac{1}{\det A} = \overline{2}$. Dunque

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{5} & \overline{6} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_7).$$

Definizione

Data $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ un **minore** di ordine r è una sottomatrice $r \times r$ di A (ottenuta considerando r righe e r colonne).

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(R_1 R_2 \mid C_3 C_4) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (R_1 R_3 \mid C_1 C_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(R_2 \mid C_4) = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}, \ (R_1 R_2 R_3 \mid C_1 C_2 C_4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = (C_1 C_2 C_4).$$

La matrice A possiede $\binom{3}{2}\binom{4}{2} = 18$ minori di ordine 2, $\binom{3}{3}\binom{4}{3} = 4$ minori di ordine 3, nessun minore di ordine 4.

Osserviamo che, essendo un minore una matrice quadrata, ha senso calcolarne il determinante:

Definizione

Il **rango** (o la **caratteristica**) di $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, denotato con $\mathrm{rk}(A)$ (o $\rho(A)$) è il massimo ordine di un minore con determinante $\neq 0$.

Osservazioni

- $A \in \mathrm{M}_{mn}(K) \implies \mathrm{rk}(A) \leq \min\{m, n\}$.
- Se $A \in \mathrm{M}_n(K)$, allora $\mathrm{rk}(A) = n \iff \det A \neq 0$.
- Se $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, allora $\mathrm{rk}(A) = 0 \iff A = 0$.

Rango

Osservazione

Dalla definizione, $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ ha rango r se e solo se:

(i) Esiste un minore di A di ordine r con determinante non nullo.

(ii) Tutti i minori di A di ordine $\geq r+1$ hanno determinante nullo.

Grazie al calcolo del determinante tramite l'espansione di Laplace, il punto (ii) può essere sostituito da:

(iii) Tutti i minori di A di ordine $= r+1$ hanno determinante nullo.

Bisogna calcolare tutti i minori di ordine $r+1$? (Sono $\binom{m}{r+1}\binom{n}{r+1}$...).

Teorema (Kronecker)

Una matrice $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ ha rango r se e solo se:

(i) Esiste un minore M di A di ordine r con determinante non nullo.

(ii) Tutti i minori di A di ordine $= r+1$ ottenuti "orlando" M hanno determinante nullo (sono soltanto $(m-r)(n-r)$...)

Esempio ($K = \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rk}(A) \leq 4.$$

Siccome $R_1 = R_2 + R_3$ si ha $\det A = 0$, e quindi $\mathrm{rk}(A) \leq 3$. D'altra parte $\mathrm{rk}(A) \geq 2$ poiché

$$\det(R_2 R_4 \mid C_1 C_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

La matrice A possiede $\binom{4}{3}\binom{4}{3} = 16$ minori di ordine 3, ma solo 4 orlano $(R_2 R_4 \mid C_1 C_3)$:

$$(R_1 R_2 R_4 \mid C_1 C_2 C_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; (R_1 R_2 R_4 \mid C_1 C_3 C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(R_2 R_3 R_4 \mid C_1 C_2 C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; (R_2 R_3 R_4 \mid C_1 C_3 C_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tutti e quattro hanno determinante nullo, quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$ per Kronecker.

Rango di una matrice ridotta per righe

$$A = \begin{pmatrix} * & *\ldots* & * & *\ldots* & * & *\ldots* & * \\ 0 & 0\ldots0 & * & *\ldots* & * & *\ldots* & * \\ 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & * & *\ldots* & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & *\ldots* & * \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mn}(K).$$

Se il numero di pivot di A è p, allora ogni minore di ordine $\geq p+1$, avendo le ultime righe nulle, ha determinante nullo. D'altra parte il minore ottenuto considerando le prime p righe e le p colonne corrispondenti ai pivot ha determinante $\neq 0$, dunque $\mathrm{rk}(A) = p$.

$$ES: \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{rk}(A)=3]{(R_1R_2R_3|C_1C_3C_4)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Eseguendo operazioni elementari il rango rimane lo stesso?

Proposizione

Siano $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, $B \in \mathrm{GL}_n(K)$, $C \in \mathrm{GL}_m(K)$. Allora

$$\mathrm{rk}(CA) = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(AB).$$

Essendo le matrici elementari invertibili, dunque la risposta alla domanda è SI. Ciò ci permette di calcolare il rango di una matrice tramite la riduzione di Gauss.

Esercizio

Calcolare il rango di $A \in \mathrm{M}_{24}(\mathbb{R})$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2a & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad 1 \leq \mathrm{rk}(A) \leq 2.$$

Il seguente minore di ordine 2 ha determinante $2a$:

$$(C_1 C_2) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$ se $a \neq 0$. Se $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(C_2 C_3)} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \mathrm{rk}(A) = 2.$$

Dunque, $\mathrm{rk}(A) = 2 \ \forall \ a \in \mathbb{R}$.

Esercizio

Calcolare il rango di $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 1 & h \end{pmatrix} \qquad 1 \leq \mathrm{rk}(A) \leq 3.$$

Il seguente minore di ordine 3 ha determinante $1 - h$:

$$\det(C_2 C_3 C_4) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & h \end{vmatrix} = 1 - h$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 3$ se $h \neq 1$.

Esercizio (continuazione)

Se $h = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$$\det(R_2 R_3 \mid C_2 C_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \implies \mathrm{rk}(A) \geq 2.$$

Orliamo questo minore di ordine 2 con C_1 (e R_1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-3) = -2 \neq 0 \implies \mathrm{rk}(A) = 3.$$

Dunque, $\mathrm{rk}(A) = 3 \ \forall \ h \in \mathbb{R}$.

Esercizio

Calcolare il rango di $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2h & -2 \\ -3 & 2+2h & -1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overset{1 \leq \mathrm{rk}(A) \leq 3}{\mathrm{rk}(A)=3 \iff \det A \neq 0}.$$

Osserviamo che $\det A = \det(\mathrm{E}_{21}(-1)A)$, che è uguale a

$$\begin{vmatrix} -3 & 2h & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ h & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} 2h & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 + h(2h+4) = 2h^2 + 4h - 6.$$

Ma $h^2 + 2h - 3 = 0$ se e solo se $h = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$, cioè se e solo se $h = 1$ o $h = 3$. Quindi $\mathrm{rk}(A) = 3$ se e solo se $1 \neq h \neq -3$.

Esercizio (continuazione)

D'altra parte, per ogni $h \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2h & -2 \\ -3 & 2+2h & -1 \\ h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango ≥ 2: infatti

$$\det(R_1 R_2 \mid C_1 C_3) = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Dunque, $\mathrm{rk}(A) = 2$ se $h = 1, -3$ e $\mathrm{rk}(A) = 3\ \forall\ h \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$.

Sistemi lineari II

Terminiamo la teoria dei sistemi lineari:

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{X} = \underset{m\times 1}{B}$$

Teorema di Cramer (numero delle equazioni = numero di incognite)

Se $m = n$, $AX = B$ ammette *una sola* soluzione $\iff \det A \neq 0$.

Ricordiamo infatti che $\det A \neq 0 \iff \exists\, A^{-1}$, e dunque

$$AX = B \implies X = A^{-1}B.$$

Andiamo a descrivere l'unica soluzione $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Se A è invertibile, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

$$AX = B \iff X = A^{-1}B \iff X = \frac{1}{\det A} A^* B.$$

Si dimostra che l'unica soluzione $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ è data da:

$$\overline{x_i} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \qquad C_i^A \leftrightarrow B.$$

Quindi, se $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, l'unica soluzione $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$ è data da:

$$\overline{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad \overline{x_2} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_1 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad \dots$$

Esempio

Usiamo Cramer per risolvere il seguente sistema a 3 equazioni e 3 incognite:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \quad \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$, il sistema ha una sola soluzione $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{9}{5}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3}{5}.$$

... E se $\det A = 0$? Può essere sia che non esistano soluzioni o che ce ne sia più di una... In generale:

Teorema di Rouché-Capelli (m equazioni, n incognite)

Dati $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$ e $B \in \mathrm{M}_{m1}(K)$, il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni $\iff$ $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B)$.
Inoltre, nel caso ci siano soluzioni, queste saranno $\infty^{n-\mathrm{rk}(A)}$.

La dimostrazione usa i seguenti due fatti:

- Il rango di una matrice è $=$ al numero di pivot della riduzione.
- $AX = B$ ha soluzione se e solo se $\nexists$ pivot nell'ultima colonna della riduzione di $(A \mid B)$.

Infatti $\mathrm{rk}(A \mid B) \geq \mathrm{rk}(A)$ sempre, e vale $>$ se e solo se esiste un pivot nell'ultime colonna della riduzione di $(A \mid B)$.

Esercizio (3 equazioni, 3 incognite)

Discutere le soluzioni al variare di $t \in \mathbb{R}$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + tz = 1 \\ 3x + ty - 2z = 2 \\ tx + 2z = 1 \end{cases} \quad \to \; A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 3 & t & -2 \\ t & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per Cramer, il sistema ha una sola soluzione se e solo se $\det A \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & t \\ 3 & t & -2 \\ t & 0 & 2 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 2 & t \\ t & 2 \end{vmatrix} = t(4 - t^2),$$

quindi $\exists!$ soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{31}(\mathbb{R})$ se e solo se $t \neq 0$ e $t \neq \pm 2$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & t & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{t(4-t^2)} = \frac{t(2-t)}{t(4-t^2)} = \frac{1}{2+t}, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & t \\ 3 & 2 & 2 \\ t & 1 & 2 \end{vmatrix}}{t(4-t^2)}, \; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & t & 2 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{t(4-t^2)}.$$

Esercizio (continuazione)

Se $t = 0$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.Il rango di A è 2 perché $\det A = 0$ e $\det(R_1 R_2 \mid C_1 C_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Ma $\mathrm{rk}(A \mid B) = 3 > 2 = \mathrm{rk}(A)$ perché

$$\det(C_1 C_3 C_4) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Per Rouché-Capelli allora $\nexists$ soluzione se $t = 0$. Se $t = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.Il rango di A è 2 perché $\det(R_1 R_2 \mid C_1 C_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ e $\det A = 0$; anche il rango di $(A \mid B)$ è 2: basta provare che i minori di ordine 3 che orlano $(R_1 R_2 \mid C_1 C_2)$, cioè $(C_1 C_2 C_3)$ e $(C_1 C_2 C_4)$, hanno determinante nullo.

Esercizio (continuazione)

Ma $(C_1 C_2 C_3) = A$ che già sappiamo avere determinante nullo, e

$$\det(C_1 C_2 C_4) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quindi per Rouché-Capelli, siccome $n - \mathrm{rk}(A) = 1$, $\exists\ \infty^1$ soluzioni se $t = 2$. Si veda per esercizio a casa che, se $t = -2$, $\mathrm{rk}(A) = 2$ e $\mathrm{rk}(A \mid B) = 3$, dunque non ci sono soluzioni per R-C. Ricapitolando:

- $\forall\ t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$, $\exists!$ soluzione.
- Se $t = 2$, $\exists\ \infty^1$ soluzioni.
- Se $t = 0, -2$, $\nexists$ soluzioni.

Esercizio (3 equazioni, 4 incognite)

Discutere le soluzioni al variare di $a \in \mathbb{R}$ del sistema lineare $AX = B$ dove:

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Per Rouché-Capelli $\exists$ soluzioni se e solo se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B)$. Si noti che $\mathrm{rk}(A) \leq \mathrm{rk}(A \mid B) \leq 3$, e si consideri il minore di ordine 3 di A $(C_1 C_2 C_4)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1,$$

dunque se $a \neq 1/2$ il determinante di $(C_1 C_2 C_4)$ non è 0, e quindi in questo caso $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B) = 3$ ed esistono soluzioni per R-C. Poiché $n - \mathrm{rk}(A) = 1$, $a \neq 1/2 \implies \exists\ \infty^1$ soluzioni.

Esercizio (continuazione)

Se $a = 1/2$,

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A' \mid B').$$

Quindi $\mathrm{rk}(A \mid B) = \mathrm{rk}(A' \mid B') = 2$. Ma anche A ha rango 2 perché $\det(R_1 R_3 \mid C_1 C_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, quindi per R-C, se $a = 1/2$, esistono ∞^2 soluzioni. Ricapitolando:

- Se $a \neq 1/2$, $\exists\ \infty^1$ soluzioni.
- Se $a = 1/2$, $\exists\ \infty^2$ soluzioni.

Esercizio (sistema omogeneo)

Discutere le soluzioni al variare di $h \in \mathbb{R}$ del seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, w:

$$\begin{cases} x - y + 2hz + 2w = 0 \\ x + hy - z + 2hw = 0 \\ x - hy + (h+1)z + 2w = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2h & 2 \\ 1 & h & -1 & 2h \\ 1 & -h & h+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiché il sistema è omogeneo esiste almeno una soluzione. Inoltre essendo il numero di incognite (4) $>$ del numero di equazioni (3), le soluzioni devono essere infinite (precisamente ∞^{4-p} dove $p = \mathrm{rk}(A) \leq 3$):

$$\det(C_1 C_2 C_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2h \\ 1 & h & -1 \\ 1 & -h & h+1 \end{vmatrix} = 1(h+1+1)+h(h+1-2h)+h(-1-2h) = h+2-3h^2.$$

Poiché $-3h^2 + h + 2 = 0 \iff h = 1$ o $h = -2/3$. Quindi $\forall\ h \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2/3\}$ si ha $\mathrm{rk}(A) = 3$, e perciò esistono ∞^1 soluzioni.

Esercizio (continuazione)

$$h = 1 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$R_1 = R_3 \implies \mathrm{rk}(A) \leq 2$, e poiché $\det(R_1 R_2 \mid C_1 C_2) = 2$ abbiamo $\mathrm{rk}(A) = 2$, dunque $h = 1 \implies \exists\ \infty^2$ soluzioni.

$$h = -2/3 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4/3 & 2 \\ 1 & -2/3 & -1 & -4/3 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}.$$

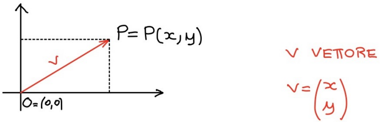
$\det(C_1 C_3 C_4) \neq 0 \implies \mathrm{rk}(A) = 3$, dunque $h = -2/3 \implies \exists\ \infty^1$ soluzioni. Quindi ricapitolando:

- Se $h \neq 1$, $\exists\ \infty^1$ soluzioni.
- Se $h = 1$, $\exists\ \infty^2$ soluzioni.

Vettori nel piano

Un vettore in K^n è semplicemente una matrice colonna in $\mathrm{M}_{n1}(K)$.

In $\mathbb{R}^2$ consideriamo un sistema di coordinate ortogonali. Un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ può essere raffigurato nel seguente modo:



Al vettore v (applicato in O), sono associate le seguenti quantità:

- **lunghezza**: $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\|$.
- **direzione**: retta per O e per P.
- **verso**.

Esempi di vettori in $\mathbb{R}^2$

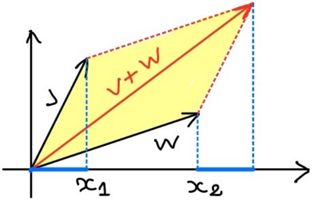
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \end{pmatrix}, \dots$

Somma

La **somma** di due vettori $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ è semplicemente la somma matriciale

$$v + w = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad ES : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Graficamente si usa la *regola del parallelogramma*:

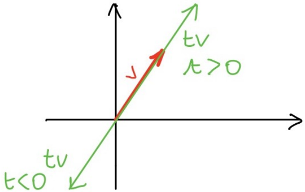


Diseguaglianza triangolare

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$, si ha $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Moltiplicazione di un vettore per $t \in \mathbb{R}$

Dato $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $t \in \mathbb{R}$, $tv = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$.



Osservazioni

Dati due vettori v, w,

- $-v = (-1)v$.
- $v - w = v + (-w)$.

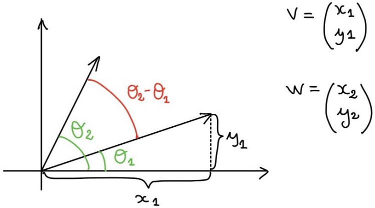
Prodotto scalare

Dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ il **prodotto scalare** di v per w è:

$$v \cdot w = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

Osserviamo che il prodotto scalare $v \cdot w$ è uguale al prodotto riga per colonna $v^T \cdot w$. Osserviamo che il prodotto scalare $v \cdot w$ a volte viene anche scritto come $\langle v, w \rangle$.

Per dare un'interpretazione geometrica del prodotto scalare osserviamo che ogni vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ può essere scritto come $v = \begin{pmatrix} \|v\| \cos\theta \\ \|v\| \sin\theta \end{pmatrix}$ per qualche $\theta \in \mathbb{R}$.



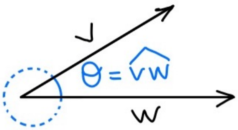
$x_1 = \|v\| \cos\theta_1 \qquad y_1 = \|v\| \sin\theta_1$

$x_2 = \|w\| \cos\theta_2 \qquad y_2 = \|w\| \sin\theta_2$

$$v \cdot w = \|v\|\|w\|(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) = \|v\|\|w\| \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

Quindi $v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos(\theta_2 - \theta_1)$.

Chiamiamo $\theta = \theta_2 - \theta_1$ (possiamo supporre $0 \leq \theta \leq \pi$). L'angolo θ verrà denotato con $\widehat{vw}$:



$0 \leq \theta \leq \pi$

Possiamo quindi dedurre che:

Osservazioni

Dati due vettori v, w come sopra:

- $v \cdot w = 0 \iff v \perp w$.
- $v \cdot w > 0 \iff \theta < \pi/2$.
- $v \cdot w < 0 \iff \theta > \pi/2$.

Esercizio

Dato $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, trovare i vettori $w \in \mathbb{R}^2$ perpendicolari a v.

Chiamando $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v \perp w \iff v \cdot w = -a + 3b = 0$, quindi

$$w \perp v \iff w = \begin{pmatrix} 3b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{per qualche } b \in \mathbb{R}.$$

Esercizio

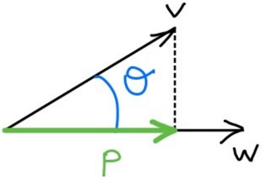
Determinare l'angolo $\widehat{vw}$ fra $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\cos \widehat{vw} = \frac{v \cdot w}{\|v\|\|w\|} = \frac{2-1}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Quindi si ha che $\widehat{vw} = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Proiezione ortogonale di v su w

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$, la proiezione ortogonale di v su w è il vettore $p = \frac{v \cdot w}{\|w\|} \frac{w}{\|w\|} \in \mathbb{R}^2$.



$$\|p\| = \|v\| \, |\cos\theta| = \frac{v \cdot w}{\|w\|}$$

Esempio

Determinare la proiezione ortogonale di $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ su $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha $v \cdot w = -1$ e $\|w\| = 1$, quindi

$$p = w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vettori

Tutto può essere esteso a $\mathbb{R}^n$, o più in generale a K^n. Dati $\lambda \in K$ e due vettori $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $(x_i, y_i \in K)$ abbiamo:

- (somma): $v + w = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$.
- (prodotto per $\lambda \in K$): $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

Le due operazioni sopra conferiscono a K^n una struttura di K-spazio vettoriale...

Definizione (K-spazio vettoriale)

Un insieme V si dice K-**spazio vettoriale** se esistono due operazioni $+ : V \times V \to V$ e $\cdot : K \times V \to V$ tali che:

- $(V, +)$ è un gruppo commutativo.
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ per ogni $\lambda \in K, v, w \in V$.
- $(\gamma + \lambda) \cdot v = \gamma \cdot v + \lambda \cdot v$ per ogni $\gamma, \lambda \in K, v \in V$.
- $1 \cdot v = v$ per ogni $v \in V$.
- $(\gamma\lambda) \cdot v = \gamma \cdot (\lambda \cdot v)$ per ogni $\gamma, \lambda \in K, v \in V$.

Si può dimostrare che i K^n sono gli unici K-spazi vettoriali di dimensione finita...

Dati due vettori $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in K^n abbiamo:

- (lunghezza $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$): $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \in K$.
- (prodotto scalare): $v \cdot w = v^T w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in K$.
- (proiezione ortogonale di v su w $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$):
  $p = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2} w \in K^n$.

Osservazioni

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, e chiamando $\theta = \widehat{vw}$ l'angolo fra loro compreso:

- $v \cdot w = 0 \iff v \perp w$.
- $v \cdot w > 0 \iff \theta < \pi/2$.
- $v \cdot w < 0 \iff \theta > \pi/2$.

Esercizio

Determinare la proiezione ortogonale dei vettori di $\mathbb{R}^3$ $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ha $v \cdot w = -2$ e $\|w\| = \sqrt{5}$, quindi $\|p\| = 2/\sqrt{5}$ e

$$p = -2/5w = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -4/5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prodotto vettoriale in K^3

In K^3 è possibile performare un'altra operazione, detto **prodotto vettoriale**: dati $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, il prodotto vettoriale $v \wedge w$ è un *vettore* in K^3 ottenuto considerando i minori di ordine 2 della matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(K)$ come segue:

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} \det(R_2 R_3) \\ -\det(R_1 R_3) \\ \det(R_1 R_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Esempio

Calcoliamo il prodotto vettoriale dei vettori di $\mathbb{R}^3$ $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considerando la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{32}(\mathbb{R})$ si ha:

$$h = v \wedge w = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $h \cdot v = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ e $h \cdot w = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Osservazione

Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$v \perp (v \wedge w) \qquad w \perp (v \wedge w)$$

Esercizio

Esibire un vettore $u \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza 1 e ortogonale a $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e a $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considerando la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{32}(\mathbb{R})$ si ha $v \wedge w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dunque

$$u = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad \left\| \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{12\lambda^2} = 1.$$

Quindi $\lambda = \pm 1/\sqrt{12}$ e $u = \pm 1/\sqrt{12} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \pm 1/\sqrt{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

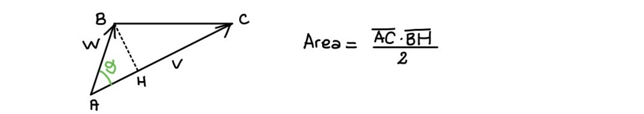
Osservazione

Si può provare che, dati $v, w \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\|v \wedge w\| = \|v\|\|w\| \sin \widehat{vw}.$$

In particolare $v \wedge w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se v e w sono paralleli.

Area del triangolo



Si ha che l'area è $\frac{\|\vec{AC}\|\|\vec{BH}\|}{2}$ dove $\vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$ e $\vec{BH} = \begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \\ z_H - z_B \end{pmatrix}$ ($z_A = z_B = z_C = z_H = 0$ perché siamo sul piano). Quindi

$$\|\vec{BH}\| = \|\vec{AB}\| \sin\theta \implies \text{Area} = \frac{\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\| \sin\theta}{2} = \frac{\|\vec{AC} \wedge \vec{AB}\|}{2}.$$

Esempio

Calcoliamo l'area del triangolo dai vertici $A = (-2, 1)$, $B = (1, 5)$ e $C = (0, 2)$. Si ha

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 2-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 5-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$ si ha $v \wedge w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Dunque

$$\text{Area} = \frac{\|v \wedge w\|}{2} = \frac{5}{2}.$$

.

Definizione (combinazione lineare)

Dati vettori $v_1, \ldots, v_r \in K^n$, diremo **combinazione lineare** di $v_1, \ldots, v_r$ a coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ il vettore

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r \in K^n.$$

$$ES: \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow[\lambda_2=-4]{\lambda_1=3} 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = w \in \mathbb{R}^3,$$

dunque w è combinazione lineare di v_1 e v_2.

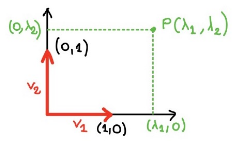
Definizione

Dati vettori $v_1, \ldots, v_r \in K^n$, chiameremo l'insieme delle loro combinazioni lineari lo **spazio vettoriale generato** da $v_1, \ldots, v_r$, e tale insieme verrà denotato con $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$. In simboli

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r : \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\} \subset K^n.$$

Dipendenza lineare

Esempio

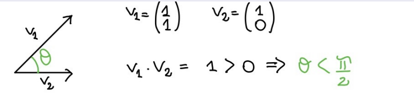


Consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

Esempio

Consideriamo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, e notiamo che $v_1 \not\parallel v_2$:



$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esempio (continuazione)

Proviamo che $\langle v_1, v_2\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2 : \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
$\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$? Si:

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = a \\ \lambda_1 = b \end{cases} \xrightarrow{\lambda_i \quad incognite} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = 1 \neq 0$, per il teorema di Cramer esiste (un' unica) soluzione, quindi $\langle v_1, v_2\rangle = \mathbb{R}^2$.

Esercizi

Usare lo stesso argomento per provare:

- $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. (qui il sistema verrà a 2 equazioni e 3 incognite!)

Dipendenza lineare

Esempi

- $\mathbb{R}^2 \neq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$: $\nexists\, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\mathbb{R}^2 \neq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, quindi

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \mathbb{R}^2.$$

Esercizio

Provare che $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cerco $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio (continuazione)

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 2 \\ 2\lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{dal\ \ fondo} \begin{cases} 2(1) + 3(-1) = -1 \ \checkmark \\ \lambda_1 - (-1) = 2 \implies \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definizionme - vettori linearmente dipendenti

I vettori $v_1, \dots, v_r \in K^n$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ *non tutti nulli* tali che:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r = 0 \leftarrow \textit{vettore nullo}.$$

Esempio

I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti poiché, per esempio, $3/2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$. In generale:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \xrightarrow{\textit{sistema omogeneo}} \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{rk}(A)=2} \exists\ \infty^1 \text{ soluzioni: } \lambda_2 = -3\lambda_3;\ \lambda_1 = 3/2\lambda_3.$$

Definizione - vettori linearmente indipendenti

I vettori $v_1, \dots, v_r \in K^n$ sono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti. Equivalentemente, se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

Esempio

I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\to \det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \xrightarrow{Cramer} \exists! \text{ soluzione: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Quindi si: v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

Osservazione

I vettori $v_1, \dots, v_r \in K^n$ sono linearmente dipendenti $\iff$ uno di essi è combinazione lineare degli altri. Ad esempio, i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti. In questo caso $v_3 = 3v_2 - 3/2v_1$.

Esercizo

Provare che $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Dobbiamo provare che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_3 = c \end{cases}$$

Quindi $\lambda_1 = (a-b)/2, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c$ funzionano $\checkmark$.

Definizione - Base

Dati vettori $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ e chiamando $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$, diciamo che $v_1, \ldots, v_r$ sono una **base** di V se sono linearmente indipendenti.

Esempio

I vettori dell'esercizio precedente, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sono una base di $\mathbb{R}^3$: avendo già dimostrato che $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \mathbb{R}^3$, dobbiamo provare la lineare indipendenza:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\checkmark$.

Basi canoniche

Osserviamo che:

- I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di K^2.
- I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di K^3.
- I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono una base di K^4.

... In generale i vettori $e_1, \dots, e_n \in K^n$, dove $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$, sono una base di K^n (cioè $K^n = \langle \underbrace{e_1, \dots, e_n}_{l.\ i.} \rangle$), e si chiamano la **base canonica** di K^n.

Esercizo

Provare che $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \right\rangle$. Dobbiamo provare che per ogni $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 = a\\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = b\end{cases} \quad .$$

Quindi $\lambda_2 = (b - 3\lambda_3)/2, \lambda_1 = a - b + 3\lambda_3$ sono soluzioni. Quindi. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$, ma non sono linearmente indipendenti perché se $a = b = 0$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3/2, \lambda_3 = 1$ è una soluzione non nulla di $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = 0$.

Basi

Come possiamo vedere in modo concreto se $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ sono linearmente indipendenti?

- $v \in K^n$ l. d. $\iff$ $v = 0$ $(v \neq 0, \lambda v = 0 \implies \lambda = 0)$.
- $v_1, v_2 \in K^n$ l. d. $\iff$ v_1 e v_2 sono proporzionali $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ con $\lambda_1 \neq 0 \implies v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2)$.

Esempio

I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti: $2v_1 + v_2 = 0$.

Basi

In generale, $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice $(v_1 \ \ldots \ v_r) \in \mathrm{M}_{nr}(K)$ ha rango r.

Esempio

I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono l. d. o l. i.?

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} v_1, v_2, v_3 \text{ linearmente indipendenti} \\ (\exists! \text{ soluzione } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0) \end{matrix} \iff \mathrm{rk} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3.$$

Ma $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3(-4+6) - 1(2-8) = 0$, quindi il rango di $(v_1 \ v_2 \ v_3) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ è minore di 3, dunque v_1, v_2, v_3 sono l. d.

Come conseguenza abbiamo:

- $v_1, \dots, v_r \in K^n$ con $r > n$ sono necessariamente linearmente dipendenti $(\mathrm{rk}(v_1 \ \dots \ v_r) \leq \min\{r, n\} < r)$.

  Per esempio, 4 vettori in $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente dipendenti.

- $v_1, \dots, v_n \in K^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\left| v_1 \ \dots \ v_n \right| \neq 0$ $(\mathrm{rk}(v_1 \ \dots \ v_n) = n \iff \left| v_1 \ \dots \ v_n \right| \neq 0)$.

Basi

Ricordiamo che lo spazio vettoriale generato da $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ è l'insieme delle loro combinazioni lineari, e viene denotato con

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r : \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\} \subset K^n.$$

Dunque un vettore $w \in K^n$ sta in $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ se e solo se

$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r$ se e solo se

il sistema lineare $AX = B$, dove $A = (v_1 \ \ldots \ v_r) \in \mathrm{M}_{nr}(K)$ e

$B = w$, è compatibile: una soluzione è $\overline{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$.

Questo ragionamento, insieme alla teoria dei sistemi lineari che abbiamo visto, porta a dire che, usando le stesse notazioni:

- $w \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ se e solo se $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \mid B)$.
- $v_1, \ldots, v_n$ è una base di K^n se e solo se $v_1, \ldots, v_n$ sono l. i.

Basi

Nell'esempio precedente $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché sono linearmente dipendenti.

Esercizio

I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti? Sono una base di $\mathbb{R}^4$?

La matrice $A = (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3) \in \mathrm{M}_{43}(\mathbb{R})$ è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \mathrm{rk}(A) = 3.$$

Esercizio (continuazione)

Quindi v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Ma non sono una base di $\mathbb{R}_4$ poiché non generano: per esempio il vettore $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \setminus \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$:

$$\det(A \mid w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \mid R_1 R_2 R_3 | C_1 C_2 C_3 \mid = 7 \neq 0$$

$$\implies \operatorname{rk}(A \mid w) = 4 > 3 = \operatorname{rk}(A).$$

Osserviamo che, quindi, v_1, v_2, v_3, w sono linearmente indipendenti, e dunque (essendo 4 vettori) sono una base di $\mathbb{R}^4$.

Dimensione

Si può vedere che, dati $v_1, \dots, v_r \in K^n$, $V = \langle v_1, \dots, v_r \rangle \subset K^n$ ammette una base. Inoltre ogni base di V è **equipotente**, cioè ogni base di V è formata dallo stesso numero di elementi, diciamo m. Chiameremo m la **dimensione** di V, e scriveremo

$$\dim_K V = m$$

In particolare K^n ha dimensione n, perché la base canonica $e_1, e_2, \dots, e_n$ ha n elementi (e perciò ogni altra base di K^n ha n elementi). D'altronde, come abbiamo già detto, n vettori linearmente indipendenti di K^n sono una base di K^n.

Esempio

I vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono una base di $\mathbb{R}^3$? Si perché sono tre e linearmente indipendenti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (18-12)-(9-4)+(3-2) = 2 \neq 0 \implies v_1, v_2, v_3 \text{ l. i.}$$

Esercizio (Estrazione di basi)

Provare che i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$. È possibile"estrarre" una base di $\mathbb{R}^3$ da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$?

I vettori v_1, v_2, v_3, v_4 non sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché una base di $\mathbb{R}^3$ deve consistere di tre vettori. Posso estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $\exists 1 \leq i < j < k \leq 4$ tali che v_i, v_j, v_k sono linearmente indipendenti, il che è vero se e solo se $\mathrm{rk}(A) = 3$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio (continuazione)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(R_1 R_2 \mid C_1 C_2) = 1 \neq 0 \implies \mathrm{rk}(A) \geq 2.$$

Orlando questo minore di ordine 2, abbiamo

$$\det(C_1 C_2 C_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2-3) + (2-1) = 0,$$

$$\det(C_1 C_2 C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+1) - (2-1) = 0,$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$ per Kronecker, e dunque non possiamo estrarre una base da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Esercizio (Completamento a base)

Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ contenente i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. È possibile perché v_1, v_2 sono linearmente indipendenti (non essendo proporzionali). Aggiungendo $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, v_1, v_2, w sono una base di $\mathbb{R}^3$: sono tre vettori e

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Basi ortogonali e ortonormali (in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$)

Definizione - Base ortogonale

I vettori $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ sono una **base ortogonale** di $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ se il prodotto scalare $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $1 \leq i < j \leq r$.

Osservazione

Se $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ sono vettori tali che il prodotto scalare $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $1 \leq i < j \leq r$, sono automaticamente linearmente indipendenti. Dunque una base ortogonale di V è, in particolare, una base di V.

Esempio

Ad esempio la base canonica di K^n è ortogonale:

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ soddisfano:

$$e_1 \cdot e_2 = 0, \quad e_1 \cdot e_3 = 0, \quad e_2 \cdot e_3 = 0.$$

Esercizio

Provare che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sono perpendicolari:

$$v_1 \cdot v_2 = 1 - 1 = 0.$$

Trovare $w \in \mathbb{R}^3$ tale che v_1, v_2, w sia una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
Basta scegliere $w = v_1 \wedge v_2$:

$$(v_1 \ \ v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio

Sia $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trovare una base ortogonale di V.

Osservo che v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di V (in particolare $\dim_K V = 2$), ma non sono ortogonali: $v_1 \cdot v_2 = 1 + 1 = 2 \neq 0$.

Dunque tengo v_1 e cerco $w \in V$ tale che $v_1 \cdot w = 0$. Poiché $w \in V$ deve essere della forma:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ per qualche } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio continuazione

A questo punto imponiamo che $v_1 \cdot w = 0$, cioè

$$(1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2\\ \lambda_2\\ \lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_1+\lambda_2 = 2\lambda_1+2\lambda_2 = 0.$$

Questo è il caso, ad esempio, se $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$, cioè se $w = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, Essendo v_1, w due vettori linearmente indipendenti di V, e avendo V dimensione 2, $\langle v_1, w\rangle = V$, dunque $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sono una base ortogonale di V.

Definizione - Base ortonormale

i vettori $v_1, \ldots, v_r \in K^n$ sono una **base ortonormale** di $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$ se il prodotto scalare $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $1 \leq i < j \leq r$ e $v_i \cdot v_i = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, r$.

Osservazione

Osserviamo che $v \cdot v = \|v\|^2$ $\forall$ $v \in K^n$. Dunque una base ortonormale di V è una base ortogonale di V di vettori di lunghezza 1.

Esempio

Nell'esercizio precedente abbiamo provato che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erano una base ortogonale di V. Sostituendo v_1 con $v_1/\|v_1\| = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, abbiamo che $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una base ortonormale di V.

Come funziona Google

Abbiamo fatto un nuovo sito web una settimana fa, ma Google non ci trova... La pagina è invisibile a chi non conosce già l'indirizzo esatto...

- I motori di ricerca degli anni '90, come Altavista o Yahoo, facevano semplicemente la lista delle pagine contenenti più occorrenze delle parole ricercate.
- Nel 1995 Larry Page e Sergej Brin inventano un algoritmo per dare un'importanza a tutte le pagine sul web, il **PageRank**, e da qui nasce Google.

Osservazione

Ovviamente per dare un'importanza alle pagine Google non chiede ai propri dipendenti di andarsi a leggere il contenuto di tutte le pagine: sono troppe e inoltre non potrebbe venire fuori una classifica obiettiva. Piuttosto, il PageRank da un punteggio alla nostra pagina basandosi sul numero e la rilevanza delle pagine contenenti un link ad essa.

Precisamente, siano $1, \ldots, n$ tutte le pagine web esistenti (n dovrebbe essere circa 2 miliardi).

- Per ogni $i = 1, \ldots, n$, denotiamo con r_i la rilevanza della pagina i. Il vettore $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ è il vettore PageRank.
- Per ogni $i = 1, \ldots, n$, denotiamo con $A_i \subset \{1, \ldots, n\}$ l'insieme delle pagine j contenenti un link alla pagina i.
- Per ogni $j = 1, \ldots, n$, denotiamo con ℓ_j il numero di link presenti nella pagina j.

The random surfer

Affinché un *random surfer* si trovi alla pagina i a un dato istante, deve trovarsi a una pagina $j \in A_i$ all'istante precedente, e avrà una probabilità di $1/\ell_j$ di capitare nella pagina i. In una formula:

$$r_i = \sum_{j \in A_i} \frac{r_j}{\ell_j}$$

La formula

$$r_i = \sum_{j \in A_i} \frac{r_j}{\ell_j}$$

definisce r_i, e dunque il PageRank!

Per definire r_i usiamo gli altri r_j... È un cane che si morde la coda...

Vediamo tutte le equazioni $r_i = \sum_{j \in A_i} \frac{r_j}{\ell_j}$ insieme, al variare di $i = 1, \ldots, n$, e pensiamo alle r_i come incognite (mentre gli A_i e gli ℓ_j sono noti): è un sistema lineare in n equazioni e n incognite!

$$\begin{cases} r_1 = \sum_{j \in A_1} \frac{1}{\ell_j} r_j \\ \vdots \\ r_n = \sum_{j \in A_n} \frac{1}{\ell_j} r_j \end{cases}$$

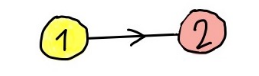
Come funziona Google

Non solo, si tratta di un sistema lineare ad n incognite e n equazioni omogeneo, quindi ha sempre la soluzione $r_i = 0$...

Si, ma se il PageRank fosse Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ il tutto sarebbe poco interessante... Vogliamo trovare una soluzione diversa dal vettore nullo!

Per il teorema di Cramer esistono altre soluzioni se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è 0. Ma chi ce lo assicura?

Esempio - Pagina senza link



Per questa rete A_1 è vuoto, mentre $A_2 = \{1\}$. Inoltre $\ell_1 = 1$ e $\ell_2 = 0$, quindi il sistema lineare associato sarebbe $\begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = r_1 \end{cases}$, che ovviamente ha la sola soluzione nulla.

Il problema dell'esempio precedente è che la pagina 2 non ha link. Ripensando al random surfer, come prosegue se finisce in una pagina senza link? Dobbiamo aggiungere una regola che dica cosa fare in questo caso:

da una pagina senza link si va in una qualunque delle n pagine della rete con probabilità $\frac{1}{n}$ (← numero piccolissimo)

In simboli, chiamando $V \subset \{1, \dots, n\}$ l'insieme delle pagine prive di link, abbiamo (leggermente) modificato il sistema nel seguente:

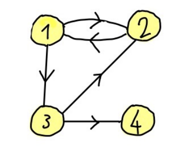
$$\begin{cases} r_1 = \sum_{j \in A_1} \frac{1}{\ell_j} r_j + \sum_{j \in V} \frac{r_j}{n} \\ \vdots \\ r_n = \sum_{j \in A_n} \frac{1}{\ell_j} r_j + \sum_{j \in V} \frac{r_j}{n} \end{cases}$$

A questo punto l'esempio precedente diventerebbe:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{r_2}{2} \\ r_2 = r_1 + \frac{r_2}{2} \end{cases}, \xrightarrow{\infty^1 \ soluzioni} \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 2s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Imponendo l'ulteriore condizione di normalizzazione $r_1 + r_2 = 1$, si ha che $r_1 = 1/3$ e $r_2 = 2/3$.

Esempio ($n = 4$)



Per questa rete il sistema lineare associato sarebbe

$$\begin{cases} r_1 = r_2 + \frac{r_4}{4} \\ r_2 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_3}{2} + \frac{r_4}{4} \\ r_3 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_4}{4} \\ r_4 = \frac{r_3}{2} + \frac{r_4}{4} \end{cases} \longrightarrow \mathrm{I}_4 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Esempio (continuazione)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{1}{2} R_1]{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2} R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi ci sono ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{9}{4}s + \frac{1}{4}s = \frac{5}{2}s \\ r_2 = 2(\frac{3}{4}s + \frac{3}{8}s) = \frac{9}{4}s \\ r_3 = 2(\frac{3}{4}s) = \frac{3}{2}s \\ r_4 = s \end{cases} \xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4=1} PageRank = \begin{pmatrix} 10/29 \\ 9/29 \\ 6/29 \\ 4/29 \end{pmatrix}$$

In entrambi gli esempi precedenti abbiamo trovato una soluzione non banale, ma siamo sicuri che sia sempre possibile?

Si, segue dal *Teorema di Cramer*! Chiamando $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ il vettore PageRank e $W = (w_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice così definita:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1/\ell_j & \text{se la pagina } j \text{ contiene un link verso la pagina } i \ (j \in A_i) \\ 1/n & \text{se la pagina } j \text{ non possiede alcun link } (j \in V) \\ 0 & \text{se la pagina } j \text{ possiede e link ma non verso la pagina } i \ (j \notin A_i \cup V) \end{cases}$$

Osservazione

Le entrate di W sono numeri reali *non negativi* e la somma delle entrate di ogni colonna è uguale a 1:

- Se $j \in V$, allora $\sum_{i=1}^n w_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$.
- Se $j \notin V$, allora $\sum_{i=1}^n w_{ij} = \sum_{A_i \ni j} \frac{1}{\ell_j} + \sum_{A_i \not\ni j} 0 = 1$.

Tali matrici si chiamano **stocastiche** (per colonne).

Dunque possiamo riscrivere il sistema lineare del PageRank come $r = Wr$, cioè $(\mathrm{I}_n - W)r = 0$.

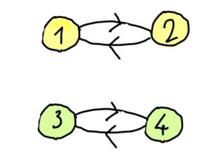
Ovviamente anche I_n è una matrice stocastica, dunque la somma delle entrate di ogni colonna della matrice $A := \mathrm{I}_n - W \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ è uguale a $1 - 1 = 0$. In altre parole, la somma di tutte le righe di A è uguale alla riga nulla; equivalentemente, la somma di tutte le colonne $v_1, \ldots, v_n$ di A^T è uguale al vettore nullo di $\mathbb{R}^n$. Cioè $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti, e quindi $\det A^T = 0$. Ma allora, poiché $\det A = \det A^T$, abbiamo provato che $\det A = 0$.

In conclusione, il teorema di Cramer ci assicura che il sistema omogeneo $Ar = 0$ ha una soluzione non banale $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ok, ma come facciamo a sapere che ci sia un'unica soluzione (a meno di multipli), cioè che ci siano solo ∞^1 soluzioni?

Effettivamente servirà apportare un'ultima modifica, infatti se la rete consiste di due sotto-reti non collegate tra loro da alcun link, non ci si può aspettare l'unicità della soluzione:

Rete disconnessa



Per questa rete il sistema lineare associato sarebbe

$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ r_2 = r_1 \\ r_3 = r_4 \\ r_4 = r_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix}\text{soluzione}\\ \text{generale}\end{matrix} : \begin{pmatrix} s \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{matrix}\text{soluzione}\\ \text{normalizzata}\end{matrix} : \begin{pmatrix} s \\ s \\ 1-s \\ 1-s \end{pmatrix}, \quad s \in [0,1]$$

Per garantire l'unicità è sufficiente eliminare eventuali sotto-reti isolate. Si fa così: scegliamo $\epsilon \in \mathbb{R}$ un numero reale compreso strettamente tra 0 e 1, e imponiamo la regola che il random surfer segua le regole descritte finora con probabilità $1-\epsilon$, mentre con probabilità ϵ non segue i link presenti nella pagina in cui si trova (anche nel caso in cui ci siano) e va su una delle n pagine a caso. Precisamente, chiamando $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice con tutte entrate $1/n$, definiamo la matrice $n \times n$

$$G = (1-\epsilon)W + \epsilon Q.$$

Il sistema della rete precedente diventerebbe

$$\begin{cases} r_1 = (1-\epsilon)r_2 + \frac{\epsilon}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4) \\ r_2 = (1-\epsilon)r_1 + \frac{\epsilon}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4) \\ r_3 = (1-\epsilon)r_4 + \frac{\epsilon}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4) \\ r_4 = (1-\epsilon)r_3 + \frac{\epsilon}{4}(r_1+r_2+r_3+r_4) \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}_4 - G} \begin{pmatrix} 1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\ \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\ -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} \\ -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\
\epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\
-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} \\
-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4}
\end{pmatrix}
\xrightarrow[\substack{R_4 \to R_4 - R_3}]{\substack{R_4 \to R_4 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_2}}
\begin{pmatrix}
1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\
\epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} \\
-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 - R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_3}}
\begin{pmatrix}
1 & \epsilon-1 & -1 & 1-\epsilon \\
\epsilon-1 & 1 & -1 & 1-\epsilon \\
-\frac{\epsilon}{4} & -\frac{\epsilon}{4} & 1-\frac{\epsilon}{4} & \epsilon-1-\frac{\epsilon}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_3 \to \frac{4}{\epsilon} R_3}
\begin{pmatrix}
1 & \epsilon-1 & -1 & 1-\epsilon \\
\epsilon-1 & 1 & -1 & 1-\epsilon \\
-1 & -1 & \frac{4}{\epsilon}-1 & 3-\frac{4}{\epsilon} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 + (1-\epsilon) R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}}
\begin{pmatrix}
1 & \epsilon-1 & -1 & 1-\epsilon \\
0 & 2\epsilon-\epsilon^2 & \epsilon-2 & \epsilon^2-3\epsilon+2 \\
0 & \epsilon-2 & \frac{4}{\epsilon}-2 & 4-\frac{4+\epsilon^2}{\epsilon} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow{R_2 \to R_2 + \epsilon R_1}
\begin{pmatrix}
1 & \epsilon-1 & -1 & 1-\epsilon \\
0 & 0 & 2-\epsilon & \epsilon-2 \\
0 & \epsilon-2 & \frac{4}{\epsilon}-2 & 4-\frac{4+\epsilon^2}{\epsilon} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
r_1 = -(\epsilon-1-1+1-\epsilon)s = s \\
r_2 = \frac{\epsilon-2}{\epsilon-2} s = s \\
r_3 = \frac{2-\epsilon}{2-\epsilon} s = s \\
r_4 = s
\end{cases}
\longrightarrow \text{soluzione generale}: \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \\ s \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \qquad \text{soluzione normalizzata}: \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}
$$

Si noti che G è ancora stocastica, ma ora tutte le sue entrate sono strettamente positive. Questo, grazie a un teorema di *Perron* dei primi del Novecento, assicura che $\mathrm{I}_n - G$ abbia rango $n-1$, e cioè che esistano ∞^1 soluzioni al problema del PageRank $r = Gr$. Imponendo un ulteriore condizione di normalizzazione, esiste un'unica soluzione $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ con $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 0$. Il PageRank è quest'ultimo vettore $r \in \mathbb{R}^n$.

Di fatto Google sceglie $\epsilon \sim 0.15$, e si accontenta di una soluzione approssimata: partendo dal vettore $r(0) = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$, calcola $r(1) = Gr(0)$, $r(2) = Gr(1)$, $r(3) = Gr(2)$ ... Sfruttando il teorema di Perron, mettendo G nella sua *forma canonica di Jordan* si dimostra che $r(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} r$, e Google si ferma dopo un centinaio di iterazioni. Il calcolo dura qualche giorno, e Google lo ripete a scadenze regolari per aggiornare il PageRank.