ALGEBRA SUPERIORE 2

A-moduli, mancano le basi!

- Sia A un anello commutativo unitario;
- sia M un A-modulo finitamente generato.

Se $A = K$ è un campo, M è un K-spazio vettoriale di dimensione finita, cioè $M \cong K^n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. In altre parole, M ammette un sistema di generatori che è una base: cioè esistono $m_1, \dots, m_n$ generatori di M tali che:

$$a_1 m_1 + \cdots + a_n m_n = 0 \quad \text{con } a_i \in A \;\; \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Se A non è un campo non tutti gli A-moduli sono liberi. Anzi, gli A-moduli liberi sono rari, infatti sono solo quelli del tipo A^n. Quello che si fa è, dato un A-modulo M, approssimarlo con degli A-moduli liberi.

ESEMPIO: Siano K un campo, $A = K[x,y]$ e $K = A/(x,y)$ (visto come A-modulo). K è generato dalla classe di 1, dunque possiamo costruire una mappa surgettiva di A-moduli $A \xrightarrow{\epsilon} K$ definita da $\epsilon(1) = \overline{1}$.

Il nucleo di ϵ è l'ideale $(x,y) \subseteq A$. Dunque $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ è un A-modulo generato da 2 elementi, quindi possiamo definire una mappa di A-moduli $A^2 \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq A$ definita da $f(e_1) = x$ e $f(e_2) = y$ ($\{e_1, e_2\}$ base di A^2). Si noti che f non è iniettiva, infatti $ye_1 - xe_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Vogliamo calcolare $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\forall\ a, b \in A, \quad ae_1 + be_2 \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow ax = -by \text{ (in } A).$$

Poiché A è un UFD, e x e y sono elementi irriducibili non associati, allora $b = cx$ per qualche $c \in A$. Dunque $ax = -cxy$, che siccome A è un dominio implica $a = -cy$. Concludendo, $ae_1 + be_2 = -c(ye_1 - xe_2)$, che dimostra $\mathrm{Ker}(f) = \langle ye_1 - xe_2 \rangle$ ...

... Dunque $\mathrm{Ker}(f)$ è un A-modulo generato da 1 elemento, quindi possiamo definire una mappa di A-moduli $A \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}(f) \subseteq A^2$ definita da $g(1) = ye_1 - xe_2$; questa volta, g è iniettiva, infatti $g(a) = aye_1 - axe_2 = 0$ implica (poiché $\{e_1, e_2\}$ è una base di A^2) $ay = -ax = 0$. Visto che A è un dominio, ciò forza a ad essere 0. Si è dunque costruita la seguente sequenza esatta di A-moduli:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}"] \arrow[dr, two heads, "g"'] & & A^2 \arrow[rr, "\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}"] \arrow[dr, two heads, "f"] & & A \arrow[r, two heads, "\epsilon"] & K = A/(x,y) \\
& & \langle ye_1 - xe_2 \rangle \arrow[ur, hook] & & (x,y) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

Tale sequenza esatta è detta una risoluzione libera di K.

Anelli regolari

Il processo visto nell'esempio precedente è terminato dopo un numero finito di passi, ma non è sempre così: dipende dal modulo scelto e, soprattutto, dall'anello. In questo corso caratterizzeremo gli anelli A per cui ogni A-modulo ha una risoluzione libera finita. Tali anelli sono da considerarsi estremamente buoni, e sono i cosiddetti anelli regolari. Come conseguenza, vedremo che l'anello di polinomi in n variabili su un campo è regolare (fatto originariamente provato da David Hilbert nel 1890, noto come *Hilbert's syzygy theorem*). Gli anelli regolari hanno anche un'interpretazione geometrica, di cui vedremo un assaggio fra poco e daremo la dimostrazione più avanti. Prima, però, vediamo un esempio di risoluzione libera *infinita*.

ESEMPIO: Sia $A = K[x]/(x^2)$ e $K = A/(\overline{x})$.

Vogliamo costruire una risoluzione libera di K come A-modulo come prima. Il nucleo della mappa $A \xrightarrow{\epsilon} K$ data da $\epsilon(1) = \overline{1}$ è $(\overline{x})$ per definizione. Osserviamo inoltre che

$$\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{\cdot\overline{x}} A) = (\overline{x}) \subseteq A.$$

Infatti, se $a \in A$ è tale che $\overline{x}a = 0$, allora scegliendo un rappresentante $f \in K[x]$ di a abbiamo che $fx = gx^2$ (in $K[x]$) per qualche $g \in K[x]$, che visto che $K[x]$ è un dominio implica che $f = gx$, che a sua volta implica

$$a \in (\overline{x}).$$

Dunque questa costruzione ci fornisce una risoluzione libera infinita di K come A-modulo:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \arrow[r, "\cdot\overline{x}"] & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[r, two heads, "\epsilon"] & K = A/(\overline{x}) \\
& & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

A priori potrebbe esistere una costruzione differente che fornisce una risoluzione libera finita di K come A-modulo; come vedremo in seguito, in realtà K non ammette nessuna risoluzione libera finita come A-modulo.

Algebra&Geometria

Una delle ragioni per cui è nata l'algebra commutativa, è stata la necessità di porre delle basi solide e rigorose per lo sviluppo della geometria algebrica. Non dobbiamo dimenticarci queste origini, dunque iniziamo ricordando che algebra e geometria sono legate l'un l'altra sin da subito.

K campo, $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ anello di polinomi, $I \subseteq S$ ideale.

$$\mathcal{Z}(I) = \{P \in \mathbb{A}^n_K : f(P) = 0 \quad \forall \ f \in I\} \subseteq \mathbb{A}^n_K.$$

I sottoinsiemi di $\mathbb{A}^n_K$ della forma $\mathcal{Z}(I)$ per qualche ideale I sono i chiusi della topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n_K$ (si dicono varietà algebriche affini). Sarebbe bello se ci fosse una corrispondenza biunivoca tra ideali di S e chiusi, ma questo è impossibile ....

ESEMPIO: 1. Se $S = K[x,y]$, allora

$$\{(0,\lambda) : \lambda \in K\} = \mathcal{Z}((x)) = \mathcal{Z}((x^2)).$$

2. Se $S = \mathbb{R}[x,y]$, allora

$$\emptyset = \mathcal{Z}((1)) = \mathcal{Z}((x^2 + y^2 + 1)).$$

Nullstellensatz (Hilbert, 1893): Se K è algebricamente chiuso, allora:

$$\mathcal{Z}(I) = \mathcal{Z}(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

Il Nullstellensatz è il primo ponte fra algebra e geometria, fornendo una corrispondenza biunivoca fra varietà algebriche affini e ideali radicali in un anello di polinomi a coefficienti in un campo algebricamente chiuso. Nella geometria algebrica moderna, si usa il (più complesso) linguaggio degli schemi introdotto da Grothendieck, che fornisce una corrispondenza biunivoca fra schemi affini ed anelli.

Per tutto il corso sarà utile tenere a mente esempi di anelli provenienti dalla geometria, cioè K-algebre finitamente generate.

ESEMPIO: L'anello $A = K[x, y]/(x^2 - y)$ rappresenta la parabola:

$$\mathcal{P} = \mathcal{Z}((x^2 - y)) \subseteq \mathbb{A}^2.$$

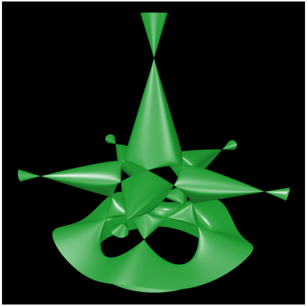
È semplice vedere che la dimensione (di Krull) di A è 1, che rispecchia il fatto intuitivo che la parabola è un oggetto 1-dimensionale.

Singolarità

Sia $X = \mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una varietà algebrica irriducibile, dove $K = \overline{K}$ e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $S = K[x_1, \ldots, x_n]$.

DEF.: Dato un punto $P \in X$, una funzione regolare in P è una funzione $\phi : U \to K$ dove $U \subseteq X$ è un intorno (nella topologia di Zariski) di P e $\phi(Q) = f(Q)/g(Q)$ per ogni $Q \in U$ dove $f, g \in S$ e $g(Q) \neq 0$. Due funzioni regolari in P si dicono equivalenti se coincidono sull'intersezione dei loro domini. L'insieme delle classi d'equivalenza delle funzioni regolari in P verrà denotato con $\mathcal{O}_{X,P}$. Tramite le operazioni puntuali, $\mathcal{O}_{X,P}$ è naturalmente dotato di una struttura di anello.

ESERCIZIO: Si provi che $\mathcal{O}_{X,P} \cong S_{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{p}S_{\mathfrak{m}_P}$, dove $P = (P_1, \ldots, P_n)$ e $\mathfrak{m}_P = (x_1 - P_1, \ldots, x_n - P_n) \subseteq S$. In particolare, $\mathcal{O}_{X,P}$ è un anello locale.



Data una varietà algebrica X e un suo punto $P \in X$, un concetto importante è che il punto sia singolare o meno (cioè liscio), concetto che definiremo rigorosamente più avanti: in questo corso vedremo che un punto $P \in X$ è liscio se e solo se $\mathcal{O}_{X,P}$ è un anello regolare.

Algebra omologica

A anello qualunque (possibilmente non Noetheriano). Ad un omomorfismo di A-moduli:

$$f : M \longrightarrow N,$$

sono associati i seguenti A-moduli:

- Il nucleo di f, $\mathrm{Ker}(f) = \{m \in M : f(m) = 0\}$;
- L' immagine di f, $\mathrm{Im}(f) = \{f(m) \in N : m \in M\}$;
- Il conucleo di f, $\mathrm{Coker}(f) = N/\mathrm{Im}(f)$.

La categoria dei complessi di A-moduli

DEF.: Un complesso (di catene) $C_\bullet$ di A-moduli consiste in:

- una famiglia $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ di A-moduli;
- degli omomorfismi di A-moduli $d_n : C_n \to C_{n-1}$ tali che:

$$d_{n-1} \circ d_n : C_n \longrightarrow C_{n-2} \quad \text{è la mappa nulla per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, gli elementi di $\mathrm{Ker}(d_n) =: Z_n(C_\bullet)$ si chiamano n-cicli, e gli elementi di $\mathrm{Im}(d_{n+1}) =: B_n(C_\bullet)$ sono gli n-bordi.

Si ha $B_n(C_\bullet) \subseteq Z_n(C_\bullet) \subseteq C_n$, e l' A-modulo

$$H_n(C_\bullet) := Z_n(C_\bullet)/B_n(C_\bullet)$$

è l' n-esimo modulo di omologia.

Spesso ci capiterà di considerare complessi $C_\bullet$ in cui $C_N = 0$ per:

$$N \gg 0 \text{ o } N \ll 0 \text{ o entrambe le cose.}$$

In questi casi visualizzeremo soltanto i moduli non nulli del complesso, poiché l'unica mappa che come dominio o come codominio ha il modulo nullo è 0, e la condizione

$$d_{n-1} \circ d_n : C_n \longrightarrow C_{n-2} \quad \text{è la mappa nulla}$$

è automaticamente soddisfatta se una delle due mappe è 0.

ESEMPIO: Consideriamo $A = \mathbb{Z}$, e la famiglia di A-moduli $C_\bullet = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dove $C_n = 0$ se $n < 0$ e $C_n = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ se $n \geq 0$, dotata delle mappe $d_n(x) = 4x$ per ogni $n > 0$ e $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Osserviamo che $C_\bullet$ è un complesso, poiché:

$$d_{n-1} \circ d_n(x) = 16x = 0 \quad \forall\ n > 1 \text{ e } x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

L' omologia di $C_\bullet$ è:

$$H_n(C_\bullet) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } n < 0 \\ \dfrac{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

A volte è conveniente avere indici crescenti, cioè complessi (di cocatene) $C^\bullet$ dove:

- $\{C^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una famiglia di A-moduli;
- $d^n : C^n \to C^{n+1}$ sono omomorfismi di A-moduli tali che:

$$d^{n+1} \circ d^n : C^n \longrightarrow C^{n+2} \quad \text{è la mappa nulla per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, gli elementi di $\mathrm{Ker}(d^n) =: Z^n(C^\bullet)$ si chiamano n-cocicli, e gli elementi di $\mathrm{Im}(d^{n-1}) =: B^n(C^\bullet)$ sono gli n-cobordi.

Si ha $B^n(C^\bullet) \subseteq Z^n(C^\bullet) \subseteq C^n$, e l' A-modulo

$$H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet)$$

è l' n-esimo modulo di coomologia.

La notazione introdotta si riscopre dai complessi di catene ponendo $C^n = C_{-n}$ e $d^n = d_{-n}$, e i risultati e le definizioni che vedremo per complessi di catene avranno un analogo ovvio per complessi di cocatene.

DEF.: Un morfismo fra due complessi di A-moduli

$$\phi : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$$

consiste in una collezione di omomorfismi di A-moduli $\phi_n : X_n \to Y_n$ tali che i quadrati:

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "d_n^X"] \arrow[d, "\phi_n"] & X_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ Y_n \arrow[r, "d_n^Y"] & Y_{n-1} \end{tikzcd}$$

commutino, cioè $\phi_{n-1} \circ d_n^X = d_n^Y \circ \phi_n$.

DEF.: La composizione di due morfismi di complessi di A-moduli $\phi : X_\bullet \to Y_\bullet$ e $\psi : Y_\bullet \to Z_\bullet$ è

$$\psi \circ \phi : X_\bullet \longrightarrow Z_\bullet$$

dove $(\psi \circ \phi)_n : X_n \to Z_n$ è semplicemente $\psi_n \circ \phi_n$.

L'identità di $X_\bullet$ è semplicemente il morfismo $1_X : X_\bullet \to X_\bullet$ tale che $(1_X)_n$ è l'identità di X_n, cioè 1_{X_n}.

Un morfismo $\phi : X_\bullet \to Y_\bullet$ si dice invertibile se esiste $\psi : Y_\bullet \to X_\bullet$ tale che $\psi \circ \phi = 1_X$ e $\phi \circ \psi = 1_Y$. Questo è il caso se e soltanto se ϕ_n è un isomorfismo di A-moduli per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

DEF.: Un complesso di A-moduli $X_\bullet$ si dice esatto se:

$$H_n(X_\bullet) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

In tal caso si usa anche dire che:

$$\ldots \to X_{n+1} \to X_n \to X_{n-1} \to \ldots$$

è una successione esatta di A-moduli.

Una successione esatta di A-moduli del tipo:

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

si dice successione esatta corta.

OSS.: Un complesso di A-moduli

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

è una successione esatta corta se e solo se:

- $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$;
- f è iniettiva;
- g è surgettiva.

DEF.: Una sequenza di morfismi di complessi:

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\phi} Y_\bullet \xrightarrow{\psi} Z_\bullet \to 0$$

si dice una successione esatta corta di complessi se

$$0 \to X_n \xrightarrow{\phi_n} Y_n \xrightarrow{\psi_n} Z_n \to 0$$

è una successione esatta corta di A-moduli per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

ESEMPIO: Dati due A-moduli M e N, la sequenza

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} M \oplus N \xrightarrow{\pi} N \to 0,$$

dove $\iota(m) = (m, 0)$ e $\pi(m, n) = n$, è una successione esatta di A-moduli.

OSS.: Data una mappa di A-moduli $f : K \hookrightarrow M$, sono equivalenti:

(a) esiste un'inversa sinistra di f in $\mathrm{Hom}_A(M, K)$;

(b) $M = f(K) \oplus N$ per qualche A-sottomodulo $N \subseteq M$.

Che (b) implichi (a) è chiaro. Viceversa, se esiste una mappa di A-moduli $f' : M \to K$ tale che $f' \circ f = 1_K$, allora:

$$M = f(K) \oplus \mathrm{Ker}(f').$$

Analogamente, data una mappa di A-moduli $g : M \twoheadrightarrow N$ sono equivalenti:

(a) esiste un'inversa destra di g in $\mathrm{Hom}_A(N, M)$;

(b) $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus K$ per qualche A-sottomodulo $K \subseteq M$.

DEF./ESERCIZIO: Una sequenza esatta corta di A-moduli:

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

si dice spezzante se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

- $\exists$ un omomorfismo di A-moduli $f' : M \to K$ t.c. $f' \circ f = 1_K$;
- $\exists$ un omomorfismo di A-moduli $g' : N \to M$ t.c. $g \circ g' = 1_N$;
- Esiste un isomorfismo di complessi del tipo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_K"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, dotted, "\phi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "\iota"] & K \oplus N \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

dove ι (risp. π) è l'ovvia immersione (risp. proiezione).

ESEMPIO: Le seguenti sequenze:

$$(1) \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

$$(2) \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathbb{C}^* \to 0$$

sono entrambe successioni esatte di gruppi abeliani ($\mathbb{Z}$-moduli) non spezzanti. (Notate che la struttura di gruppo su $\mathbb{C}^*$ è quella moltiplicativa, per cui il ruolo dello 0 è giocato da 1).

(1) è chiaramente esatta, ma se fosse spezzante esisterebbe $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $\pi \circ f = 1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$. Ma ciò non è possibile:

$$2 \cdot f(\bar{1}) = f(\bar{2}) = f(\bar{0}) = 0 \Rightarrow f = 0 \ \forall \ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

Vediamo che

$$(2) \quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathbb{C}^* \to 0$$

è esatta: certamente ι è iniettiva; inoltre $e^{2\pi i z} = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$, dunque $\mathrm{Ker}(e^{2\pi i \cdot}) = \mathrm{Im}(\iota)$. Per finire, $e^{2\pi i \cdot}$ è surgettiva perché:

$$\rho e^{i\theta} = e^{\ln(\rho)+i\theta} = e^{2\pi i((1/2\pi i)\ln\rho + (1/2\pi)\theta)} \ \forall \ \rho \in \mathbb{R}_{>0}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Ma (2) non è spezzante, altrimenti esisterebbe $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ tale che:

$$f(z) = z \quad \text{se } z \in \mathbb{Z}$$

Questo è assurdo, perché si avrebbe $1 = f(1) = 2 \cdot f(1/2)$ in $\mathbb{Z}$.

Il lemma del serpente

LEMMA: Dato un diagramma commutativo di A-moduli:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' & \end{tikzcd}$$

a righe esatte, esiste un omomorfismo $\partial : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ t.c.:

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f'}} \mathrm{Coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g'}} \mathrm{Coker}(\gamma)$$

è una successione esatta di A-moduli.
Inoltre, $K \hookrightarrow M \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\beta)$ e
$M' \twoheadrightarrow N' \Rightarrow \mathrm{Coker}(\beta) \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(\gamma)$.

Dimostrazione: Osserviamo che il seguente diagramma commutativo è a righe esatte:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}(\gamma) \arrow[d, hook] & \\
 & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, two heads] & M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, two heads] & N \arrow[d, two heads] & \\
 & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[r, "\overline{f'}"] & \mathrm{Coker}(\beta) \arrow[r, "\overline{g'}"] & \mathrm{Coker}(\gamma) &
\end{tikzcd}$$

L'omomorfismo $\partial : \mathrm{Ker}(\gamma) \to \mathrm{Coker}(\alpha)$ è definito come:

$$x \in \mathrm{Ker}(\gamma) \mapsto y \in g^{-1}(x) \subseteq M \mapsto \beta(y) \in M' \mapsto z = (f')^{-1}(\beta(y)) \in K' \mapsto \overline{z} \in \mathrm{Coker}(\alpha)$$

Verificare per ESERCIZIO che ∂ non dipende dalla scelta di $y \in g^{-1}(x)$.

Per dimostrare che la sequenza

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\overline{f'}} \mathrm{Coker}(\beta) \xrightarrow{\overline{g'}} \mathrm{Coker}(\gamma)$$

è esatta, basta provare l'esattezza in $\mathrm{Ker}(\gamma)$ e in $\mathrm{Coker}(\alpha)$.

Dimostriamo l'esattezza in $\mathrm{Ker}(\gamma)$:

- Se $y \in \mathrm{Ker}(\beta)$, allora $\partial(g(y)) = 0$.
- Se $x \in \mathrm{Ker}(\gamma)$ è tale che $\partial(x) = 0$, allora $\forall\ y \in g^{-1}(x)$, $\exists\ u \in K$ t.c. $\beta(f(u)) = \beta(y)$. Dunque $y - f(u) \in \mathrm{Ker}(\beta)$, e $g(y - f(u)) = g(y) - g(f(u)) = g(y) = x$.

ESERCIZIO: Completare la dimostrazione.

OSS.: Grazie alla proprietà di commutatività, un morfismo di complessi di A-moduli $\phi : X_\bullet \to Y_\bullet$ soddisfa:

- $\phi_n(Z_n(X_\bullet)) \subseteq Z_n(Y_\bullet) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$;
- $\phi_n(B_n(X_\bullet)) \subseteq B_n(Y_\bullet) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Dunque, ϕ induce omomorfismi di A-moduli:

$$H_n(\phi) : H_n(X_\bullet) \longrightarrow H_n(Y_\bullet) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

DEF.: Un morfismo di complessi $\phi : X_\bullet \to Y_\bullet$ viene detto quasi-isomorfismo se

$$H_n(\phi) : H_n(X_\bullet) \longrightarrow H_n(Y_\bullet)$$

è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

TEOREMA: Sia data una successione esatta corta di complessi di A-moduli:

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\phi} Y_\bullet \xrightarrow{\psi} Z_\bullet \to 0.$$

Allora esiste una famiglia di omomorfismi di A-moduli $\partial_n : H_n(Z_\bullet) \to H_{n-1}(X_\bullet) \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$, chiamati connettivi, tali che:

$$\ldots \to H_{n+1}(Z_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X_\bullet) \xrightarrow{H_n(\phi)} H_n(Y_\bullet) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(Z_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_\bullet) \to \ldots$$

Dimostrazione: Per prima cosa osserviamo che ci basta dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la seguente successione è esatta:

$$H_n(X_\bullet) \xrightarrow{H_n(\phi)} H_n(Y_\bullet) \xrightarrow{H_n(\psi)} H_n(Z_\bullet) \xrightarrow{\partial_n}$$
$$H_{n-1}(X_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(\phi)} H_{n-1}(Y_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(\psi)} H_{n-1}(Z_\bullet)$$

Il seguente diagramma commutativo è a righe esatte $\forall\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_k(X_\bullet) \arrow[r, "\phi_k"] \arrow[d, hook] & Z_k(Y_\bullet) \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, hook] & Z_k(Z_\bullet) \arrow[d, hook] & \\
0 \arrow[r] & X_k \arrow[r, "\phi_k"] \arrow[d, "d_k^X"] & Y_k \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "d_k^Y"] & Z_k \arrow[r] \arrow[d, "d_k^Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_{k-1} \arrow[r, "\phi_{k-1}"] \arrow[d, two heads] & Y_{k-1} \arrow[r, "\psi_{k-1}"] \arrow[d, two heads] & Z_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
 & X_{k-1}/B_{k-1}(X_\bullet) \arrow[r, "\overline{\phi_{k-1}}"] & Y_{k-1}/B_{k-1}(Y_\bullet) \arrow[r, "\overline{\psi_{k-1}}"] & Z_{k-1}/B_{k-1}(Z_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

In particolare, il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & X_n/B_n(X_\bullet) \arrow[r, "\overline{\phi_n}"] \arrow[d, "d_n^X"] & Y_n/B_n(Y_\bullet) \arrow[r, "\overline{\psi_n}"] \arrow[d, "d_n^Y"] & Z_n/B_n(Z_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d_n^Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(X_\bullet) \arrow[r, "\phi_{n-1}"] & Z_{n-1}(Y_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & Z_{n-1}(Z_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

è a righe esatte per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

A questo punto il lemma del serpente ci permette di concludere. Infatti, per esempio:

- $\mathrm{Ker}\left(X_n/B_n(X_\bullet) \xrightarrow{d_n^X} Z_{n-1}(X_\bullet)\right) = Z_n(X_\bullet)/B_n(X_\bullet) = H_n(X_\bullet)$;
- $\mathrm{Coker}\left(X_n/B_n(X_\bullet) \xrightarrow{d_n^X} Z_{n-1}(X_\bullet)\right) = Z_{n-1}(X_\bullet)/B_{n-1}(X_\bullet) = H_{n-1}(X_\bullet)$.

□

ESERCIZIO: Ripercorrendo la dimostrazione, verificate che l'effetto del connettivo su un elemento $\overline{z} \in H_n(Z_\bullet)$ è il seguente:

- Si prenda un rappresentante $z \in Z_n(Z_\bullet)$ di $\overline{z}$;
- Si sollevi z ad un elemento $y \in Y_n$;
- Mandare y in Y_{n-1} con il differenziale, e osservare che $d_n^Y(y) \in \mathrm{Ker}(\psi_{n-1})$;
- Sollevare $d_n^Y(y)$ a $x \in X_{n-1}$, e osservare che x è un ciclo;
- Si ha che $\partial_n(\overline{z}) = \overline{x}$.

ESERCIZIO: Si dimostri che, se

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\phi} Y_\bullet \xrightarrow{\psi} Z_\bullet \to 0$$

è una successione esatta di complessi di A-moduli, allora ϕ è un quasi-isomorfismo se e solo se $Z_\bullet$ è esatto.

DEF.: Un morfismo $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ si dice omotopicamente nullo, e si scrive $f \sim 0$, se esistono omomorfismi di A-moduli:

$$s_n : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$$

tali che $f_n = d^Y_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^X_n$.

Due morfismi $f, g : X_\bullet \to Y_\bullet$ sono omotopicamente equivalenti, e si scrive $f \sim g$, se $f - g \sim 0$.

LEMMA: Un morfismo di complessi $f : X_\bullet \to Y_\bullet$ omotopicamente nullo induce mappe in omologia $H_n(f) : H_n(X_\bullet) \longrightarrow H_n(Y_\bullet)$ nulle per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Di conseguenza, due morfismi omotopicamente equivalenti inducono le stesse mappe in omologia.

Dimostrazione: Siano $s_n : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$ tali che:

$$f_n = d^Y_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^X_n \ \ \forall \ n \in \mathbb{Z}.$$

Dato $\overline{x} \in H_n(X_\bullet) = Z_n(X_\bullet)/B_n(X_\bullet)$, per definizione abbiamo $H_n(f)(\overline{x}) = \overline{f_n(x)}$. Dalle ipotesi:

$$\begin{aligned} f_n(x) = d^Y_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(d^X_n(x)) &= d^Y_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(0) \\ &= d^Y_{n+1}(s_n(x)) \in B_n(Y_\bullet). \end{aligned}$$

Dunque $H_n(f)(\overline{x}) = \overline{f_n(x)} = 0 \in H_n(Y_\bullet) = Z_n(Y_\bullet)/B_n(Y_\bullet)$. $\square$.

DEF.: Un A-modulo P si dice proiettivo se, per ogni omomorfismo surgettivo di A-moduli $f : M \twoheadrightarrow N$ e ogni mappa $g : P \to N$, esiste una mappa $h : P \to M$ tale che $g = f \circ h$. Schematicamente:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "\forall g"] \\ M \arrow[r, two heads, "\forall f"'] & N \end{tikzcd}$$

Dualmente, un A-modulo E si dice iniettivo se, per ogni omomorfismo iniettivo di A-moduli $f : N \hookrightarrow M$ e ogni mappa $g : N \to E$, esiste una mappa $h : M \to E$ tale che $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} & E \\ M \arrow[ur, dotted, "\exists h"] & N \arrow[l, hook', "\forall f"] \arrow[u, "\forall g"'] \end{tikzcd}$$

ESEMPI: Sia $A = \mathbb{Z}$:

(i) Lo $\mathbb{Z}$-modulo $\mathbb{Z}$ è proiettivo, infatti

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[d, "\forall g"] \\ M \arrow[r, two heads, "\forall f"'] & N \end{tikzcd}$$

basta scegliere $m \in M$ tale che $f(m) = g(1)$ e definire $h : \mathbb{Z} \to M$ come $h(k) = km \ \forall \ k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Lo $\mathbb{Z}$-modulo $\mathbb{Z}$, però, non è iniettivo: ad esempio si consideri

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \\ M = \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, hook', "\cdot 2 = f"] \arrow[u, "1_{\mathbb{Z}}"'] \end{tikzcd}$$

Se esistesse $h : M \to \mathbb{Z}$ tale che $1_{\mathbb{Z}} = h \circ f$, si avrebbe che $2 \cdot h(1) = h(2) = h(f(1)) = 1$, e 1 non è divisibile per 2 in $\mathbb{Z}$.

(iii) Vedremo più avanti che $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo.

ESERCIZIO: Dimostrare che:

- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ non è uno $\mathbb{Z}$-modulo proiettivo né iniettivo.
- $\mathbb{Q}$ non è uno $\mathbb{Z}$-modulo proiettivo.

TEOREMA DEL CONFRONTO 1: Sia dato il seguente complesso di catene di A-moduli, dove i P_i sono proiettivi:

$$\ldots \to P_3 \to P_2 \to P_1 \to P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

e un omomorfismo di A-moduli $f : M \to N$. Allora, per ogni successione esatta di A-moduli

$$\ldots \to C_3 \to C_2 \to C_1 \to C_0 \xrightarrow{\eta} N \to 0,$$

esiste un morfismo di complessi $\phi : P_\bullet \to C_\bullet$ che solleva f, cioè tale che $f \circ \epsilon = \eta \circ \phi_0$. Tale morfismo è inoltre unico a meno di omotopia, nel senso che se $\psi : P_\bullet \to C_\bullet$ è un altro morfismo che solleva f, allora $\phi \sim \psi$.

Dimostrazione $\exists\ \phi$: Per $-1 \le k \le n$, supponiamo di aver costruito mappe $P_k \xrightarrow{\phi_k} C_k$ tali che $\phi_{k-1} \circ d_k^P = d_k^C \circ \phi_k$ (dove $P_{-1} = M$, $C_{-1} = N$, $\phi_{-1} = f$, $d_0^P = \epsilon$, $d_0^C = \eta$, $\phi_{-2} = d_{-1}^C = d_{-1}^P = 0$), dove il caso $k = -1$ è chiaro. Dunque abbiamo la seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^P"] & \mathrm{Ker}(d_n^P) \arrow[d, "\phi_n"] \\
C_{n+1} \arrow[r, two heads, "d_{n+1}^C"'] & \mathrm{Ker}(d_n^C)
\end{tikzcd}$$

dove la surgettività di $d_{n+1}^C : C_{n+1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(d_n^C)$ è assicurata dall'ipotesi che $C_\bullet \xrightarrow{\eta} N \to 0$ è esatto. L'esistenza di ϕ_{n+1} è data dalla proiettività di P_{n+1}.

Dimostrazione $\exists\ \phi$: Per $-1 \leq k \leq n$, supponiamo di aver costruito mappe $P_k \xrightarrow{\phi_k} C_k$ tali che $\phi_{k-1} \circ d_k^P = d_k^C \circ \phi_k$ (dove $P_{-1} = M$, $C_{-1} = N$, $\phi_{-1} = f$, $d_0^P = \epsilon$, $d_0^C = \eta$, $\phi_{-2} = d_{-1}^C = d_{-1}^P = 0$), dove il caso $k = -1$ è chiaro. Dunque abbiamo la seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}^P"] \arrow[d, dotted, "\exists\phi_{n+1}"'] & \mathrm{Ker}(d_n^P) \arrow[d, "\phi_n"] \\
C_{n+1} \arrow[r, two heads, "d_{n+1}^C"'] & \mathrm{Ker}(d_n^C)
\end{tikzcd}$$

dove la surgettività di $d_{n+1}^C : C_{n+1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(d_n^C)$ è assicurata dall'ipotesi che $C_\bullet \xrightarrow{\eta} N \to 0$ è esatto. L'esistenza di ϕ_{n+1} è data dalla proiettività di P_{n+1}.

Dimostrazione dell'unicità a meno di omotopia: Sia $P_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet$ un altro morfismo di complessi che solleva f, e poniamo $\alpha = \phi - \psi$. Per dimostrare che $\alpha \sim 0$, costruiremo per induzione mappe $s_n : P_n \to C_{n+1}$ tali che $\alpha_n = d^C_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^P_n \;\; \forall \; n \in \mathbb{Z}$.

Naturalmente $s_n = 0 \;\forall\; n < 0$. Per costruire s_0, consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1^P"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\phi_0-\psi_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f-f"] & 0 \\
C_1 \arrow[r, "d_1^C"'] & C_0 \arrow[r, "\eta"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione dell'unicità a meno di omotopia: Sia $P_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet$ un altro morfismo di complessi che solleva f, e poniamo $\alpha = \phi - \psi$. Per dimostrare che $\alpha \sim 0$, costruiremo per induzione mappe $s_n : P_n \to C_{n+1}$ tali che $\alpha_n = d^C_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^P_n \quad \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

Naturalmente $s_n = 0 \ \forall \ n < 0$. Per costruire s_0, consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1^P"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
C_1 \arrow[r, "d_1^C"'] & \mathrm{Ker}(\eta) \arrow[r, "\eta"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione dell'unicità a meno di omotopia: Sia $P_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet$ un altro morfismo di complessi che solleva f, e poniamo $\alpha = \phi - \psi$. Per dimostrare che $\alpha \sim 0$, costruiremo per induzione mappe $s_n : P_n \to C_{n+1}$ tali che $\alpha_n = d^C_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^P_n \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Naturalmente $s_n = 0\ \forall\ n < 0$. Per costruire s_0, consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1^P"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
C_1 \arrow[r, two heads, "d_1^C"'] & \mathrm{Im}(d_1^C) \arrow[r, "\eta"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione dell'unicità a meno di omotopia: Sia $P_\bullet \xrightarrow{\psi} C_\bullet$ un altro morfismo di complessi che solleva f, e poniamo $\alpha = \phi - \psi$. Per dimostrare che $\alpha \sim 0$, costruiremo per induzione mappe $s_n : P_n \to C_{n+1}$ tali che $\alpha_n = d^C_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d^P_n \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$.

Naturalmente $s_n = 0\ \forall\ n < 0$. Per costruire s_0, consideriamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "d_1^P"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"'] \arrow[dl, dotted, "s_0"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
C_1 \arrow[r, two heads, "d_1^C"'] & \mathrm{Im}(d_1^C) \arrow[r, "\eta"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dove abbiam sfruttato l'esattezza di $C_\bullet \xrightarrow{\eta} N \to 0$ e il fatto che i P_i sono proiettivi. Quindi $\alpha_0 = d_1^C \circ s_0 = d_1^C \circ s_0 + s_{-1} \circ d_0^P$.

Concludere l'induzione per ESERCIZIO. $\square$

TEOREMA DEL CONFRONTO 2: Sia dato il seguente complesso di cocatene di A-moduli, dove gli E^i sono iniettivi:

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \to E^1 \to E^2 \to E^3 \to \dots$$

e un omomorfismo di A-moduli $f : N \to M$. Allora, per ogni successione esatta di A-moduli

$$0 \to N \xrightarrow{\eta} C^0 \to C^1 \to C^2 \to C^3 \to \dots,$$

esiste un morfismo di complessi $\phi : C^\bullet \to E^\bullet$ che solleva f, cioè tale che $\epsilon \circ f = \phi_0 \circ \eta$. Tale morfismo è inoltre unico a meno di omotopia, nel senso che se $\psi : C^\bullet \to E^\bullet$ è un altro morfismo che solleva f, allora $\phi \sim \psi$.

Funtori nella categoria degli A-moduli

DEF.: Un funtore covariante F nella categoria degli A-moduli, è un' associazione:

- $M \mapsto F(M)$ per ogni A-modulo M;
- $(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N))$.

tale che:

- $F(1_M) = 1_{F(M)}$ per ogni A-modulo M;
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un funtore controvariante F nella categoria degli A-moduli, è un' associazione:

- $M \mapsto F(M)$ per ogni A-modulo M;
- $(M \xrightarrow{f} N) \mapsto (F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M))$.

tale che:

- $F(1_M) = 1_{F(M)}$ per ogni A-modulo M;
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

ESEMPI: $\forall$ A-modulo M, $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ è un funtore covariante:

- $N \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,N)$;
- $(L \xrightarrow{f} N) \mapsto (\mathrm{Hom}_A(M,L) \xrightarrow{f_*=f\circ -} \mathrm{Hom}_A(M,N))$.

$\mathrm{Hom}_A(-,M)$, invece, è un funtore controvariante:

- $N \mapsto \mathrm{Hom}_A(N,M)$;
- $(L \xrightarrow{f} N) \mapsto (\mathrm{Hom}_A(N,M) \xrightarrow{f^*=-\circ f} \mathrm{Hom}_A(L,M))$.

$M \otimes_A -$ è un funtore covariante:

- $N \mapsto M \otimes_A N$;
- $(L \xrightarrow{f} N) \mapsto (M \otimes_A L \xrightarrow{1_M \otimes f} M \otimes_A N)$.

$- \otimes_A M$ è un funtore covariante:

- $N \mapsto N \otimes_A M$;
- $(L \xrightarrow{f} N) \mapsto (L \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes 1_M} N \otimes_A M)$.

DEF.: Sia F un funtore covariante:

- F si dice additivo se la funzione

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(F(M), F(N))$$

  è un omomorfismo di gruppi abeliani $\forall$ A-moduli M e N;
- F si dice A-lineare se la funzione

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(F(M), F(N))$$

  è un omomorfismo di A-moduli $\forall$ A-moduli M e N.

Le definizioni di additivo e A-lineare per un funtore controvariante sono analoghe.

OSS./ESERCIZIO: 1. Si provi che, fissato un A-modulo M, $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, $- \otimes_A M$ e $M \otimes_A -$ sono funtori A-lineari.

2. Sia $a \in A$, e $M \xrightarrow{f} M$ la moltiplicazione per a. Se F è un funtore (covariante o controvariante) A-lineare allora $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M)$ è la moltiplicazione per a.

OSS.: Se $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ è un complesso di A-moduli, allora:

- Se F è un funtore covariante additivo, anche

$$F(K) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \quad (F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(0) = 0)$$

è un complesso di A-moduli.

- Se F è un funtore controvariante additivo,

$$F(N) \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(K) \quad (F(f) \circ F(g) = F(g \circ f) = F(0) = 0)$$

è un complesso di A-moduli.

Dunque possiamo ricavarne che i funtori additivi mandano complessi di A-moduli in complessi di A-moduli.

Cosa succede alle successioni esatte???

DEF.: Sia F un funtore covariante additivo. Se per ogni sequenza esatta corta di A-moduli $0 \to K \to M \to N \to 0$ si ha che ....

- $0 \to F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$ è esatta F si dice esatto;
- $0 \to F(K) \to F(M) \to F(N)$ è esatta F si dice esatto a sinistra;
- $F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0$ è esatta F si dice esatto a destra;

OSS.: F è esatto se e solo se $F(K) \to F(M) \to F(N)$ è esatta per ogni sequenza esatta del tipo $K \to M \to N$.

Le definizioni di esatto, esatto a sinistra ed esatto a destra per un funtore controvariante sono analoghe.

OSSERVAZIONE: Un funtore covariante additivo è esatto a sinistra (rispettivamente a destra) se e solo se l'esattezza di

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \quad (K \to M \to N \to 0)$$

implica l'esattezza di

$$0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \quad (F(K) \to F(M) \to F(N) \to 0):$$

Scriviamo $g = \iota \circ g'$ dove $g' : M \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(g)$ e $\iota : \mathrm{Im}(g) \hookrightarrow N$, e consideriamo le sequenze esatte corte:

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g'} \mathrm{Im}(g) \to 0$$
$$0 \to \mathrm{Im}(g) \xrightarrow{\iota} N \to N/\mathrm{Im}(g) \to 0$$

Se F è esatto a sinistra, le seguenti sequenze sono esatte:

$$0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g')} F(\mathrm{Im}(g))$$
$$0 \to F(\mathrm{Im}(g)) \xrightarrow{F(\iota)} F(N) \to F(N/\mathrm{Im}(g))$$

In particolare $F(\iota)$ è iniettiva, quindi

$$\mathrm{Ker}(F(g)) = \mathrm{Ker}(F(\iota \circ g')) = \mathrm{Ker}(F(\iota) \circ F(g')) = \mathrm{Ker}(F(g')) = \mathrm{Im}(F(f)),$$

cioè $0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N)$ è esatta. □

Analogamente, un funtore controvariante additivo è esatto a sinistra (rispettivamente a destra) se e solo se l'esattezza di

$$K \to M \to N \to 0 \quad (0 \to K \to M \to N)$$

implica l'esattezza di

$$0 \to F(N) \to F(M) \to F(K) \quad (F(N) \to F(M) \to F(K) \to 0)$$

ESEMPIO: Il funtore covariante $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ è esatto a sinistra $\forall$ A-modulo X. Infatti, consideriamo una successione esatta del tipo:

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

Vista l'additività di $\mathrm{Hom}_A(X, -)$, il seguente è un complesso:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(X, K) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(X, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(X, N).$$

Per verificarne l'esattezza, osserviamo che:

- $\forall\ X \xrightarrow{h} K$, poiché f è iniettiva $f_*(h) = f \circ h = 0 \Leftrightarrow h = 0$;
- Se $g_*(h) = 0$ per $X \xrightarrow{h} M$, allora $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$. Dunque $\forall\ x \in X\ \ \exists!\ s(x) \in K : f(s(x)) = h(x)$, e si verifica che $X \xrightarrow{s} K$ è un omomorfismo di A-moduli. Per cui $f_*(s) = h$.

Ragionamenti simili dimostrano che $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ è controvariante esatto a sinistra, mentre fra poco osserveremo che $X \otimes_A -$ e $- \otimes_A X$ sono esatti a destra (per la qual cosa verrà utile il prossimo esrcizio).

ESERCIZIO: Provare che un complesso di A-moduli $K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ è esatto se e solo se

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(K, X)$$

è una successione esatta per ogni A-modulo X.

L'enunciato analogo vale con l'Hom covariante.

OSS.: I funtori delle slides precedenti non sono esatti: ad esempio, consideriamo $A = \mathbb{Z}$ e l'omomorfismo surgettivo $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Applicando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ si ottiene l'omomorfismo di gruppi:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

OSS.: I funtori delle slides precedenti non sono esatti: ad esempio, consideriamo $A = \mathbb{Z}$ e l'omomorfismo surgettivo $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Applicando $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ si ottiene l'omomorfismo di gruppi:

$$0 \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

che ovviamente non può essere surgettivo.

LEMMA: Fissato un A-modulo X:

(i) $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ è esatto se e solo se X è proiettivo;

(ii) $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ è esatto se e solo se X è iniettivo.

Vediamo (ii), il punto (i) è analogo.

Se $0 \to K \xrightarrow{f} M \to N \to 0$ è una sequenza esatta corta, allora sappiamo che la seguente è esatta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, X) \to \mathrm{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(K, X).$$

La mappa f^* è surgettiva se e solo se $\forall\ K \xrightarrow{g} X\ \exists\ M \xrightarrow{h} X$ tale che

$$f^*(h) = h \circ f = g.$$

Siccome f era un arbitrario omomorfismo iniettivo di A-moduli, questa è proprio la definizione di A-modulo iniettivo. $\square$

Richiamo sul prodotto tensore di A-moduli.

Per un anello A, denotiamo l'A-modulo libero generato da un insieme T:

$$A^T = \bigoplus_{t \in T} A.$$

(Per alleggerire un po' le notazioni, spesso denoteremo con $t \in A^T$ l'elemento e_t della base corrispondente a $t \in T$).

DEF: Il prodotto tensore di due A-moduli M e N è l' A-modulo:

$$M \otimes_A N := \frac{A^{M \times N}}{L_A(M, N)}$$

dove $L_A(M, N)$ è il sottomodulo di $A^{M \times N}$ generato da:

(i) $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$ per ogni $m_1, m_2 \in M$, $n \in N$;

(ii) $(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$ per ogni $m \in M$, $n_1, n_2 \in N$;

(iii) $(am, n) - a(m, n)$ per ogni $a \in A$, $m \in M$, $n \in N$;

(iv) $(m, an) - a(m, n)$ per ogni $a \in A$, $m \in M$, $n \in N$.

Dato un elemento $(m, n) \in M \times N$, la sua classe in $M \otimes_A N$ si denota con $m \otimes n$. Gli elementi di questa forma si chiamano indecomponibili.

Naturalmente non tutti gli elementi di $M \otimes_A N$ sono indecomponibili, bensì il tipico elemento di $M \otimes_A N$ è:

$$\sum_{i=1}^{k} (m_i \otimes n_i) \quad \text{per qualche } k, \text{ dove } (m_i, n_i) \in M \times N.$$

PROP.: Dati A-moduli L, M, N, si hanno le seguenti proprietà:

(i) $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$;

(ii) $(L \otimes_A M) \otimes_A N \cong L \otimes_A (M \otimes_A N)$;

(iii) $(L \oplus M) \otimes_A N \cong L \otimes_A N \oplus M \otimes_A N$;

(iv) $M \otimes_A A \cong A \otimes_A M \cong M$.

È fondamentale sapere su cosa si tensorizza, ad esempio:

(i) $K[x] \otimes_{K[x]} K[x] \cong K[x]$;

(ii) $K[x] \otimes_{K} K[x] \cong K[x, y]$.

(ii). Si consideri la mappa di K-spazi vettoriali

$$
\begin{aligned}
K^{K[x] \times K[x]} &\xrightarrow{\phi} K[x, y] \\
(f, g) &\mapsto f(x)g(y)
\end{aligned}
$$

Chiaramente $L_K(K[x], K[x]) \subseteq \operatorname{Ker} \phi$, dunque è ben definita $K[x] \otimes_K K[x] \xrightarrow{\overline{\phi}} K[x, y]$. Considerando la mappa di K-spazi vettoriali

$$
\begin{array}{rcl}
\psi : K[x, y] & \to & K[x] \otimes_K K[x] \\
x^a y^b & \mapsto & x^a \otimes y^b,
\end{array}
$$

$\overline{\phi}$ e ψ sono inverse l'una dell'altra.

PROP.: Sia $T \subseteq A$ un sistema moltiplicativo di A, e M un A-modulo: allora

$$M \otimes_A T^{-1}A \cong T^{-1}M.$$

Dimostrazione: Il sottomodulo $L_A(M, T^{-1}A) \subseteq A^{M \times T^{-1}A}$ è certamente contenuto nel nucleo dell'omomorfismo di A-moduli:

$$A^{M\times T^{-1}A} \xrightarrow{f} T^{-1}M$$

$$(m, a/t) \mapsto ma/t$$

Per esempio, $f((xm, a/t)) = xma/t = mxa/t = f((m, xa/t))$ per ogni $a, x \in A$, $m \in M$ e $t \in T$. Quindi è ben definita la mappa sul quoziente $M \otimes_A T^{-1}A \xrightarrow{\overline{f}} T^{-1}M$. La mappa di A-moduli

$$T^{-1}M \xrightarrow{g} M \otimes_A T^{-1}A$$

$$m/t \mapsto m \otimes 1/t$$

è ben definita poiché $m/t = 0 \Leftrightarrow \exists\ u \in T : um = 0$, dunque

$$g(m/t) = m \otimes 1/t = m \otimes u/ut = um \otimes 1/ut = 0.$$

Inoltre $\overline{f}$ e g sono una l'inversa dell'altra. $\square$

PROP.: Se $I \subseteq A$ è un ideale e M un A-modulo, allora:

$$M \otimes_A A/I \cong M/IM.$$

Dimostrazione: Il sottomodulo $L_A(M, A/I) \subseteq A^{M \times A/I}$ è certamente contenuto nel nucleo dell'omomorfismo:

$$\begin{aligned} A^{M \times A/I} &\xrightarrow{f} M/IM \\ (m, \overline{a}) &\mapsto \overline{ma} \end{aligned}$$

Per esempio, $f((xm, \overline{a})) = xm\overline{a} = mx\overline{a} = f(m, x\overline{a})$ per ogni $a, x \in A$, $m \in M$. Quindi è ben definita la mappa sul quoziente:

$$\begin{aligned} M \otimes_A A/I &\xrightarrow{\overline{f}} M/IM \\ m \otimes \overline{a} &\mapsto \overline{ma} \end{aligned}$$

In maniera simile, IM è contenuto nel nucleo della mappa:

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{g} M \otimes_A A/I \\ m &\mapsto m \otimes \overline{1} \end{aligned}$$

poiché $g(xm) = xm \otimes \overline{1} = m \otimes x\overline{1} = m \otimes \overline{x} = 0$ per ogni $x \in I$.

Dunque è ben definita anche la mappa:

$$M/IM \xrightarrow{\overline{g}} M \otimes_A A/I$$
$$\overline{m} \mapsto m \otimes \overline{1}$$

Concludiamo perché $\overline{f}$ e $\overline{g}$ sono l'una l'inversa dell'altra. $\square$

Corollario: Se I è un ideale di A e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, allora

$$(A/I)_{\mathfrak{p}} \cong A/I \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}/IA_{\mathfrak{p}}.$$

ESERCIZIO: Si provi che, se M, N ed L sono A-moduli, allora:

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, L) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, L)).$$

Se ne deduca che $- \otimes_A M$ e $M \otimes_A -$ sono esatti a destra per ogni A-modulo M.

DEF.: Un A-modulo X si dice piatto se $- \otimes_A X$ (equivalentemente $X \otimes_A -$) è esatto.

ESEMPIO: Se T è un sistema moltiplicativo di A, $T^{-1}A$ è un A-modulo piatto.

OSS.: Siano $N \subset M$ due A-moduli e X un A-modulo piatto. Allora $\dfrac{M}{N} \otimes_A X \cong \dfrac{M \otimes_A X}{N \otimes_A X}$.

Infatti, la sequenza esatta $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ da luogo alla sequenza esatta $0 \to N \otimes_A X \to M \otimes_A X \to (M/N) \otimes_A X \to 0$. Dunque $(M/N) \otimes_A X$ è isomorfo al conucleo dell'inclusione $N \otimes_A X \subset M \otimes_A X$, cioè a $\dfrac{M \otimes_A X}{N \otimes_A X}$.

ESEMPIO: L'enunciato precedente è falso se X non è piatto: ad esempio, si considerino $M = A = K[x,y]$, $N = \mathfrak{m} = (x,y) \subset M$ e $X = A/\mathfrak{m} = K$. Allora $N \otimes_A X \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong K^2$ non è neppure un sottomodulo di $M \otimes_A X \cong A/\mathfrak{m} \cong K$.

ESERCIZIO: Sia $X_\bullet = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un complesso di A-moduli: Si provi che $X_\bullet$ è esatto se e solo se $(X_\bullet)_\mathfrak{p} = ((X_n)_\mathfrak{p})_{n\in\mathbb{Z}}$ è esatto per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ (si sfrutti la piattezza di $A_\mathfrak{p}$ e il fatto che, per un A-modulo M, si ha che $M = 0 \Leftrightarrow M_\mathfrak{p} = 0$ per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$).

OSS.: Se $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ è spezzante e F è un qualunque funtore additivo, covariante (o controvariante), allora

$$0 \to F(K) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \to 0 \quad (0 \to F(N) \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(K) \to 0)$$

è spezzante (in particolare esatta corta): infatti, fissati A-moduli K, M, N, le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) $M \cong K \oplus N$.

(ii) esistono omomorfismi di A-moduli:

$$\iota_K : K \to M, \quad \pi_K : M \to K$$
$$\iota_N : N \to M, \quad \pi_N : M \to N$$

tali che: $\pi_K \circ \iota_K = 1_K$, $\pi_N \circ \iota_N = 1_N$ e $\iota_K \circ \pi_K + \iota_N \circ \pi_N = 1_M$.

Se F è un funtore covariante additivo e abbiamo il punto (ii) precedente, allora si avrebbe:

$$F(\pi_K) \circ F(\iota_K) = 1_{F(K)}, \qquad F(\pi_N) \circ F(\iota_N) = 1_{F(N)},$$
$$F(\iota_K) \circ F(\pi_K) + F(\iota_N) \circ F(\pi_N) = 1_{F(M)}.$$

Dunque, $F(K \oplus N) \cong F(K) \oplus F(N)$ non appena F è additivo. Più in generale, ne deduciamo che ogni funtore additivo F commuta con le somme dirette finite, cioè dati A-moduli M_i per $i = 1, \ldots, n$:

$$F\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} F(M_i)$$

Dato un omomorfismo di anelli $A \xrightarrow{\phi} B$, si ha che:

- ogni B-modulo è un A-modulo via ϕ.
- se M è un A-modulo, $M \otimes_A B$ ha una struttura naturale di B-modulo.

Inoltre, se M è un A-modulo e L è un B-modulo, ogni mappa di A-moduli $M \xrightarrow{f} L$ può essere estesa in maniera naturale a una mappa di B-moduli

$$B \otimes_A M \xrightarrow{f'} L, \quad (f' = 1_B \otimes f).$$

Ora, se M, N sono A-moduli, possiamo considerare la mappa di A-moduli:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_A(M, N) & \to & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \\ \alpha & \mapsto & 1_B \otimes \alpha \end{array}$$

Siccome a destra abbiamo un B-modulo, la mappa sopra si estende ad una mappa di B-moduli:

$$\psi_M : B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

TEOREMA: Nella situazione precedente, assumiamo che A e M siano Noetheriani. Se B, come A-modulo, è piatto, allora:

$$\psi_M : B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N)$$

è un isomorfismo. In particolare, per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$,

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}).$$

Dim.: Se $M = A$, allora $\mathrm{Hom}_A(A, N) \cong N$, e

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A A, B \otimes_A N) \cong \mathrm{Hom}_B(B, B \otimes_A N) \cong B \otimes_A N.$$

Allora ψ_A va da $B \otimes_A N$ a se stesso, ed è facile verificare che è l'identità.

Se $M = A^n$, poiché $\otimes$ e Hom danno funtori additivi, ψ_{A^n} va da $(B \otimes_A N)^n$ a se stesso ed è l'identità.

In generale, essendo M finitamente generato (diciamo da n elementi), esiste una mappa di A-moduli $f : A^n \twoheadrightarrow M$, e poiché A è Noetheriano $\mathrm{Ker}(f)$ è pure finitamente generato (diciamo da m elementi), dunque abbiamo una sequenza esatta:

$$A^m \to A^n \to M \to 0.$$

Per non appesantire troppo le notazioni, denoteremo $Q' := B \otimes_A Q$ per ogni A-modulo Q. Poiché $B \otimes_A -$ è esatto a destra, abbiamo anche la sequenza esatta:

$$B^m \to B^n \to M' \to 0.$$

$\mathrm{Hom}_A(-, N)$ e $\mathrm{Hom}_B(-, N')$ sono controvarianti e esatti a sinistra, dunque otteniamo le seguenti successioni esatte:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(A^n, N) \to \mathrm{Hom}_A(A^m, N)$$
$$0 \to \mathrm{Hom}_B(M', N') \to \mathrm{Hom}_B(B^n, N') \to \mathrm{Hom}_B(B^m, N')$$

Siccome B è piatto, $B \otimes_A -$ è esatto: applicandolo alla prima sequenza, quindi, il seguente diagramma commutativo è a righe esatte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, N)' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_M"] & \mathrm{Hom}_A(A^n, N)' \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{A^n}"] & \mathrm{Hom}_A(A^m, N)' \arrow[d, "\psi_{A^m}"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(M', N') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(B^n, N') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(B^m, N')
\end{tikzcd}$$

Dal lemma dei 5, segue che ψ_M è un isomorfismo. □

ESEMPIO: Se B non è piatto come A-modulo ψ_M, in generale, non è né surgettiva né iniettiva: ad esempio, prendendo $A = \mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (osservando che $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathrm{MCD}(m,n)\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$):

(i) Se $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $N = \mathbb{Z}$, allora

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,N) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 0 = 0,$$

mentre

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(ii) Se $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, allora

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M,N) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

mentre

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, B \otimes_A N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 0) = 0.$$

ESERCIZIO (lemma dei 5): Se si ha un diagramma commutativo di A-moduli a righe esatte del tipo:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, two heads] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & X_4 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & X_5 \arrow[d, hook] \\
Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 \arrow[r] & Y_4 \arrow[r] & Y_5
\end{tikzcd}$$

allora ψ è un isomorfismo.

DEF.: Un A-sottomodulo $\iota : N \hookrightarrow M$ si dice addendo diretto di M se esiste $\pi \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tale che:

$$\pi \circ \iota = 1_N.$$

OSS.: Come già notato, $\iota : N \hookrightarrow M$ è un addendo diretto se e solo se esiste un A-sottomodulo $K \subseteq M$ tale che

$$M = \iota(N) \oplus K.$$

(Basta scegliere $K = \mathrm{Ker}(\pi)$).

Moduli proiettivi

Ricordiamo che un A-modulo P si dice proiettivo se esiste il seguente diagramma commutativo per ogni f e g:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] \arrow[d, "\forall g"] \\ M \arrow[r, two heads, "\forall f"'] & N \end{tikzcd}$$

OSS.: Un A-modulo libero F è proiettivo. Infatti, fissata una base $\{e_i\}_{i\in I}$ di F (dove I è un qualche insieme), qualunque scelta di elementi $m_i \in M$ per $i \in I$ determina un unico $h \in \mathrm{Hom}_A(F, M)$ definito da $h(e_i) = m_i$. In definitiva basta scegliere $m_i \in M$ tali che $f(m_i) = g(e_i)$.

PROP.: Un A-modulo P è proiettivo se e solo se è un addendo diretto di un A-modulo libero.

Dimostrazione: Se P è addendo diretto di un A-modulo libero F:

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d, bend left, "\pi"] \arrow[ddl, dotted, bend right, "\exists h"'] \\
 & P \arrow[u, bend left, "\iota"] \arrow[d, "\forall g"] \arrow[dl, dotted, "h\circ\iota"'] \\
M \arrow[r, two heads, "\forall f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Per il "solo se", scegliendo un sistema di generatori come A-modulo di P, diciamo $m_i \in P$ con i in qualche insieme I, ponendo $F = A^I$ abbiamo una mappa surgettiva $\pi : F \twoheadrightarrow P$. Ora basta sfruttare la proiettività di P come segue:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "1_P"] \arrow[dl, dotted, "\exists\iota"'] \\
F \arrow[r, two heads, "\pi"'] & P
\end{tikzcd}$$

$\square$

ESEMPIO: La proposizione della slide precedente ci dice che moduli proiettivi e moduli liberi sono oggetti simili. È d'obbligo fare un esempio di un modulo proiettivo non libero!

Consideriamo $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e gli A-moduli $P_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (0)$ e $P_2 = (0) \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Poiché $P_1 \oplus P_2 \cong A$, che è un A-modulo libero, P_1 è un A-modulo proiettivo. Siccome $(0, x) \cdot P_1 = 0$ per ogni $x \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, però, P_1 non è un A-modulo libero.

Su certi anelli esibire moduli proiettivi non liberi può essere difficile:

Congettura di Serre, Teorema di Quillen e Suslin: Tutti i moduli proiettivi su un anello di polinomi a coefficienti in un campo sono liberi.

TEOREMA: Sia A Noetheriano. Un A-modulo P finitamente generato è proiettivo se e solo se $P_{\mathfrak{p}}$ è un $A_{\mathfrak{p}}$-modulo libero per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Dimostrazione: Prima supponiamo che $(A, \mathfrak{m})$ sia locale. Prendiamo un sistema di generatori minimali $m_1, \ldots, m_r$ di P, e l'A-modulo libero $F = A^r$. La successione esatta corta:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi) \to F \xrightarrow{\pi} P \to 0$$

è spezzante perché P è proiettivo. Allora, visto che $- \otimes_A A/\mathfrak{m}$ è additivo, anche:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi)/\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\pi) \to F/\mathfrak{m}F \to P/\mathfrak{m}P \to 0$$

è esatta

TEOREMA: Sia A Noetheriano. Un A-modulo P finitamente generato è proiettivo se e solo se $P_{\mathfrak{p}}$ è un $A_{\mathfrak{p}}$-modulo libero per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Dimostrazione: Prima supponiamo che $(A, \mathfrak{m})$ sia locale. Prendiamo un sistema di generatori minimali $m_1, \ldots, m_r$ di P, e l'A-modulo libero $F = A^r$. La successione esatta corta:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi) \to F \xrightarrow{\pi} P \to 0$$

è spezzante perché P è proiettivo. Allora, visto che $- \otimes_A A/\mathfrak{m}$ è additivo, anche:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\pi)/\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\pi) \to (A/\mathfrak{m})^r \to (A/\mathfrak{m})^r \to 0$$

è esatta, dunque $\mathrm{Ker}(\pi)/\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\pi) = 0$, che per il lemma di Nakayama significa $\mathrm{Ker}(\pi) = 0$. Dunque $P \cong F$ è libero.

Come visto in un esercizio precedente, $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ è esatto se solo se $\mathrm{Hom}_A(P,-)_\mathfrak{p}$ è esatto per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Ma poiché A è Noetheriano e P è finitamente generato,

$$\mathrm{Hom}_A(P,-)_\mathfrak{p} \cong \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p},-).$$

Dunque $\mathrm{Hom}_A(P,-)$ è esatto se solo se $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p},-)$ è esatto per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, cioè P è un A-modulo proiettivo se e solo se $P_\mathfrak{p}$ è un $A_\mathfrak{p}$-modulo proiettivo per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, se e solo se (per quanto visto nella slide precedente) $P_\mathfrak{p}$ è un $A_\mathfrak{p}$-modulo libero per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. $\square$

OSS.: Abbiamo già utilizzato in varie forme che la categoria degli A-moduli ha abbastanza proiettivi. Cioè, per ogni A-modulo M esiste un A-modulo proiettivo P che lo presenta, vale a dire che esiste una mappa surgettiva di A-moduli

$$\epsilon : P \twoheadrightarrow M$$

Per prendere P basta scegliere un sistema di generatori di M, $\{m_i\}_I$, e il corrispondente modulo libero $F = A^I$. A questo punto $P = F$ e ϵ è definito da $\epsilon(e_i) = m_i$.

Dunque prendendo un qualunque A-modulo M, troviamo un A-modulo proiettivo P_0 e una mappa surgettiva ϵ tale che:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, two heads, "\epsilon_2"] & & P_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, two heads, "\epsilon_1"] & & P_0 \arrow[r, two heads, "\epsilon"] & M \\
& & \mathrm{Ker}(\epsilon_1) \arrow[ur, hook] & & \mathrm{Ker}(\epsilon) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

DEF.: Dato un A-modulo M, una risoluzione proiettiva di M è un complesso di moduli $P_\bullet$ tale che:

- $P_i = 0 \quad \forall \ i < 0$;
- P_i è proiettivo $\forall \ i \in \mathbb{N}$;
- $\exists \ \epsilon : P_0 \twoheadrightarrow M$ tale che $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ è un complesso esatto.

TEOREMA: Ogni A-modulo ha una risoluzione proiettiva, e questa è unica a meno di omotopia, cioè se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono due risoluzioni proiettive dello stesso modulo, esistono morfismi di complessi $P_\bullet \xrightarrow{\phi} Q_\bullet$ e $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$ tali che $\psi \circ \phi \sim 1_{P_\bullet}$ e $\phi \circ \psi \sim 1_{Q_\bullet}$.

Dimostrazione: L'esistenza l'abbiamo vista nella slide precedente, mentre l'unicità a meno di omotopia segue dal teorema del confronto 1:

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\ Q_\bullet \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

TEOREMA: Ogni A-modulo ha una risoluzione proiettiva, e questa è unica a meno di omotopia, cioè se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono due risoluzioni proiettive dello stesso modulo, esistono morfismi di complessi $P_\bullet \xrightarrow{\phi} Q_\bullet$ e $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$ tali che $\psi \circ \phi \sim 1_{P_\bullet}$ e $\phi \circ \psi \sim 1_{Q_\bullet}$.

Dimostrazione: L'esistenza l'abbiamo vista nella slide precedente, mentre l'unicità a meno di omotopia segue dal teorema del confronto 1:

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\ Q_\bullet \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

TEOREMA: Ogni A-modulo ha una risoluzione proiettiva, e questa è unica a meno di omotopia, cioè se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono due risoluzioni proiettive dello stesso modulo, esistono morfismi di complessi $P_\bullet \xrightarrow{\phi} Q_\bullet$ e $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$ tali che $\psi \circ \phi \sim 1_{P_\bullet}$ e $\phi \circ \psi \sim 1_{Q_\bullet}$.

Dimostrazione: L'esistenza l'abbiamo vista nella slide precedente, mentre l'unicità a meno di omotopia segue dal teorema del confronto 1:

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
Q_\bullet \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
P_\bullet \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

TEOREMA: Ogni A-modulo ha una risoluzione proiettiva, e questa è unica a meno di omotopia, cioè se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ sono due risoluzioni proiettive dello stesso modulo, esistono morfismi di complessi $P_\bullet \xrightarrow{\phi} Q_\bullet$ e $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$ tali che $\psi \circ \phi \sim 1_{P_\bullet}$ e $\phi \circ \psi \sim 1_{Q_\bullet}$.

Dimostrazione: L'esistenza l'abbiamo vista nella slide precedente, mentre l'unicità a meno di omotopia segue dal teorema del confronto 1:

$$\begin{tikzcd}
P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\phi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
Q_\bullet \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\psi"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "1_M"'] & 0 \\
P_\bullet \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Quindi $\psi \circ \phi$ solleva 1_M, ma ovviamente anche $1_{P_\bullet}$ solleva 1_M, dunque $\psi \circ \phi \sim 1_{P_\bullet}$. Analogamente $\phi \circ \psi \sim 1_{Q_\bullet}$. $\square$

Moduli iniettivi

Ricordiamo che un A-modulo E si dice iniettivo se esiste il seguente diagramma commutativo per ogni f e g:

$$\begin{tikzcd}
 & E \\
M \arrow[ur, dotted, "\exists h"] & N \arrow[l, hook', "\forall f"] \arrow[u, "\forall g"']
\end{tikzcd}$$

OSS.: Un A-modulo libero F NON è iniettivo in generale. Ad esempio, abbiamo già visto che se $A = \mathbb{Z}$ e abbiamo la seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \\
\mathbb{Z} \arrow[ur, dotted, "\exists h?"] & \mathbb{Z} \arrow[l, hook', "2\cdot"] \arrow[u, "1_{\mathbb{Z}}"']
\end{tikzcd}$$

Se esistesse h, dovremmo avere $h(2 \cdot 1) = 2 \cdot h(1) = 1$ $\lightning$

Criterio di Baer: Un A-modulo E è iniettivo se e solo se, per ogni ideale $I \subseteq A$, ogni mappa di A-moduli da I in E si estende ad A:

$$\begin{tikzcd} & E \\ A \arrow[ur, dotted, "\exists h"] & I \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[u, "\forall s"'] \end{tikzcd}$$

Dimostrazione: Il "solo se" è ovvio, dimostriamo il "se". Sia $N \subseteq M$ un'inclusione di A-moduli e $N \xrightarrow{g} E$ una mappa di A-moduli. Usando il lemma di Zorn, scegliamo un A-modulo M' tale che $N \subseteq M' \subseteq M$ e M' sia massimale (rispetto all'inclusione) fra i sottomoduli di M a cui si può estendere g, e chiamiamo $g' : M' \to E$ tale estensione.

Per assurdo, prendiamo $m \in M \setminus M'$, e consideriamo l'ideale

$$I = \{a \in A : am \in M'\} \subseteq A.$$

Dall'ipotesi, sappiamo che la mappa:

$$I \xrightarrow{\cdot m} M' \xrightarrow{g'} E$$

può essere estesa ad una mappa $A \xrightarrow{h} E$. Allora consideriamo l' A-modulo $M'' = M' + mA$ e la mappa $M'' \xrightarrow{g''} E$ definita come:

$$g''(m' + am) = g'(m') + h(a) \;\; \forall \; m' \in M' \text{ e } a \in A.$$

Per vedere che g'' è ben definita, consideriamo $m'_i \in M'$ e $a_i \in A$ tali che $m'_1 + a_1 m = m'_2 + a_2 m$: poiché h estende $g' \circ \cdot m$, si ha che $h(a_1 - a_2) = g'(m'_2 - m'_1)$, cioè $g''(m'_1 + a_1 m) = g''(m'_2 + a_2 m)$.

Questo contraddice la massimalità di M'. $\square$

ESEMPIO: $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo. Utilizzando il criterio di Baer, basta dimostrare che ogni mappa $(k) \xrightarrow{g} \mathbb{Q}$, dove k è un intero non nullo, si può estendere a una mappa:

$$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}.$$

È sufficiente porre:

$$h(m) = (m/k) \cdot g(k) \quad \forall\ m \in \mathbb{Z}.$$

DEF.: Un A-modulo M si dice divisibile se, per ogni $m \in M$ e per ogni non-zero-divisore (NZD) $a \in A$, $\exists\ m' \in M$ tale che $m = am'$.

COROLLARIO: Un A-modulo iniettivo E è divisibile. Se A è un PID, allora un A-modulo è iniettivo se e solo se è divisibile.

Dimostrazione: Osserviamo che la divisibilità di E equivale al fatto che, per ogni ideale principale $(a) \subseteq A$ con a NZD, ogni mappa $(a) \xrightarrow{s} E$ può essere estesa a una mappa $A \xrightarrow{h} E$ (poiché bisogna avere $s(a) = h(a) = a \cdot h(1)$ e, siccome a è NZD, $s(a)$ può essere qualunque elemento di E).

Dunque l'implicazione "iniettivo $\Rightarrow$ divisibile" è chiara, e l' implicazione opposta quando A è un PID segue dal criterio di Baer e dal fatto che tutti gli ideali non nulli di A sono principali e generati da un NZD. $\square$

OSS: Se un A-modulo M è divisibile, allora M/N è un A-modulo divisibile per ogni sottomodulo $N \subseteq M$.

OSS.: Se $A \xrightarrow{f} B$ è un omomorfismo di anelli, allora per ogni A-modulo M e B-modulo U (vedendo U anche come A-modulo via f)

$$\mathrm{Hom}_A(U, M)$$

ha una struttura di B-modulo compatibile con quella di A-modulo:

$$b \cdot \phi(u) := \phi(bu) \quad \forall\ b \in B,\ u \in U,\ \phi \in \mathrm{Hom}_A(U, M).$$

ESERCIZIO: Con le precedenti notazioni, dimostrare che il seguente è un isomorfismo di B-moduli

$$\xi : \mathrm{Hom}_B(U, \mathrm{Hom}_A(B, M)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_A(U, M)$$

dato da $(\xi(\phi))(u) = (\phi(u))(1) \quad \forall\ u \in U, \phi \in \mathrm{Hom}_B(U, \mathrm{Hom}_A(B, M))$.

Il nostro prossimo scopo è quello di dimostrare che la categoria degli A-moduli ha abbastanza iniettivi, cioè ogni A-modulo M ammette un'inclusione

$$\epsilon : M \hookrightarrow E$$

dove E è un A-modulo iniettivo.

Per fare questo dobbiamo costruire "tanti" A-moduli iniettivi, e lo faremo sfruttando la nostra conoscenza per $A = \mathbb{Z}$ e il seguente:

LEMMA: Se $A \xrightarrow{f} B$ è un omomorfismo di anelli e E è un A-modulo iniettivo, allora $\mathrm{Hom}_A(B, E)$ è un B-modulo iniettivo.

Dimostrazione: Per l'osservazione della slide precedente, per ogni B-modulo U, c'è un isomorfismo naturale di B-moduli

$$\mathrm{Hom}_B(U, \mathrm{Hom}_A(B, E)) \cong \mathrm{Hom}_A(U, E)$$

Allora l'esattezza di $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ implica l'esattezza di $\mathrm{Hom}_B(-, \mathrm{Hom}_A(B, E))$. $\square$

TEOREMA: La categoria degli A-moduli ha abbastanza iniettivi.

Dimostrazione: Prima dimostriamo il teorema per $A = \mathbb{Z}$. Uno $\mathbb{Z}$-modulo libero $F = \mathbb{Z}^I$ si può immergere in $E = \mathbb{Q}^I$, che essendo divisibile è iniettivo. Uno $\mathbb{Z}$-modulo arbitrario M, presentandolo tramite uno $\mathbb{Z}$-modulo libero $\epsilon : F \twoheadrightarrow M$, è isomorfo a $F/\operatorname{Ker}(\epsilon)$. Abbiamo già osservato che F si immerge in uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo (e quindi divisibile) E, dunque $F/\operatorname{Ker}(\epsilon)$ si immerge nello $\mathbb{Z}$-modulo divisibile $E/\operatorname{Ker}(\epsilon)$, che è iniettivo poiché $\mathbb{Z}$ è un PID.

Passiamo a un anello qualsiasi A e un A-modulo M. Come prima cosa osserviamo che si ha la seguente mappa *iniettiva* di A-moduli:

$$\begin{aligned} \alpha : M &\hookrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \\ m &\mapsto \begin{smallmatrix} A & \to & M \\ a & \mapsto & am \end{smallmatrix} \end{aligned}$$

Considerando M come uno $\mathbb{Z}$-modulo, esiste una mappa di $\mathbb{Z}$-moduli $\beta : M \hookrightarrow E$ dove E è uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo. Grazie al fatto che il funtore covariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)$ è esatto a sinistra, abbiamo un'immersione:

$$\beta_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, E).$$

Anche se β_* nasce come mappa di $\mathbb{Z}$-moduli, in realtà è semplice vedere che è anche un omomorfismo di A-moduli, dunque otteniamo un'immersione di A-moduli:

$$\beta_* \circ \alpha : M \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, E),$$

e $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, E)$ è un A-modulo iniettivo grazie al lemma. $\square$

Dunque prendendo un qualunque A-modulo M, troviamo un A-modulo iniettivo E^0 e una mappa iniettiva ϵ tale che:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, hook, "\epsilon"] & E^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, two heads] & & E^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, two heads] & & E^2 \arrow[r] & \cdots \\
& & \mathrm{Coker}(\epsilon) \arrow[ur, hook, "\epsilon^1"] & & \mathrm{Coker}(\epsilon^1) \arrow[ur, hook, "\epsilon^2"] & &
\end{tikzcd}
$$

DEF.: Dato un A-modulo M, una risoluzione iniettiva di M è un complesso di moduli $E^\bullet$ tale che:

- $E^i = 0 \quad \forall \ i < 0$;
- E^i è iniettivo $\forall \ i \in \mathbb{N}$;
- $\exists \ \epsilon : M \hookrightarrow E^0$ tale che $0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^\bullet$ è un complesso esatto.

TEOREMA: Ogni A-modulo ha una risoluzione iniettiva, e questa è unica a meno di omotopia, cioè se $E^\bullet$ e $I^\bullet$ sono due risoluzioni iniettive dello stesso modulo, esistono morfismi di complessi $E^\bullet \xrightarrow{\phi} I^\bullet$ e $I^\bullet \xrightarrow{\psi} E^\bullet$ tali che $\psi \circ \phi \sim 1_{E^\bullet}$ e $\phi \circ \psi \sim 1_{I^\bullet}$.

Dimostrazione: L'esistenza l'abbiamo vista nella slide precedente, mentre l'unicità a meno di omotopia segue dal teorema del confronto 2 analogamente alle risoluzioni proiettive. $\square$

Funtori derivati

Sia F un funtore covariante additivo esatto a destra, e M un A-modulo. Prendiamo una risoluzione proiettiva $P_\bullet$ di M, e consideriamo il complesso di A-moduli:

$$\cdots \to F(P_2) \xrightarrow{F(d_2^P)} F(P_1) \xrightarrow{F(d_1^P)} F(P_0) \xrightarrow{F(\epsilon)} F(M) \to 0.$$

Tale complesso è esatto in $F(M)$ e in $F(P_0)$ perché F è esatto a destra, ma per il resto perde l'esattezza. Considerando il complesso $F(P_\bullet)$

$$\cdots \to F(P_2) \xrightarrow{F(d_2^P)} F(P_1) \xrightarrow{F(d_1^P)} F(P_0) \to 0,$$

l'esattezza potrebbe essere persa ovunque.
Ma questo è quello che volevamo, perché vuol dire che c'è omologia non banale!

Quindi gli A-moduli $H_i(F(P_\bullet))$ in generale non sono nulli. Osserviamo che $H_0(F(P_\bullet)) \cong F(M)$, siccome F è esatto a destra.

E se prendessimo un' altra risoluzione proiettiva $Q_\bullet$ di M???

Sappiamo che esistono morfismi di complessi $P_\bullet \xrightarrow{\phi} Q_\bullet$ e $Q_\bullet \xrightarrow{\psi} P_\bullet$ tali che $\psi \circ \phi \sim 1_{P_\bullet}$ e $\phi \circ \psi \sim 1_{P_\bullet}$. Quindi, ad esempio, esistono omomorfismi di A-moduli $P_n \xrightarrow{s_n} P_{n+1}$ tali che

$$\psi_n \circ \phi_n - 1_{P_n} = d_{n+1}^P \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n^P \quad \forall \ n \in \mathbb{Z}.$$

Siccome F è un funtore covariante additivo, otteniamo

$$F(\psi_n) \circ F(\phi_n) - 1_{F(P_n)} = F(d_{n+1}^P) \circ F(s_n) + F(s_{n-1}) \circ F(d_n^P) \quad \forall \ n \in \mathbb{Z},$$

deducendo che anche $F(P_\bullet)$ e $F(Q_\bullet)$ sono uguali a meno di omotopia.

In particolare, questo implica che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'omologia

$$H_i(F(P_\bullet)) \cong H_i(F(Q_\bullet))$$

non dipende dalla risoluzione scelta, ma solo da F, M e i.

Allora poniamo $L_iF(M) := H_i(F(P_\bullet))$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Osserviamo che $L_0F(M) \cong F(M)$. In generale si vede, usando il teorema del confronto, che tutti gli L_iF sono funtori additivi, e che L_0F è isomorfo a F come funtore, nel senso che:

- c' è un isomorfismo di A-moduli $\phi_M : L_0F(M) \xrightarrow{\cong} F(M)$ per ogni A-modulo M.
- I quadrati

$$\begin{tikzcd} L_0F(M) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "L_0F(f)"'] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ L_0F(N) \arrow[r, "\phi_N"'] & F(N) \end{tikzcd}$$

  commutano per ogni omomorfismo di A-moduli $M \xrightarrow{f} N$.

ESERCIZIO: Sia F un funtore A-lineare covariante esatto a destra. Si provi che $L_i F$ è un funtore covariante A-lineare per ogni $i \in \mathbb{N}$.

DEF.: Sia F un funtore additivo esatto a destra.

- Se F è covariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione proiettiva $P_\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l' i-esimo funtore derivato a sinistra di F:

$$L_i F(M) := H_i(F(P_\bullet)).$$

- Se F è controvariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione iniettiva $E^\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l' i-esimo funtore derivato a sinistra di F:

$$L_i F(M) := H_i(F(E^\bullet)).$$

Se F un funtore additivo esatto a sinistra.

- Se F è controvariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione proiettiva $P_\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l' i-esimo funtore derivato a destra di F:

$$R^i F(M) := H^i(F(P_\bullet)).$$

- Se F è covariante, per ogni A-modulo M si sceglie una risoluzione iniettiva $E^\bullet$ di M e si definisce, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l' i-esimo funtore derivato a destra di F:

$$R^i F(M) := H^i(F(E^\bullet)).$$

Un po' di esempi

ESEMPIO 1: Sia $A = K[x, y]$ l'anello di polinomi in due variabili su di un campo K, $A/\mathfrak{m} \cong K$, dove $\mathfrak{m} = (x, y)$ e $F = - \otimes_A A/\mathfrak{m}$.

Vogliamo calcolare: $L_i F(K)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Siccome F è covariante esatto a destra, dobbiamo trovare una risoluzione proiettiva di K come A-modulo. Seguiamo il procedimento che abbiamo descritto per trovare una risoluzione proiettiva (e visto durante la prima lezione), che in realtà ci restituisce addirittura una risoluzione libera (cioè che consiste di A-moduli liberi):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\binom{-y}{x}"] \arrow[dr, two heads] & & A^2 \arrow[rr, "(x \quad y)"] \arrow[dr, two heads, "\epsilon"] & & A \arrow[r, two heads] & K = A/\mathfrak{m} \\
& & A(-y;x) \arrow[ur, hook] & & \mathfrak{m} \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Soffermiamoci un secondo a capire perché:

$$\mathrm{Ker}(A^2 \xrightarrow{(x \quad y)} A) = A(-y; x) \subseteq A^2 \qquad (*)$$

Se un vettore $(f; g)$ sta nel nucleo di sopra, allora $xf + yg = 0$. Dunque $yg \in (x) \subseteq A$. Siccome (x) è primo, otteniamo $g \in (x)$.

Dunque $g = hx$ per qualche $h \in A$, e $xf = -yg = -yxh$ implica, poiché A è un dominio, che $f = -yh$. Quindi,

$$(f; g) = h(-y; x) \in A(-y; x) \subseteq A^2.$$

Essendo l'altra inclusione ovvia, abbiamo ottenuto $(*)$.

Proseguiamo col calcolo di $L_i F(K)$, dove $F = - \otimes_A A/\mathfrak{m}$. Per fare ciò bisogna applicare F alla risoluzione proiettiva di K. Siccome tensorizzare per $A/\mathfrak{m}$ è come andare modulo $\mathfrak{m}$, si ha:

$$0 \longrightarrow A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\overline{y} \\ \overline{x} \end{pmatrix}} A^2/\mathfrak{m}A^2 \xrightarrow{(\overline{x} \quad \overline{y})} A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0\ .$$

Proseguiamo col calcolo di $L_iF(K)$, dove $F = - \otimes_A A/\mathfrak{m}$. Per fare ciò bisogna applicare F alla risoluzione proiettiva di K. Siccome tensorizzare per $A/\mathfrak{m}$ è come andare modulo $\mathfrak{m}$, si ha:

$$0 \longrightarrow A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\quad 0 \quad} A^2/\mathfrak{m}A^2 \xrightarrow{\quad 0 \quad} A/\mathfrak{m} \longrightarrow 0 \, .$$

Proseguiamo col calcolo di $L_i F(K)$, dove $F = - \otimes_A A/\mathfrak{m}$. Per fare ciò bisogna applicare F alla risoluzione proiettiva di K. Siccome tensorizzare per $A/\mathfrak{m}$ è come andare modulo $\mathfrak{m}$, si ha:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\quad 0 \quad} K^2 \xrightarrow{\quad 0 \quad} K \longrightarrow 0 \; .$$

Quindi otteniamo, chiamando $C_\bullet$ il complesso sopra:

- $L_0 F(K) = H_0(C_\bullet) = K \quad (= F(K))$;
- $L_1 F(K) = H_1(C_\bullet) = K^2$;
- $L_2 F(K) = H_2(C_\bullet) = K$.
- $L_i F(K) = 0 \quad \forall \; i > 2$.

ESEMPIO 2: Sia $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ e $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$.

Vogliamo calcolare: $R^i F(\mathbb{Z})$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Siccome F è covariante esatto a sinistra, dobbiamo trovare una risoluzione iniettiva di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Seguiamo il procedimento che abbiamo descritto per trovare una risoluzione iniettiva e il fatto che su $\mathbb{Z}$ i moduli divisibili sono iniettivi.

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Applicando $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ otteniamo il complesso $C^{\bullet}$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

ESEMPIO 2: Sia $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ e $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$.

Vogliamo calcolare: $R^i F(\mathbb{Z})$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Siccome F è covariante esatto a sinistra, dobbiamo trovare una risoluzione iniettiva di $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Seguiamo il procedimento che abbiamo descritto per trovare una risoluzione iniettiva e il fatto che su $\mathbb{Z}$ i moduli divisibili sono iniettivi.

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0.$$

Applicando $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$ otteniamo il complesso $C^\bullet$:

$$0 \to 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

Vediamo cos' è $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ogni $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ è determinato da $\phi(\bar{1}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Naturalmente $\phi(\bar{1})$ deve soddisfare $2 \cdot \phi(\bar{1}) = 0$. Dunque prendendo un rappresentante $x \in \mathbb{Q}$ di $\phi(\bar{1})$ dobbiamo avere $2x \in \mathbb{Z}$, cioè

$$x = n/2 \quad \text{per qualche} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Se n è pari, la classe di x è $\bar{0}$. Se n è dispari, la classe di x è $\overline{1/2}$. In definitiva, concludiamo che:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dunque il complesso $C^\bullet$ è isomorfo come complesso a:

$$0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0,$$

quindi otteniamo, ricordando che $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$:

- $R^0F(\mathbb{Z}) = H^0(C^\bullet) = 0 \quad (= F(\mathbb{Z}))$;
- $R^1F(\mathbb{Z}) = H^1(C^\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- $R^iF(\mathbb{Z}) = 0 \quad \forall\ i > 1$.

ESEMPIO 3: Sia $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$.

Vogliamo calcolare: $R^i F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Siccome F è controvariante esatto a sinistra, dobbiamo trovare una risoluzione proiettiva di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Ancora una volta, seguiamo il procedimento che abbiamo descritto per trovare una risoluzione proiettiva, che in realtà ci restituisce addirittura una risoluzione libera (cioè che consiste di $\mathbb{Z}$-moduli liberi):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[rr, "2\cdot"] \arrow[dr, two heads, "2\cdot"'] & & \mathbb{Z} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ & & 2\mathbb{Z} \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Applicando $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$, otteniamo il complesso $C^{\bullet}$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{2\cdot} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to 0$$

Applicando $F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$, otteniamo il complesso $C^\bullet$:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2\cdot} \mathbb{Z} \to 0$$

Dunque concludiamo che:

- $R^0F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^0(C^\bullet) = 0 \quad (= F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$;
- $R^1F(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = H^1(C^\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- $R^iF(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0 \quad \forall \ i > 1$.

Nel secondo esempio abbiamo visto che, se $G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, -)$:

- $R^0G(\mathbb{Z}) = H^0(C^\bullet) = 0 \quad (= G(\mathbb{Z}))$;
- $R^1G(\mathbb{Z}) = H^1(C^\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
- $R^iG(\mathbb{Z}) = 0 \quad \forall \ i > 1$.

Questa simmetria non è un caso!

ESEMPIO 4: Sia $A = K[x]/(x^2)$ e $K = A/(\overline{x})$.

Vogliamo vedere che K non ammette risoluzione proiettiva finita come A-modulo. Per farlo calcoleremo tutti i funtori derivati di $F = K \otimes_A -$ in K, $L_i F(K)$. Per trovare una risoluzione proiettiva di K come A-modulo, osserviamo che:

$$\mathrm{Ker}(A \xrightarrow{\cdot \overline{x}} A) = (\overline{x}) \subseteq A.$$

Infatti, se $a \in A$ è tale che $\overline{x}a = 0$, allora scegliendo un rappresentante $f \in K[x]$ di a abbiamo che $fx = gx^2$ (in $K[x]$) per qualche $g \in K[x]$, che visto che $K[x]$ è un dominio implica che $f = gx$, che a sua volta implica

$$a \in (\overline{x}).$$

Ora calcoliamo una risoluzione proiettiva di K come A-modulo:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \arrow[r, "\cdot\overline{x}"] & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[r, two heads] & K = A/(\overline{x}) \\
& & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}
$$

Tensorizzando per $K = A/(\overline{x})$, otteniamo il complesso $C_\bullet$:

$$\cdots \to A/(\overline{x}) \xrightarrow{\cdot\overline{x}} A/(\overline{x}) \xrightarrow{\cdot\overline{x}} A/(\overline{x}) \xrightarrow{\cdot\overline{x}} A/(\overline{x}) \to 0$$

Ora calcoliamo una risoluzione proiettiva di K come A-modulo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \arrow[r, "\cdot\overline{x}"] & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[r, two heads] & K = A/(\overline{x}) \\
& & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Tensorizzando per $K = A/(\overline{x})$, otteniamo il complesso $C_\bullet$:

$$\cdots \to A/(\overline{x}) \xrightarrow{0} A/(\overline{x}) \xrightarrow{0} A/(\overline{x}) \xrightarrow{0} A/(\overline{x}) \to 0$$

Ora calcoliamo una risoluzione proiettiva di K come A-modulo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A \arrow[r, "\cdot\overline{x}"] & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[rr, "\cdot\overline{x}"] \arrow[dr, two heads, "\cdot\overline{x}"] & & A \arrow[r, two heads] & K = A/(\overline{x}) \\
& & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & & (\overline{x}) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Tensorizzando per $K = A/(\overline{x})$, otteniamo il complesso $C_\bullet$:

$$\cdots \to K \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} K \to 0$$

Quindi, se $F = K \otimes_A -$, otteniamo:

$$L_i F(K) = K \quad \forall \ i \in \mathbb{N},$$

da cui deduciamo che K non può avere una risoluzione proiettiva finita come A-modulo.

ESERCIZIO: Sia A un PID, e M un A-modulo. Provare che:

- M ammette una risoluzione iniettiva del tipo:

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to 0.$$

- M ammette una risoluzione proiettiva del tipo:

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0.$$

Il ritrovo dell'esattezza

Ora vedremo la proprietà fondamentale dei funtori derivati. Per non appesantire troppo le notazioni, per le prossime slides lavoriamo con un funtore F covariante esatto a destra.

Per definizione, l'esattezza a destra significa che, per ogni sequenza esatta corta di A-moduli

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0,$$

c' è una sequenza esatta del tipo:

$$F(K) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \to 0.$$

La mappa $F(f)$ però potrebbe non essere iniettiva. Ma F non se lo ricorda proprio che $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ era esatta???

Il teorema della successione esatta lunga

TEOREMA: Se $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ è una successione esatta di A-moduli, allora, per ogni $n > 0$, esistono mappe di A-moduli

$$L_nF(N) \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}F(K)$$

tali che la seguente successione è esatta:

$$\cdots \to L_nF(N) \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1}F(K) \to L_{n-1}F(M) \to L_{n-1}F(N) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$
$$\cdots \to L_1F(N) \xrightarrow{\partial_1} L_0F(K) \to L_0F(M) \to L_0F(N) \to 0$$

Dimostrazione: Se troviamo tre risoluzioni proiettive $P'_\bullet \twoheadrightarrow K$, $P_\bullet \twoheadrightarrow M$ e $P''_\bullet \twoheadrightarrow N$ tali che:

$$0 \to F(P'_\bullet) \to F(P_\bullet) \to F(P''_\bullet) \to 0$$

è una successione esatta corta di complessi, la tesi seguirà subito dal teorema che abbiamo ottenuto come conseguenza del lemma del serpente.

Per esibire $P'_\bullet \twoheadrightarrow K$, $P_\bullet \twoheadrightarrow M$ e $P''_\bullet \twoheadrightarrow N$ scegliamo due risoluzioni arbitrarie $P'_\bullet \twoheadrightarrow K$ e $P''_\bullet \twoheadrightarrow N$ e costruiamo il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\epsilon') \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}(\epsilon) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}(\epsilon'') \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon'"'] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon=(f\circ\epsilon',\epsilon''')"'] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon''"] \arrow[dl, dotted, "\exists\epsilon'''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & {} & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Il lemma del serpente ci dice che esiste $\mathrm{Ker}(\epsilon'') \to \mathrm{Coker}(\epsilon')$ tale che la seguente sequenza è esatta:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\epsilon') \to \mathrm{Ker}(\epsilon) \to \mathrm{Ker}(\epsilon'') \to \mathrm{Coker}(\epsilon') \to \mathrm{Coker}(\epsilon) \to \mathrm{Coker}(\epsilon'') \to 0,$$

Per esibire $P'_\bullet \twoheadrightarrow K$, $P_\bullet \twoheadrightarrow M$ e $P''_\bullet \twoheadrightarrow N$ scegliamo due risoluzioni arbitrarie $P'_\bullet \twoheadrightarrow K$ e $P''_\bullet \twoheadrightarrow N$ e costruiamo il seguente diagramma:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\epsilon') \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}(\epsilon) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ker}(\epsilon'') \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon'"'] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon=(f\circ\epsilon',\epsilon''')"'] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon''"] \arrow[dl, dotted, "\exists\epsilon'''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Il lemma del serpente ci dice che esiste $\mathrm{Ker}(\epsilon'') \to \mathrm{Coker}(\epsilon')$ tale che la seguente sequenza è esatta:

$$0 \to \mathrm{Ker}(\epsilon') \to \mathrm{Ker}(\epsilon) \to \mathrm{Ker}(\epsilon'') \to 0 \to \mathrm{Coker}(\epsilon) \to 0 \to 0,$$

in particolare ϵ è surgettiva, dunque tutte le righe e colonne del diagramma di sopra sono esatte!

Adesso possiamo ripetere lo stesso ragionamento, poiché una risoluzione proiettiva di $\mathrm{Ker}(\epsilon')$ è:

$$\cdots P_3' \to P_2' \to P_1' \to 0$$

una risoluzione proiettiva di $\mathrm{Ker}(\epsilon'')$ è:

$$\cdots P_3'' \to P_2'' \to P_1'' \to 0.$$

Dunque ne deduciamo che una risoluzione proiettiva $P_\bullet$ di M è definita da $P_n = P_n' \oplus P_n''$. Siccome nella sequenza esatta di complessi $0 \to P_\bullet' \to P_\bullet \to P_\bullet'' \to 0$ ogni pezzo

$$0 \to P_n' \to P_n \to P_n'' \to 0$$

è una sequenza spezzante di A-moduli, la seguente rimane esatta:

$$0 \to F(P_\bullet') \to F(P_\bullet) \to F(P_\bullet'') \to 0$$

$\square$

Successioni esatte lunghe per tutti i funtori

TEOREMA: Sia $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una sequenza esatta corta di A-moduli.

- Un funtore covariante F esatto a destra induce la sequenza esatta lunga:

$$\cdots \to L_n F(N) \to L_{n-1}F(K) \to L_{n-1}F(M) \to L_{n-1}F(N) \to \cdots$$
$$\cdots \to L_1 F(N) \to L_0 F(K) \to L_0 F(M) \to L_0 F(N) \to 0$$

- Un funtore controvariante F esatto a destra induce la sequenza esatta lunga:

$$\cdots \to L_n F(K) \to L_{n-1}F(N) \to L_{n-1}F(M) \to L_{n-1}F(K) \to \cdots$$
$$\cdots \to L_1 F(K) \to L_0 F(N) \to L_0 F(M) \to L_0 F(K) \to 0$$

- Un funtore covariante F esatto a sinistra induce la sequenza esatta lunga:

$$0 \to R^0 F(K) \to R^0 F(M) \to R^0 F(N) \to R^1 F(K) \to \cdots$$
$$\cdots \to R^n F(N) \to R^{n+1} F(K) \to R^{n+1} F(M) \to R^{n+1} F(N) \to \cdots$$

- Un funtore controvariante F esatto a sinistra induce la sequenza esatta lunga:

$$0 \to R^0 F(N) \to R^0 F(M) \to R^0 F(K) \to R^1 F(N) \to \cdots$$
$$\cdots \to R^n F(K) \to R^{n+1} F(N) \to R^{n+1} F(M) \to R^{n+1} F(K) \to \cdots$$

Tor e Ext

L'esistenza della successione esatta lunga è funtoriale! Cioè, ogni morfismo fra sequenze esatte corte induce un morfismo fra le rispettive sequenze esatte lunghe.

TEOREMA: Se M e N sono due A-moduli, allora per ogni $i \in \mathbb{N}$:

- $(L_i(- \otimes_A M))(N) = (L_i(N \otimes_A -))(M) =: \mathrm{Tor}_i^A(M,N)$.
- $(R^i(\mathrm{Hom}_A(M,-)))(N) = (R^i(\mathrm{Hom}_A(-,N)))(M) =: \mathrm{Ext}_A^i(M,N)$.

OSS.: Per definizione, si ha

$$\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N \quad \text{e} \quad \mathrm{Ext}_A^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N).$$

Sequenze spettrali

Fissato un anello A, una **sequenza spettrale** $\mathbb{E}$ consiste nei seguenti dati:

- Una collezione di A-moduli $(E_r^{p,q})$, per $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ e $r \in \mathbb{Z}_{>0}$.
- Fissato r, per ogni (p,q), mappe di A-moduli

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

  tali che $d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r,q+r-1} = 0$.
- Per ogni r, $E_{r+1}^{p,q} = \dfrac{\mathrm{Ker}(d_r^{p,q})}{\mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1})}$.

Conviene immaginarsi una sequenza spettrale come un libro, in cui a pagina r è illustrato il foglio $(E_r^{\bullet,\bullet})$ .....

Pagina 1 $\quad (d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q})$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \iddots \\
\cdots & \longrightarrow & E_1^{0,3} & \longrightarrow & E_1^{1,3} & \longrightarrow & E_1^{2,3} & \longrightarrow & E_1^{3,3} & \longrightarrow & E_1^{4,3} & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & E_1^{0,2} & \longrightarrow & E_1^{1,2} & \longrightarrow & E_1^{2,2} & \longrightarrow & E_1^{3,2} & \longrightarrow & E_1^{4,2} & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & E_1^{0,1} & \longrightarrow & E_1^{1,1} & \longrightarrow & E_1^{2,1} & \longrightarrow & E_1^{3,1} & \longrightarrow & E_1^{4,1} & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & E_1^{0,0} & \longrightarrow & E_1^{1,0} & \longrightarrow & E_1^{2,0} & \longrightarrow & E_1^{3,0} & \longrightarrow & E_1^{4,0} & \longrightarrow & \cdots \\
\iddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
\end{array}
$$

Pagina 2 $\quad (d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1})$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots \arrow[drr] & \vdots \arrow[drr] & \vdots \arrow[drr] & \vdots \arrow[drr] & \vdots \arrow[drr] & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[drr] & E_2^{0,3} \arrow[drr] & E_2^{1,3} \arrow[drr] & E_2^{2,3} \arrow[drr] & E_2^{3,3} \arrow[drr] & E_2^{4,3} & \cdots \\
\cdots \arrow[drr] & E_2^{0,2} \arrow[drr] & E_2^{1,2} \arrow[drr] & E_2^{2,2} \arrow[drr] & E_2^{3,2} \arrow[drr] & E_2^{4,2} & \cdots \\
\cdots \arrow[drr] & E_2^{0,1} \arrow[drr] & E_2^{1,1} \arrow[drr] & E_2^{2,1} \arrow[drr] & E_2^{3,1} \arrow[drr] & E_2^{4,1} & \cdots \\
\cdots \arrow[drr] & E_2^{0,0} \arrow[drr] & E_2^{1,0} \arrow[drr] & E_2^{2,0} \arrow[drr] & E_2^{3,0} \arrow[drr] & E_2^{4,0} & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Pagina 3 $\qquad (d_3^{p,q} : E_3^{p,q} \to E_3^{p+3,q-2})$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots \arrow[rrrdd] & \vdots \arrow[rrrdd] & \vdots \arrow[rrrdd] & \vdots \arrow[rrrdd] & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[rrrdd] & E_3^{0,3} \arrow[rrrdd] & E_3^{1,3} \arrow[rrrdd] & E_3^{2,3} \arrow[rrrdd] & E_3^{3,3} & E_3^{4,3} & \cdots \\
\cdots \arrow[rrrdd] & E_3^{0,2} \arrow[rrrdd] & E_3^{1,2} \arrow[rrrdd] & E_3^{2,2} \arrow[rrrdd] & E_3^{3,2} & E_3^{4,2} & \cdots \\
\cdots \arrow[rrrdd] & E_3^{0,1} \arrow[rrrdd] & E_3^{1,1} \arrow[rrrdd] & E_3^{2,1} \arrow[rrrdd] & E_3^{3,1} & E_3^{4,1} & \cdots \\
\cdots & E_3^{0,0} & E_3^{1,0} & E_3^{2,0} & E_3^{3,0} & E_3^{4,0} & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Diciamo che $\mathbb{E}$ è *eventualmente costante* se esiste r_0 tale che:

$$d_r^{p,q} = 0 \quad \forall\ r \geq r_0,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2.$$

Ciò è equivalente a dire che $E_r^{p,q} = E_{r_0}^{p,q}\ \forall\ r \geq r_0,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2$. In tal caso si dice che $\mathbb{E}$ *degenera* a pagina r_0, e si pone

$$E_\infty^{p,q} := E_{r_0}^{p,q}\ \forall\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2.$$

OSS.: Per ogni $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, consideriamo l'insieme

$$Q_r = \{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 : E_r^{p,q} \neq 0\},$$

e si noti che $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset Q_4 \supset \ldots$. Dunque se Q_1 è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$, allora $\mathbb{E}$ è eventualmente costante.

DEF.: Diremo che $\mathbb{E}$ è *limitata* se Q_1 è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$.

(Molte sequenze spettrali provenienti da situazioni "naturali" sono limitate).

Una sequenza spettrale $\mathbb{E}$ eventualmente costante *converge* ad una collezione di A-moduli $(E^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se: per ogni $n \in \mathbb{Z}$, esiste una filtrazione di A-sottomoduli di E^n:

$$\ldots \supset F^p E^n \supset F^{p+1} E^n \supset \ldots$$

tale che:

- $\bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F^p E^n = \{0\}$ e $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F^p E^n = E^n$;
- $E_\infty^{p,q} \cong F^p E^{p+q} / F^{p+1} E^{p+q} \ \forall \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

Solitamente, quello che succede è che per qualche motivo si conosce qualche pagina di $\mathbb{E}$ (solitamente la prima o la seconda). Quindi, se si sa che $(E_r^{p,q})_{(p,q)}$ è l'r-esima pagina di una sequenza spettrale convergente a $(E^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, si scrive:

$$E_r^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}.$$

OSS: Sia $\mathbb{E} = (E_r^{i,j})$ sequenza spettrale tale che $E_r^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$.

- Se A è un campo e $\mathbb{E}$ degenera a pagina r, allora:

$$E^n \cong \bigoplus_{p+q=n} E_r^{p,q}.$$

- $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ p+q=n \Rightarrow E^n = 0$.
- Se esiste p_0 tale che $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ p \neq p_0$, allora $\mathbb{E}$ degenera a pagina r e $E^n \cong E_r^{p_0, n-p_0}$.
- Se esiste q_0 tale che $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ q \neq q_0$ e $r \geq 2$, allora $\mathbb{E}$ degenera a pagina r e $E^n \cong E_r^{n-q_0, q_0}$.

Sia $C^\bullet$ un complesso di cocatene con differenziali $(d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ad ogni *filtrazione regolare* di $C^\bullet$ si può associare una sequenza spettrale convergente alla coomologia di $C^\bullet$:

DEF.: Una *filtrazione regolare* di $C^\bullet$ consiste in una filtrazione di A-sottomoduli di C^n (per ogni $n \in \mathbb{Z}$)

$$\ldots \supset F^p C^n \supset F^{p+1} C^n \supset \ldots$$

tale che:

- $\bigcap_{p\in\mathbb{Z}} F^p C^n = \{0\}$ e $\bigcup_{p\in\mathbb{Z}} F^p C^n = C^n$;
- $d^n(F^p C^n) \subset F^p C^{n+1}$.

TEOREMA: Ad ogni filtrazione regolare di $C^\bullet$ è associata una sequenza spettrale convergente ad $(E^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dove $E^n = H^n(C^\bullet)$. Inoltre $F^p E^n \cong H^n(F^p C^\bullet)$.

Dim.: Chi è interessato alla dimostrazione può leggerla alle pagine 203-206 del libro di Gelfand and Manin *Methods of homological algebra*.

Complessi doppi

Un **complesso doppio** di A-moduli $C^{\bullet,\bullet}$ consiste in:

- complessi di A-moduli $C^{\bullet,q}$ per ogni $q \in \mathbb{Z}$, con differenziali $(d_h^{n,q})_{n\in\mathbb{Z}}$;
- complessi di A-moduli $C^{p,\bullet}$ per ogni $p \in \mathbb{Z}$, con differenziali $(d_v^{p,n})_{n\in\mathbb{Z}}$,

tali che tutti i seguenti quadrati commutino:

$$\begin{tikzcd} C^{p,q+1} \arrow[r, "d_h^{p+1,q}"] & C^{p+1,q+1} \\ C^{p,q} \arrow[u, "d_v^{p,q}"] \arrow[r, "d_h^{p,q}"'] & C^{p+1,q} \arrow[u, "d_v^{p+1,q}"'] \end{tikzcd}$$

Il *complesso totale* di $C^{\bullet,\bullet}$ è il seguente complesso $\mathrm{Tot}(C)^\bullet$:

- $\mathrm{Tot}(C)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$;
- $d^n : \mathrm{Tot}(C)^n \to \mathrm{Tot}(C)^{n+1}$ manda $x \in C^{p,n-p}$ in $d_h^{p,n-p}x + (-1)^p d_v^{p,n-p}x$.

$C^{\bullet,\bullet}$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[r, "d_h^{0,3}"] \arrow[u] & C^{1,3} \arrow[r, "d_h^{1,3}"] \arrow[u] & C^{2,3} \arrow[r, "d_h^{2,3}"] \arrow[u] & C^{3,3} \arrow[r, "d_h^{3,3}"] \arrow[u] & C^{4,3} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[r, "d_h^{0,2}"] \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] & C^{1,2} \arrow[r, "d_h^{1,2}"] \arrow[u, "d_v^{1,2}"'] & C^{2,2} \arrow[r, "d_h^{2,2}"] \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] & C^{3,2} \arrow[r, "d_h^{3,2}"] \arrow[u, "d_v^{3,2}"'] & C^{4,2} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[r, "d_h^{0,1}"] \arrow[u, "d_v^{0,1}"'] & C^{1,1} \arrow[r, "d_h^{1,1}"] \arrow[u, "d_v^{1,1}"'] & C^{2,1} \arrow[r, "d_h^{2,1}"] \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] & C^{3,1} \arrow[r, "d_h^{3,1}"] \arrow[u, "d_v^{3,1}"'] & C^{4,1} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[r, "d_h^{0,0}"] \arrow[u, "d_v^{0,0}"'] & C^{1,0} \arrow[r, "d_h^{1,0}"] \arrow[u, "d_v^{1,0}"'] & C^{2,0} \arrow[r, "d_h^{2,0}"] \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] & C^{3,0} \arrow[r, "d_h^{3,0}"] \arrow[u, "d_v^{3,0}"'] & C^{4,0} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Tot}(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{0,3}"] & C^{1,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{1,3}"] & C^{2,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{2,3}"] & C^{3,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{3,3}"] & C^{4,3} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] \arrow[r, "d_h^{0,2}"] & C^{1,2} \arrow[u, "-d_v^{1,2}"'] \arrow[r, "d_h^{1,2}"] & C^{2,2} \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] \arrow[r, "d_h^{2,2}"] & C^{3,2} \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] \arrow[r, "d_h^{3,2}"] & C^{4,2} \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[u, "d_v^{0,1}"'] \arrow[r, "d_h^{0,1}"] & C^{1,1} \arrow[u, "-d_v^{1,1}"'] \arrow[r, "d_h^{1,1}"] & C^{2,1} \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] \arrow[r, "d_h^{2,1}"] & C^{3,1} \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] \arrow[r, "d_h^{3,1}"] & C^{4,1} \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[u, "d_v^{0,0}"'] \arrow[r, "d_h^{0,0}"] & C^{1,0} \arrow[u, "-d_v^{1,0}"'] \arrow[r, "d_h^{1,0}"] & C^{2,0} \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] \arrow[r, "d_h^{2,0}"] & C^{3,0} \arrow[u, "-d_v^{3,0}"'] \arrow[r, "d_h^{3,0}"] & C^{4,0} \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Dalla definizione abbiamo immediatamente *due* filtrazioni regolari di $\mathrm{Tot}(C)^\bullet$:

(i) $'F^p\,\mathrm{Tot}(C)^\bullet$ con $'F^p\,\mathrm{Tot}(C)^n = \bigoplus_{i\geq p} C^{i,n-i}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $''F^q\,\mathrm{Tot}(C)^\bullet$ con $''F^q\,\mathrm{Tot}(C)^n = \bigoplus_{j\geq q} C^{n-j,j}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Come visto, dunque queste filtrazioni danno luogo a due sequenze spettrali, rispettivamente $('E_r^{p,q})$ e $(''E_r^{p,q})$, *entrambe convergenti alla coomologia di* $\mathrm{Tot}(C)^\bullet$.

Il nostro scopo ora è quello di descrivere le *seconde* pagine di tali sequenze spettrali in termini di $C^{\bullet,\bullet}$, ma prima diamo un'occhiata alle filtrazioni descritte sopra...

${}'F^0\, Tot(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{0,3}"] & C^{1,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{1,3}"] & C^{2,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{2,3}"] & C^{3,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{3,3}"] & C^{4,3} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] \arrow[r, "d_h^{0,2}"] & C^{1,2} \arrow[u, "-d_v^{1,2}"'] \arrow[r, "d_h^{1,2}"] & C^{2,2} \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] \arrow[r, "d_h^{2,2}"] & C^{3,2} \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] \arrow[r, "d_h^{3,2}"] & C^{4,2} \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[u, "d_v^{0,1}"'] \arrow[r, "d_h^{0,1}"] & C^{1,1} \arrow[u, "-d_v^{1,1}"'] \arrow[r, "d_h^{1,1}"] & C^{2,1} \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] \arrow[r, "d_h^{2,1}"] & C^{3,1} \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] \arrow[r, "d_h^{3,1}"] & C^{4,1} \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[u, "d_v^{0,0}"'] \arrow[r, "d_h^{0,0}"] & C^{1,0} \arrow[u, "-d_v^{1,0}"'] \arrow[r, "d_h^{1,0}"] & C^{2,0} \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] \arrow[r, "d_h^{2,0}"] & C^{3,0} \arrow[u, "-d_v^{3,0}"'] \arrow[r, "d_h^{3,0}"] & C^{4,0} \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

${}'F^1 \operatorname{Tot}(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{1,3}"] & C^{2,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{2,3}"] & C^{3,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{3,3}"] & C^{4,3} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,2} \arrow[u, "-d_v^{1,2}"'] \arrow[r, "d_h^{1,2}"] & C^{2,2} \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] \arrow[r, "d_h^{2,2}"] & C^{3,2} \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] \arrow[r, "d_h^{3,2}"] & C^{4,2} \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,1} \arrow[u, "-d_v^{1,1}"'] \arrow[r, "d_h^{1,1}"] & C^{2,1} \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] \arrow[r, "d_h^{2,1}"] & C^{3,1} \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] \arrow[r, "d_h^{3,1}"] & C^{4,1} \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,0} \arrow[u, "-d_v^{1,0}"'] \arrow[r, "d_h^{1,0}"] & C^{2,0} \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] \arrow[r, "d_h^{2,0}"] & C^{3,0} \arrow[u, "-d_v^{3,0}"'] \arrow[r, "d_h^{3,0}"] & C^{4,0} \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

${}'F^2 \operatorname{Tot}(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,3} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,3} \arrow[r, "d_h^{2,3}"] \arrow[u] & C^{3,3} \arrow[r, "d_h^{3,3}"] \arrow[u] & C^{4,3} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,2} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,2} \arrow[r, "d_h^{2,2}"] \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] & C^{3,2} \arrow[r, "d_h^{3,2}"] \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] & C^{4,2} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,1} \arrow[r, "d_h^{2,1}"] \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] & C^{3,1} \arrow[r, "d_h^{3,1}"] \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] & C^{4,1} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,0} \arrow[r, "d_h^{2,0}"] \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] & C^{3,0} \arrow[r, "d_h^{3,0}"] \arrow[u, "-d_v^{3,0}"'] & C^{4,0} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

${}'F^3\,\mathrm{Tot}(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,3} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,3} \arrow[r] \arrow[u] & \color{red}{C^{3,3}} \arrow[r, "d_h^{3,3}"] \arrow[u] & \color{blue}{C^{4,3}} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,2} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,2} \arrow[r] \arrow[u] & \color{blue}{C^{3,2}} \arrow[r, "d_h^{3,2}"] \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] & \color{red}{C^{4,2}} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,1} \arrow[r] \arrow[u] & \color{red}{C^{3,1}} \arrow[r, "d_h^{3,1}"] \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] & \color{blue}{C^{4,1}} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,0} \arrow[r] \arrow[u] & \color{blue}{C^{3,0}} \arrow[r, "d_h^{3,0}"] \arrow[u, "-d_v^{3,0}"'] & \color{red}{C^{4,0}} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

$''F^0\,Tot(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[r, "d_h^{0,3}"] \arrow[u] & C^{1,3} \arrow[r, "d_h^{1,3}"] \arrow[u] & C^{2,3} \arrow[r, "d_h^{2,3}"] \arrow[u] & C^{3,3} \arrow[r, "d_h^{3,3}"] \arrow[u] & C^{4,3} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[r, "d_h^{0,2}"] \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] & C^{1,2} \arrow[r, "d_h^{1,2}"] \arrow[u, "-d_v^{1,2}"'] & C^{2,2} \arrow[r, "d_h^{2,2}"] \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] & C^{3,2} \arrow[r, "d_h^{3,2}"] \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] & C^{4,2} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[r, "d_h^{0,1}"] \arrow[u, "d_v^{0,1}"'] & C^{1,1} \arrow[r, "d_h^{1,1}"] \arrow[u, "-d_v^{1,1}"'] & C^{2,1} \arrow[r, "d_h^{2,1}"] \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] & C^{3,1} \arrow[r, "d_h^{3,1}"] \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] & C^{4,1} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[r, "d_h^{0,0}"] \arrow[u, "d_v^{0,0}"'] & C^{1,0} \arrow[r, "d_h^{1,0}"] \arrow[u, "-d_v^{1,0}"'] & C^{2,0} \arrow[r, "d_h^{2,0}"] \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] & C^{3,0} \arrow[r, "d_h^{3,0}"] \arrow[u, "-d_v^{3,0}"'] & C^{4,0} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,0}"'] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

$''F^1\, Tot(C)^{\bullet}$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[r, "d_h^{0,3}"] \arrow[u] & C^{1,3} \arrow[r, "d_h^{1,3}"] \arrow[u] & C^{2,3} \arrow[r, "d_h^{2,3}"] \arrow[u] & C^{3,3} \arrow[r, "d_h^{3,3}"] \arrow[u] & C^{4,3} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[r, "d_h^{0,2}"] \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] & C^{1,2} \arrow[r, "d_h^{1,2}"] \arrow[u, "-d_v^{1,2}"'] & C^{2,2} \arrow[r, "d_h^{2,2}"] \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] & C^{3,2} \arrow[r, "d_h^{3,2}"] \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] & C^{4,2} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[r, "d_h^{0,1}"] \arrow[u, "d_v^{0,1}"'] & C^{1,1} \arrow[r, "d_h^{1,1}"] \arrow[u, "-d_v^{1,1}"'] & C^{2,1} \arrow[r, "d_h^{2,1}"] \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] & C^{3,1} \arrow[r, "d_h^{3,1}"] \arrow[u, "-d_v^{3,1}"'] & C^{4,1} \arrow[r] \arrow[u, "d_v^{4,1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{2,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{3,0} \arrow[r] \arrow[u] & C^{4,0} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

$''F^2\, Tot(C)^\bullet$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{0,3}"] & C^{1,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{1,3}"] & C^{2,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{2,3}"] & C^{3,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{3,3}"] & C^{4,3} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] \arrow[r, "d_h^{0,2}"] & C^{1,2} \arrow[u, "-d_v^{1,2}"'] \arrow[r, "d_h^{1,2}"] & C^{2,2} \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] \arrow[r, "d_h^{2,2}"] & C^{3,2} \arrow[u, "-d_v^{3,2}"'] \arrow[r, "d_h^{3,2}"] & C^{4,2} \arrow[u, "d_v^{4,2}"'] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{2,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{3,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{4,1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{2,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{3,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{4,0} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

In un complesso doppio $C^{\bullet,\bullet}$ possiamo vedere le mappe orizzontali come morfismi di complessi:

$$\ldots \to C^{p-1,\bullet} \xrightarrow{d_h^{p-1,\bullet}} C^{p,\bullet} \xrightarrow{d_h^{p,\bullet}} C^{p+1,\bullet} \to \ldots$$

e quelle verticali come morfismi di complessi:

$$\ldots \to C^{\bullet,q-1} \xrightarrow{d_v^{\bullet,q-1}} C^{\bullet,q} \xrightarrow{d_v^{\bullet,q}} C^{\bullet,q+1} \to \ldots$$

Dunque abbiamo mappe indotte sulle coomologie .....

$C^{\bullet,\bullet}$

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{0,3}"] & C^{1,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{1,3}"] & C^{2,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{2,3}"] & C^{3,3} \arrow[u] \arrow[r, "d_h^{3,3}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,2} \arrow[u, "d_v^{0,2}"] \arrow[r, "d_h^{0,2}"] & C^{1,2} \arrow[u, "d_v^{1,2}"] \arrow[r, "d_h^{1,2}"] & C^{2,2} \arrow[u, "d_v^{2,2}"] \arrow[r, "d_h^{2,2}"] & C^{3,2} \arrow[u, "d_v^{3,2}"] \arrow[r, "d_h^{3,2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,1} \arrow[u, "d_v^{0,1}"] \arrow[r, "d_h^{0,1}"] & C^{1,1} \arrow[u, "d_v^{1,1}"] \arrow[r, "d_h^{1,1}"] & C^{2,1} \arrow[u, "d_v^{2,1}"] \arrow[r, "d_h^{2,1}"] & C^{3,1} \arrow[u, "d_v^{3,1}"] \arrow[r, "d_h^{3,1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{0,0} \arrow[u, "d_v^{0,0}"] \arrow[r, "d_h^{0,0}"] & C^{1,0} \arrow[u, "d_v^{1,0}"] \arrow[r, "d_h^{1,0}"] & C^{2,0} \arrow[u, "d_v^{2,0}"] \arrow[r, "d_h^{2,0}"] & C^{3,0} \arrow[u, "d_v^{3,0}"] \arrow[r, "d_h^{3,0}"] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Coomologia verticale

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & ⋰ \\
\cdots & \longrightarrow & H^3_v(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,3}} & H^3_v(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,3}} & H^3_v(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,3}} & H^3_v(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^2_v(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,2}} & H^2_v(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,2}} & H^2_v(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,2}} & H^2_v(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^1_v(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,1}} & H^1_v(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,1}} & H^1_v(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,1}} & H^1_v(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \cdots \\
\cdots & \longrightarrow & H^0_v(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,0}} & H^0_v(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,0}} & H^0_v(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,0}} & H^0_v(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \cdots \\
⋰ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Coomologia orizzontale della coomologia verticale

$$
\begin{array}{cccccc}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots & H_h^0 H_v^3(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^1 H_v^3(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^2 H_v^3(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^3 H_v^3(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\cdots & H_h^0 H_v^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^1 H_v^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^2 H_v^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^3 H_v^2(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\cdots & H_h^0 H_v^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^1 H_v^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^2 H_v^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^3 H_v^1(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\cdots & H_v^0 H_h^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^1 H_v^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^2 H_v^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_h^3 H_v^0(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Coomologia orizzontale

$$
\begin{tikzcd}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots & H_h^0(C^{\bullet,3}) \arrow[u] & H_h^1(C^{\bullet,3}) \arrow[u] & H_h^2(C^{\bullet,3}) \arrow[u] & H_h^3(C^{\bullet,3}) \arrow[u] & \cdots \\
\cdots & H_h^0(C^{\bullet,2}) \arrow[u, "d_v^{0,2}"'] & H_h^1(C^{\bullet,2}) \arrow[u, "d_v^{1,2}"'] & H_h^2(C^{\bullet,2}) \arrow[u, "d_v^{2,2}"'] & H_h^3(C^{\bullet,2}) \arrow[u, "d_v^{3,2}"'] & \cdots \\
\cdots & H_h^0(C^{\bullet,1}) \arrow[u, "d_v^{0,1}"'] & H_h^1(C^{\bullet,1}) \arrow[u, "d_v^{1,1}"'] & H_h^2(C^{\bullet,1}) \arrow[u, "d_v^{2,1}"'] & H_h^3(C^{\bullet,1}) \arrow[u, "d_v^{3,1}"'] & \cdots \\
\cdots & H_h^0(C^{\bullet,0}) \arrow[u, "d_v^{0,0}"'] & H_h^1(C^{\bullet,0}) \arrow[u, "d_v^{1,0}"'] & H_h^2(C^{\bullet,0}) \arrow[u, "d_v^{2,0}"'] & H_h^3(C^{\bullet,0}) \arrow[u, "d_v^{3,0}"'] & \cdots \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Coomologia verticale della coomologia orizzontale

$$
\begin{array}{cccccc}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\cdots & H_v^3 H_h^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^3 H_h^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^3 H_h^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^3 H_h^3(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\cdots & H_v^2 H_h^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^2 H_h^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^2 H_h^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^2 H_h^3(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\cdots & H_v^1 H_h^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^1 H_h^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^1 H_h^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^1 H_h^3(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\cdots & H_v^0 H_h^0(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^0 H_h^1(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^0 H_h^2(C^{\bullet,\bullet}) & H_v^0 H_h^3(C^{\bullet,\bullet}) & \cdots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

TEOREMA: Col le notazioni, introdotte si ha:

$$'E_2^{p,q} = H_h^p H_v^q(C^{\bullet,\bullet}) \quad \text{e} \quad ''E_2^{p,q} = H_v^p H_h^q(C^{\bullet,\bullet}).$$

In particolare, $H_h^p H_v^q(C^{\bullet,\bullet}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}(C)^\bullet) \Leftarrow H_v^p H_h^q(C^{\bullet,\bullet})$.

Dim.: Chi è interessato alla dimostrazione può leggerla a pagina 209 di Gelfand-Manin, Proposizione 10.

Siano M ed N due A-moduli, e $P_\bullet \to M \to 0$ e $Q_\bullet \to N \to 0$ rispettive risoluzioni proiettive. Per essere coerenti con la notazione coomologica finora adottata, poniamo $P^i := P_{-i}$ e $Q^i := Q_{-i}$ per ogni $i \in \mathbb{Z}$. In questo modo, ad esempio, la risoluzione proiettiva di M è:

$$\ldots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0.$$

Si consideri il complesso doppio $T^{\bullet,\bullet}$ tale che, per ogni $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$:

- $T^{i,j} = P^i \otimes_A Q^j$;
- $T^{\bullet,j} = P^\bullet \otimes_A Q^j$ e $T^{i,\bullet} = P^i \otimes_A Q^\bullet$.

$T^{\bullet,\bullet}$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & P^0 \otimes_A Q^0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^0 \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^0 \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & P^0 \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Coomologia verticale

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A N \arrow[r] & P^{-2} \otimes_A N \arrow[r] & P^{-1} \otimes_A N \arrow[r] & P^{0} \otimes_A N \arrow[r] & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

Coomologia orizzontale della coomologia verticale

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & (L_3(-\otimes_A N))(M) & (L_2(-\otimes_A N))(M) & (L_1(-\otimes_A N))(M) & (L_0(-\otimes_A N))(M) \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

$T^{\bullet,\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{0} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{0} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{0} \arrow[r] \arrow[u] & P^{0} \otimes_A Q^{0} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{0} \otimes_A Q^{-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{0} \otimes_A Q^{-2} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P^{-3} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-2} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & P^{0} \otimes_A Q^{-3} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
\iddots & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Coomologia orizzontale

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^0 \arrow[u] & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^{-1} \arrow[u] & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^{-2} \arrow[u] & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^{-3} \arrow[u] & 0 \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Coomologia verticale della coomologia orizzontale

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & (L_0(M \otimes_A -))(N) & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & (L_1(M \otimes_A -))(N) & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & (L_2(M \otimes_A -))(N) & 0 \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & (L_3(M \otimes_A -))(N) & 0 \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Essendo ogni modulo proiettivo piatto, infatti si ha $\forall\ (i,j) \in \mathbb{Z}^2$:

$$H^k(T^{i,\bullet}) = \begin{cases} P^i \otimes_A N & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{(coomologia verticale)}$$

$$H^k(T^{\bullet,j}) = \begin{cases} M \otimes_A Q^j & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{(coomologia orizzontale)}$$

Quindi la coomologia orizzontale della coomologia verticale:

$$'E_2^{i,j} = H_h^i H_v^j(T^{\bullet,\bullet}) = \begin{cases} (L_{-i}(- \otimes_A N))(M) & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la coomologia verticale della coomologia orizzontale sarà:

$$''E_2^{i,j} = H_v^i H_h^j(T^{\bullet,\bullet}) = \begin{cases} (L_{-i}(M \otimes_A -))(N) & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora ${}'E_2^{i,j} = {}'E_\infty^{i,j}$, e ${}''E_2^{i,j} = {}''E_\infty^{i,j}$. Ma poiché le due sequenze spettrali convergono alla stessa cosa, cioè a $H^{i+j}(\mathrm{Tot}(T)^\bullet)$, devono essere uguali:

$$(L_i(-\otimes_A N))(M) \cong (L_i(M \otimes_A -))(N) \cong H^{-i}(\mathrm{Tot}(T)^\bullet) =: \mathrm{Tor}_i^A(M,N).$$

ESERCIZIO: 1. Verificare che $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \cong \mathrm{Tor}_i^A(N,M)$.

2. Usare lo stesso metodo per dimostrare che

$$(R^i(\mathrm{Hom}_A(M,-)))(N) \cong (R^i(\mathrm{Hom}_A(-,N)))(M) =: \mathrm{Ext}_A^i(M,N).$$

Fine dell'algebra omologica!

Due anelli da tenere a mente

Un esempio di anello che bisognerà tenere a mente d'ora in poi è l'*anello di polinomi*

$$S = K[x_1, \ldots, x_n],$$

dove K è un campo. Grazie al teorema della base di Hilbert (1890), sappiamo che S è Noetheriano, cioè che ogni suo ideale è finitamente generato.

In contrasto a quanto succede quando $n = 1$, in cui $S = K[x]$ è un PID e ogni ideale è generato da un unico elemento, in più variabili non c'è limite al numero di generatori di un ideale:

ESERCIZIO: In $S = K[x, y]$, per ogni $d \in \mathbb{N}$ si consideri l'ideale:

$$I = (x^d, x^{d-1}y, x^{d-2}y^2, \ldots, y^d).$$

Si provi che I non può essere generato da meno di $d + 1$ elementi.

LEMMA (Artin-Tate) Sia $K \subseteq L$ un'estensione di campi tale che L è una K-algebra finitamente generata. Allora $[L : K] < +\infty$.

Per provare questo lemma bisogna dimostrare due cose:

1. Sia K un campo. Allora $K(x)$ non è una K-algebra finitamente generata.
2. Sia $A \subseteq B \subseteq C$ una catena di anelli (ognuno è un sottoanello del successivo) tale che A è Noetheriano, C è finitamente generato sia come B-modulo che come A-algebra. Allora B è una A-algebra finitamente generata.

TEOREMA: Ogni ideale massimale di $S = K[x_1, \dots, x_n]$ è generato da n elementi.

Dimostrazione: Se $n = 1$ il risultato già lo conosciamo, quindi procediamo per induzione su n. Sia $\mathfrak{m} \subset S$ un ideale massimale. Sappiamo che $S/\mathfrak{m}$ è un campo contenente K. Essendo $S/\mathfrak{m}$ una K-algebra finitamente generata, l'estensione di campi $K \subseteq S/\mathfrak{m}$ ha grado finito grazie al lemma di Artin-Tate. Sia $f \in K[t]$ il polinomio minimo dell'immagine di x_n in $S/\mathfrak{m}$ e $L = K[t]/(f)$, cosicché $S/(f(x_n)) \cong L[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Siccome $f(x_n) \in \mathfrak{m}$, dunque

$$S/\mathfrak{m} \cong L[x_1, \dots, x_{n-1}]/\mathfrak{n}.$$

per qualche ideale massimale $\mathfrak{n}$ di $L[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Per induzione $\mathfrak{n} = (f_1, \dots, f_{n-1})$ dove $f_i \in L[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Poiché $L \cong K[x_n]/(f(x_n))$, possiamo anche vedere gli f_i come polinomi in S, dunque $\mathfrak{m} = (f_1, \dots, f_{n-1}, f(x_n))$. $\square$

Un altro esempio di anello da tenere a mente è l'*anello delle serie formali*

$$R = K[[x_1, \ldots, x_n]],$$

dove K è un campo. Gli elementi di R sono del tipo

$$\sum_{i=0}^{+\infty} F_i$$

dove gli F_i sono polinomi omogenei di grado i in $K[x_1, \ldots, x_n]$. Come l'anello di polinomi, anche R è Noetheriano, e come osserveremo più avanti i due anelli hanno molto altro in comune. Però R è locale, cioè possiede un unico ideale massimale.

ESERCIZIO: Dimostrare che l'unico ideale massimale di R è:

$$(x_1, \ldots, x_n).$$

Hint: dimostrare che $\sum_{i=0}^{+\infty} F_i$ è invertibile se e solo se $F_0 \neq 0$.

Teoria della dimensione (richiamo)

DEF.: La dimensione (di Krull) di un anello A è:

$$\dim(A) = \sup\{r \in \mathbb{N} : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r \text{ dove } \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

ESEMPI:

- La dimensione di un campo è 0.
- La dimensione di $\mathbb{Z}$ è 1.
- Più in generale, la dimensione di un PID è 1.

DEF.: La dimensione (di Krull) di un A-modulo M è definita come:

$$\dim_A(M) = \dim(A/(0 :_A M)).$$

ESEMPIO: Essendo $\mathbb{Q}$ un campo, $\dim(\mathbb{Q}) = 0$. Come $\mathbb{Z}$-modulo, però, $\dim_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = \dim(\mathbb{Z}/(0 :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) = \dim(\mathbb{Z}) = 1$.

DEF.: L' altezza di un primo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ è:

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \sup\{r \in \mathbb{N} : \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p} \text{ dove } \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)\}.$$

L'altezza di un ideale qualsiasi $I \subseteq A$ è definita come:

$$\mathrm{ht}(I) = \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A),\ \mathfrak{p} \supseteq I\}.$$

OSSERVAZIONI: Per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$:

(i) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$;

(ii) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) \leq \dim(A)$.

(iii) $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0 \iff \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$.

(iv) $\dim(A) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m}$ è un ideale massimale di $A\}$.

La diseguaglianza (ii) precedente può essere stretta:

ESEMPIO: Se $A = \dfrac{K[x,y,z]}{((x)\cap(y,z))}$, allora $\mathrm{Min}(A) = \{\overline{(x)}, \overline{(y,z)}\}$, e

$$\overline{(x)} \subsetneq \overline{(x,y)} \subsetneq \overline{(x,y,z)}$$

è una catena di primi di lunghezza 2. Dunque $\dim(A) \geq 2$.

Considerando $\mathfrak{p} = \overline{(y,z)}$, abbiamo $A/\mathfrak{p} \cong K[x,y,z]/(y,z) \cong K[x]$.

Ma sappiamo che $K[x]$ è un PID, quindi $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$.

D'altra parte $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$ perché $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$, quindi

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = 1 < 2 \leq \dim(A).$$

L'Hauptidealsatz di Krull

Possiamo dire che l'altezza di un ideale in un anello Noetheriano è finita? Si, grazie all'Hauptidealsatz di Krull, che è il teorema principale della teoria della dimensione:

TEOREMA (Krull): Sia $I = (a_1, \ldots, a_c)$ un ideale di un anello Noetheriano A, e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$. Allora $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq c$.

Come avete visto, il teorema precedente segue abbastanza facilmente dall'Hauptidealsatz, che significa "Teorema dell'ideale principale", e al quale spesso ci riferiremo intendendo il teorema precedente.

HAUPTIDEALSATZ (Krull): Sia a un elemento di un anello Noetheriano A, e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}((a))$. Allora $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$.

A meno di eventuali specifiche, per un po' considereremo solo anelli (commutativi e unitari) Noetheriani.

OSS.: Denotando con $\mu(M)$ il minimo numero di generatori di un A-modulo M finitamente generato, l'Hauptidealsatz implica che $\mathrm{ht}(I) \le \mu(I)$.

La precedente diseguaglianza può essere stretta. Più avanti, vedremo che gli ideali per cui vale l'uguale hanno proprietà particolarmente buone.

ESEMPIO: Consideriamo $I = (x^2, xy, y^2) \subseteq K[[x,y]] = A$.

Poiché $\sqrt{I} = (x,y) = \mathfrak{m}$ (l'unico ideale massimale di A), abbiamo $\mathrm{Min}(I) = \{\mathfrak{m}\}$ da cui $\mathrm{ht}(I) = 2$.

Vogliamo provare che $\mu(I) = 3$. Questo segue dal lemma di Nakayama, che implica che $\mu(I) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(I/\mathfrak{m}I)$, poiché $I/\mathfrak{m}I = \{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 xy + \lambda_3 y^2 : \lambda_i \in K = A/\mathfrak{m}\}$ è un K-spazio vettoriale di dimensione 3.

Sistemi di parametri

TEOREMA: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano di dimensione di Krull d. Dati m elementi $a_1, \dots, a_m \in \mathfrak{m}$, si ha

$$\dim A/(a_1, \dots, a_m) \geq d - m.$$

Inoltre, esistono d elementi $x_1, \dots, x_d \in \mathfrak{m}$ tali che:

$$\dim A/(x_1, \dots, x_d) = 0 \quad (\Leftrightarrow \ \mathfrak{m} = \sqrt{(x_1, \dots, x_d)}).$$

DEF.: Elementi $x_1, \dots, x_d$ come quelli del teorema precedente vengono chiamati sistema di parametri per A.

ESERCIZIO: Dimostrare che, se $x_1, \dots, x_d$ è un sistema di parametri per A, allora

$$\dim A/(x_1, \dots, x_i) = d - i \quad \forall \ i = 1, \dots, d$$

La dimensione di Krull è intuitiva

Ora cerchiamo di giustificare (senza dimostrazioni complete) che la nozione di dimensione di Krull coincide con il concetto intuitivo di dimensione nel contesto geometrico.

TEOREMA: L'anello dei polinomi $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ in n variabili su un campo K ha dimensione di Krull n.

Dimostrazione: Osserviamo che $\dim(S) \geq n$, poiché c'è la catena di primi:

$$(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, \ldots, x_n).$$

D'altra parte $\dim(S) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m} \text{ ideale massimale di } S\}$. Abbiamo già visto che un ideale massimale di S è generato da n elementi, dunque $\dim(S) \leq n$ grazie all' Hauptidealsatz. $\square$

Sia $X = \mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una varietà algebrica irriducibile, dove $K = \overline{K}$ e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $S = K[x_1, \ldots, x_n]$.

Abbiamo già detto cosa significa che una funzione $\phi : X \to K$ è regolare nel punto $P \in X$ e definito l'anello $\mathcal{O}_{X,P}$ delle funzioni regolari in P. La funzione ϕ si dice regolare su X se è regolare in P per ogni $P \in X$. Anche l'insieme $\mathcal{O}(X)$ delle funzioni regolari su X possiede una struttura di anello, e si chiama l'anello delle funzioni regolari su X.

Una funzione razionale su X è una funzione $\phi : U \to K$, dove $\emptyset \neq U \subseteq X$ è aperto (nella topologia di Zariski), che sia regolare in tutti i punti di U. Due funzioni razionali $\phi : U \to K$ e $\psi : V \to K$ sono equivalenti se coincidono su $U \cap V$. Anche l'insieme $K(X)$ delle classi d'equivalenza delle funzioni razionali su X è un anello. Verificate per ESERCIZIO che $K(X)$ è un campo, che verrà dunque chiamato campo delle funzioni razionali su X.

TEOREMA: $\mathcal{O}(X) \cong A := S/\mathfrak{p}$, $K(X) \cong \mathrm{Frac}(A)$ e $O_{X,P} \cong A_{\mathfrak{m}_P}$, dove $P = (P_1, \dots, P_n) \in X$ e $\mathfrak{m}_P = (\overline{x_1} - P_1, \dots, \overline{x_n} - P_n) \subseteq A$.

In particolare $\phi : X \to K$ è regolare se e solo se esiste $f_\phi \in S$ tale che $\phi(x) = f_\phi(x)$ per ogni $x \in X$. Inoltre $\phi = \phi' \Leftrightarrow \overline{f_\phi} = \overline{f_{\phi'}}$ in A.

Il modo classico per calcolare la dimensione di X è contare i parametri liberi di una funzione razionale su X. Più precisamente,

$$\dim(X) := \mathrm{Trdeg}(K(X) : K).$$

TEOREMA: $\dim(X) = \dim(A)$.

Senza entrare nei dettagli, il motivo è che, se $y_1, \dots, y_d$ sono algebricamente indipendenti su K, allora la K-algebra $K[y_1, \dots, y_d]$ è un anello di polinomi in d variabili su K, dunque ha dimensione di Krull d.

Dato un ideale $I \subseteq S$, si ha che

$$\dim(S/I) + \mathrm{ht}(I) = \dim(S) = n.$$

Dunque la dimensione di $\mathcal{Z}(I)$ è $\dim(S/I)$, e la sua codimensione è $\mathrm{ht}(I)$.

ESERCIZIO: Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ una varietà algebrica di codimensione c. Dopo aver verificato che ogni varietà algebrica è l'intersezione di tante ipersuperfici algebriche (chiusi della forma $\mathcal{Z}(f)$ per $f \in S$) dimostrare che per ottenere X bisogna intersecarne almeno c.

Se $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ è una varietà algebrica di codimensione c, non è detto che X sia l'intersezione di esattamente c ipersuperfici algebriche; potrebbero servirne di più (più avanti nel corso vedremo un esempio).

Funzioni di Hilbert (richiamo)

DEF.: Un anello A è graduato se:

- $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ (come gruppo abeliano);
- $A_h A_k \subseteq A_{h+k} \quad \forall\ h, k \in \mathbb{Z}$.

In tal caso, un A-modulo M si dice graduato se:

- $M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k$ (come gruppo abeliano);
- $A_h M_k \subseteq M_{h+k} \quad \forall\ h, k \in\in \mathbb{Z}$.

Un sottomodulo $N \subseteq M$ è un sottomodulo graduato se

$$N = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k \cap N.$$

In tal caso, N è un A-modulo graduato con $N_k = M_k \cap N$. Se $I \subseteq A$ è un sottomodulo graduato, I si dice ideale omogeneo.

Se $A_d = 0 \ \ \forall\ d < 0$, A si dice $\mathbb{N}$-graduato. Infine, A è una A_0-algebra graduata standard se $A = A_0[A_1]$.

OSS.: 1. Dalla definizione segue che A_0 è un sottoanello di A, e gli M_k (in particolare gli A_k) non sono solo gruppi abeliani, bensì A_0-moduli.

2. $A_0[A_1]$ è Noetheriano se e solo se A_0 è Noetheriano e A_1 è un A_0-modulo finitamente generato.

3. L'anello di polinomi $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ in n variabili su un campo K è una K-algebra graduata standard, essendo S_d il K-spazio vettoriale dei polinomi in S di grado d.

PROP.: Dato un campo K, un anello Noetheriano A è una K-algebra graduata standard se e solo se $A \cong S/I$ dove S è l'anello di polinomi in $\dim_K A_1$ variabili su K e I è un ideale omogeneo.

Dimostrazione: Sia $n = \dim_K A_1$, e $a_1, \ldots, a_n$ una base. Allora c'è una surgezione di K-algebre $S = K[x_1, \ldots, x_n] \xrightarrow{\pi} A$ che estende nell'unico modo possibile $x_i \mapsto a_i$ (notare che A è graduato standard $\Leftrightarrow$ π è surgettiva). Allora $A \cong S/\mathrm{Ker}(\pi)$, e $\mathrm{Ker}(\pi)$ è omogeneo poiché $\pi(S_d) \subseteq A_d$. $\square$

Per un po' di slides, A sarà una K-algebra Noetheriana graduata standard (K campo), e M un A-modulo finitamente generato e graduato.

ESERCIZIO: Poiché M è finitamente generato si ha:

- $M_{-k} = 0 \ \forall \ k \gg 0$;
- $\dim_K M_k < +\infty \ \forall k \in \mathbb{Z}$.

DEF.: La funzione di Hilbert di M è la funzione numerica:

$$\begin{aligned} \mathrm{HF}_M : \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\mapsto \dim_K M_k \end{aligned}$$

La serie di Hilbert di M è la serie formale:

$$\mathrm{HS}_M(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{HF}_M(k) t^k \in \mathbb{Z}[[t]].$$

TEOREMA (Hilbert): Se la dimensione di Krull di M è d, esiste un polinomio (polinomio di Hilbert) $\mathrm{HP}_M \in \mathbb{Q}[z]$ di grado $d-1$ t.c.:

$$\mathrm{HP}_M(k) = \mathrm{HF}_M(k) \ \forall \ k \gg 0.$$

ESERCIZIO: Se $S = K[x_1, \dots, x_n]$ provare che, per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{HF}_S(k) = \binom{n+k-1}{k}$$

In questo caso, quindi,

$$\mathrm{HP}_S(z) = \frac{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)}{(n-1)!}$$

e $\mathrm{HF}_S(k) = \mathrm{HP}_S(k) \ \forall \ k > -n$.

L'esistenza del polinomio di Hilbert (che può essere provata in maniera diretta) sarà una conseguenza dei risultati che otterremo nella seconda parte del corso, momento in cui osserveremo che il più grande k_0 per cui $\mathrm{HF}_M(k_0) \neq \mathrm{HP}_M(k_0)$ è collegato ad un invariante importante del modulo, la sua regolarità di Castelnuovo-Mumford.

OSS.: In $\mathbb{Z}[[t]]$, $(1-t)^d$ è invertibile per ogni $d \in \mathbb{N}$, infatti:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k \in \mathbb{N}} t^k.$$

È relativamente semplice vedere che il teorema precedente di Hilbert è equivalente al seguente:

TEOREMA: Se la dimensione di Krull di M è d, esiste un polinomio $h_M \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ con $h_M(1) \neq 0$, chiamato l'h-polinomio di M, tale che:

$$\mathrm{HS}(t) = \frac{h_M(t)}{(1-t)^d}.$$

ESERCIZIO: Se $h_M(t) = \sum_i h_i t^i$, provare che $\min\{i : h_i \neq 0\}$ è il più piccolo numero tale che $M_i \neq 0$. In particolare, $h_A \in \mathbb{Z}[t]$.

DEF.: Se $d = \dim M$, la molteplicità di M è definita come:

$$e(M) = \begin{cases} (\text{leading coefficient di } \mathrm{HP}_M) \cdot (d-1)! & \text{se } d > 0 \\ \dim_K M & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROP.: $e(M) = h_M(1)$.

Osserviamo che, se $M \neq \{0\}$, $e(M) > 0$. La molteplicità ha un significato geometrico preciso: se $S = K[x_1, \dots, x_n]$ e $I \subseteq S$ è un ideale omogeneo, è ben definita:

$$\mathcal{Z}_+(I) = \{P \in \mathbb{P}_K^{n-1} : f(P) = 0 \ \forall \ f \in I\} \subseteq \mathbb{P}_K^{n-1}.$$

I sottoinsiemi di $\mathbb{P}_K^{n-1}$ della forma $\mathcal{Z}_+(I)$ sono i chiusi per la topologia di Zariski di $\mathbb{P}_K^{n-1}$, noti come varietà algebriche proiettive.

L'analogo del Nullstellensatz vale anche nella situazione proiettiva, fornendo una bigezione fra chiusi di $\mathbb{P}_K^{n-1}$ e ideali radicali omogenei propri di $S = K[x_1, \ldots, x_n]$, se $K = \overline{K}$. Notiamo che questa volta

$$\varnothing = \mathcal{Z}_+((x_1, \ldots, x_n)),$$

motivo per cui $\bigoplus_{k>0} A_k$ viene chiamato l'ideale irrilevante di A.

TEOREMA: Se $K = \overline{K}$ e $I \subseteq S$ è un ideale omogeneo radicale con $\dim(S/I) = 1$, allora $\mathcal{Z}_+(I)$ consiste di $e(S/I)$ punti distinti. Se $\dim(S/I) = d > 1$, allora un sottospazio lineare "generale" di codimensione $d - 1$ interseca $\mathcal{Z}_+(I)$ in $e(S/I)$ punti distinti.

OSS.: Il termine "generale" può essere reso preciso; senza entrare nei dettagli, se si prende un sottospazio lineare di $\mathbb{P}_K^{n-1}$ a caso, questo sarà generale a meno di circostanze particolarmente sfortunate (dove la sfortuna è determinata da $\mathcal{Z}_+(I)$).

Come può essere la funzione di Hilbert di A?

Descriveremo un teorema di Macaulay che risponde alla domanda di sopra in maniera esauriente.

LEMMA: Fissato un intero positivo d, ogni $a \in \mathbb{N}$ può essere scritto in modo unico nella forma:

$$a = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \ldots + \binom{k(1)}{1},$$

con $k(d) > k(d-1) > \ldots > k(1) \geq 0$.

DEF.: Con le notazioni del lemma, la d-esima rappresentazione di Macaulay di a è il numero:

$$a^{\langle d \rangle} = \binom{k(d)+1}{d+1} + \binom{k(d-1)+1}{d} + \ldots + \binom{k(1)+1}{2}$$

ESEMPIO: Siano $a = 15$ e $d = 3$. Allora

$$15 = \binom{5}{3} + \binom{3}{2} + \binom{2}{1}.$$

Dunque

$$15^{\langle 3 \rangle} = \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2} = 22.$$

TEOREMA (Macaulay): Sia K un campo e $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione. Sono equivalenti:

- Esiste una K-algebra Noetheriana A graduata standard tale che
$$\mathrm{HF}_A(k) = F(k) \ \forall \quad k \in \mathbb{N};$$
- $F(0) = 1$ e $F(k+1) \leq F(k)^{\langle k \rangle} \quad \forall \ k \geq 1.$

ESEMPIO: Dal teorema precedente, deduciamo che

$$1 + 3t + 5t^2 + 7t^3$$

è una serie di Hilbert, infatti:

- $F(0) = 1;$
- $F(1)^{\langle 1 \rangle} = 3^{\langle 1 \rangle} = \binom{4}{2} = 6 \geq 5 = F(2);$
- $F(2)^{\langle 2 \rangle} = 5^{\langle 2 \rangle} = \binom{4}{3} + \binom{3}{2} = 7 = F(3).$

CONTINUAZIONE ESEMPIO: La dimostrazione di Macaulay è costruttiva, e fornisce un anello graduato standard A con serie di Hilbert $1+3t+5t^2+7t^3$ in questo modo:

- $\mathcal{M}_1 = \{$primi 3 monomi di grado 1 in ordine degrevlex$\} = \{x_1, x_2, x_3\}$
- $\mathcal{M}_2 = \{$primi 5 monomi di grado 2 in ordine degrevlex$\} = \{x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2,\ x_1x_3,\ x_2x_3\}$
- $\mathcal{M}_3 = \{$primi 7 monomi di grado 3 in ordine degrevlex$\} = \{x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1x_2^2,\ x_2^3,\ x_1^2x_3, x_1x_2x_3,\ x_2^2x_3\}$.
- $\mathcal{M}_i = \varnothing$ per ogni $i \geq 4$.

Siccome abbiamo utilizzato soltanto tre variabili, consideriamo il K-spazio vettoriale di $S = K[x_1, x_2, x_3]$ generato da tutti i monomi di grado positivo che non stanno negli $\mathcal{M}_i$:

$$I := \langle x_3^2 \rangle \oplus \langle x_1x_3^2,\ x_2x_3^2,\ x_3^3 \rangle \oplus \Big(\bigoplus_{k\geq 4} S_k\Big)$$

CONTINUAZIONE ESEMPIO: Lo spazio vettoriale

$$I = \langle x_3^2 \rangle \oplus \langle x_1 x_3^2,\ x_2 x_3^2,\ x_3^3 \rangle \oplus \big(\bigoplus_{k>3} S_k\big)$$

è un ideale di S, poiché $IS \subseteq I$. Notiamo che per dimostrare che uno spazio vettoriale $\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V_k \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$ è un ideale, basta verificare che

$$x_i \cdot V_k \subseteq V_{k+1} \ \forall\ i = 1,\dots,n,\ k \in \mathbb{N}.$$

Il fatto che lo spazio vettoriale I così costruito viene un ideale è proprio grazie alle condizioni di Macaulay $|\mathcal{M}_{k+1}| \le |\mathcal{M}_k|^{\langle k \rangle}$!!!

Dunque, $A = S/I$ è una K-algebra graduata standard, e per costruzione $\mathrm{HS}_A(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 7t^3$.

NON-ESEMPIO: Il teorema di Macaulay ci dice che

$$1 + 3t + 5t^2 + 8t^3$$

non è una serie di Hilbert, poiché

$$F(2)^{\langle 2\rangle} = 5^{\langle 2\rangle} = \binom{4}{3} + \binom{3}{2} = 7 < 8 = F(3).$$

Infatti, se provassimo a seguire il ragionamento di prima costruendo i vari $\mathcal{M}_i$, avremmo:

- $\mathcal{M}_1 = \{$primi 3 monomi di grado 1 in ordine degrevlex$\} = \{x_1, x_2, x_3\}$
- $\mathcal{M}_2 = \{$primi 5 monomi di grado 2 in ordine degrevlex$\} = \{x_1^2,\ x_1x_2,\ x_2^2,\ x_1x_3,\ x_2x_3\}$
- $\mathcal{M}_3 = \{$primi 8 monomi di grado 3 in ordine degrevlex$\} = \{x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1x_2^2,\ x_2^3,\ x_1^2x_3, x_1x_2x_3,\ x_2^2x_3, x_1x_3^2\}$.

CONTINUAZIONE NON-ESEMPIO: In questo caso, il K-spazio vettoriale di $S = K[x_1, x_2, x_3]$ generato da tutti i monomi di grado positivo che non stanno negli $\mathcal{M}_i$ è:

$$I = \langle x_3^2 \rangle \oplus \langle x_2 x_3^2,\ x_3^3 \rangle \oplus \Big(\bigoplus_{k>3} S_k\Big)$$

Ma questo non è un ideale, perché $x_3^2 \in I$ ma $x_1 x_3^2$ no.

Un'altra interpretazione di dimensione

A torna ad essere un anello qualsiasi (senza struttura graduata) e $I \subseteq A$ un ideale.

DEF.: 1. L'algebra di Rees di A rispetto a I è:

$$\mathcal{R}_I(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k t^k \subseteq A[t].$$

2. Il graduato associato di A rispetto a I è:

$$\mathcal{G}_I(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k / I^{k+1}.$$

$(I^0 = A)$.

Sia l'algebra di Rees che il graduato associato sono anelli graduati. Infatti, sono graduati standard.

Però, sia $\mathcal{R}_I(A)_0 = A$ che $\mathcal{G}_I(A)_0 = A/I$ in generale non sono campi.

DEF.: Se $(A, \mathfrak{m})$ è locale, il graduato associato di A è $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(A)$.

OSS.: Il graduato associato di un anello Noetheriano locale è una K-algebra Noetheriana graduata standard, dove $K = A/\mathfrak{m}$.

TEOREMA: Se A è Noetheriano e I è un ideale non nullo, allora:

- $\dim(\mathcal{R}_I(A)) = \dim(A) + 1$;
- $\dim(\mathcal{G}_I(A)) = \sup\{\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) : \mathfrak{m}$ è un massimale che contiene $I\}$.

COR.: $(A, \mathfrak{m})$ locale Noetheriano $\Rightarrow \dim(\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(A)) = \dim(A)$.
Dunque, $\dim(A) - 1$ è il grado del polinomio di Hilbert di $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(A)$.

Poiché $\dim(A) = \sup\{\dim(A_{\mathfrak{m}}) : \mathfrak{m}$ massimale di $A\}$, volendo quindi si potrebbe definire la dimensione di un anello tramite il polinomio di Hilbert.

ESEMPIO 1: $A = K[x^2, xy]$. Cosa è dim(A)?

Innanzitutto notiamo che A è graduata standard su K:

- $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ where $A_i = \langle x^{i+a}y^b : a+b = i, a \geq 0, b \geq 0\rangle$.
- $A = K[A_1]$.

Consideriamo l'omomorfismo di K-algebre $K[x_1, x_2] \xrightarrow{\phi} A$ che a x_1 associa x^2 e a x_2 associa xy. Vogliamo dimostrare che $\mathrm{Ker}(\phi)$ è (0). Sia $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$ omogeneo di grado d. Se $\phi(f) = f(x^2, xy)$ è 0, allora $x^d f(x,y) = 0$, che implica $f = 0$. Essendo $\mathrm{Ker}(\phi)$ un ideale omogeneo, dunque $\mathrm{Ker}(\phi) = (0)$. Allora $A \cong K[x_1, x_2]$ e

$$\dim(A) = \dim(K[x_1, x_2]) = 2.$$

ESEMPIO 2: $A = K[x^2, x/y]$. Cosa è $\dim(A)$?

Consideriamo l'omomorfismo di K-algebre $K[x_1, x_2] \xrightarrow{\phi} A$ che associa x^2 a x_1 e x/y a x_2. Sia $f = \sum_{(i,j)} a_{i,j} x_1^i x_2^j \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Allora

$$\phi(f) = f(x^2, x/y) = \sum_{(i,j)} a_{i,j} \cdot x^{2i+j} y^{-j} = 0.$$

Poiché $x^{2i+j} y^{-j} = x^{2i'+j'} y^{-j'}$ se e solo se $i = i'$ e $j = j'$, allora $a_{i,j} = 0$ per ogni (i, j). Dunque $f = 0$; allora $A \cong K[x_1, x_2]$ e

$$\dim(A) = \dim(K[x_1, x_2]) = 2.$$

ESEMPIO 3: $A = K[y_1y_2, y_2y_3, y_3y_4, y_1y_4]$. Cosa è $\dim(A)$?
Questa volta A non è isomorfa a un anello di polinomi, quindi il solito trucco non funziona. Si osservi che

$$\mathrm{Frac}(A) = K(y_1y_2, y_2y_3, y_3y_4).$$

Se $f = \sum_{(i,j,k)} a_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k \in K[x_1, x_2, x_3]$ è tale che

$$f(y_1y_2, y_2y_3, y_3y_4) = \sum_{(i,j,k)} a_{i,j,k} \cdot y_1^i y_2^{i+j} y_3^{j+k} y_4^k = 0,$$

allora $a_{i,j,k} = 0$ per ogni (i, j, k), dunque $f = 0$. Quindi

$$\dim(A) = \mathrm{Trdeg}(\mathrm{Frac}(A) : K) = 3.$$

ESERCIZIO: Per $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^r$, sia

$$\mathbf{y}^{\mathbf{v}} := y_1^{v_1} y_2^{v_2} \cdots y_r^{v_r},$$

e sia $A = K[\mathbf{y}^{\mathbf{v_1}}, \ldots, \mathbf{y}^{\mathbf{v_m}} : \mathbf{v_i} \in \mathbb{Z}^r \ \forall \ i = 1, \ldots, m]$.

Dimostrare che, se M è la matrice $r \times m$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$ con i $\mathbf{v_i}$ come colonne, allora

$$\dim(A) = \mathrm{rk}(M).$$

ESEMPIO 4: Sia $S = K[x_1, \dots, x_n]$, $f = x_1^2 \in S$ e $A = S/(f)$.
Poiché S è un dominio, (0) è il suo unico primo minimale, dunque $\mathrm{ht}((f)) \geq 1$. Dunque

$$\dim(A) + 1 \leq \dim(S) = n.$$

D'altra parte $\dim(S/(f)) \geq \dim(S) - 1$, dunque $\dim(A) = n - 1$.

Calcoliamo la funzione di Hilbert di A:

$$A_i = K[x_2, \dots, x_n]_i \bigoplus x_1 \cdot K[x_2, \dots, x_n]_{i-1}.$$

Quindi $\mathrm{HF}_A(i) = \binom{n+i-2}{i} + \binom{n+i-3}{i-1}$, che è un polinomio in i di grado $n - 2$ per ogni $i > -n + 2$.

Sequenze regolari

DEF.: Sia A un anello e M un A-modulo. Un elemento $a \in A$ si dice M-regolare se, dato $m \in M$,

$$am = 0 \Rightarrow m = 0.$$

DEF.: Una sequenza $a_1, \dots, a_n \in A$ si dice sequenza M-regolare (o solo M-sequenza) se:

(i) a_i è $(M/(a_1, \dots, a_{i-1})M)$-regolare per ogni $i = 1, \dots, n$;

(ii) $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$.

OSS.: Spesso $(A, \mathfrak{m})$ sarà un anello locale Noetheriano, $M \neq 0$ un A-modulo finitamente generato e $a_i \in \mathfrak{m}$ per ogni $i = 1, \dots, n$. In tal caso la condizione (ii) della definizione di M-sequenza è automaticamente soddisfatta dal lemma di Nakayama.

OSS.: Per definizione, $a_1, \ldots, a_n \in A$ è una sequenza M-regolare se e solo se:

(i) Per ogni $i = 1, \ldots, n$, se $a_i m \in (a_1, \ldots, a_{i-1})M$ per qualche $m \in M$, allora $m \in (a_1, \ldots, a_{i-1})M$.

(ii) $M/(a_1, \ldots, a_n)M \neq 0$.

ESEMPI: 1. Sia $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ un anello di polinomi. Allora $x_1, \ldots, x_n$ è una sequenza A-regolare:

(i) $A/(x_1, \ldots, x_i) \cong K[x_{i+1}, \ldots, x_n] = B$ e x_{i+1} è B-regolare.

(ii) $A/(x_1, \ldots, x_n) \cong K \neq 0$.

2. Sia $A = K[x, y, z]$. La sequenza x^3, xyz non è A-regolare:

$$x^2 \cdot xyz \in (x^3)$$

ma $x^2 \notin (x^3)$.

3. Sia $A = K[x, y, z, w]$. La sequenza x^3, yz, w^5 è A-regolare:

- Siccome A è un dominio, x^3 è ovviamente A-regolare;
- Se u è un monomio di A e $yz \cdot u \in (x^3)$, allora $u \in (x^3)$. Essendo (x^3) monomiale, $yz \cdot f \in (x^3) \Rightarrow f \in (x^3) \ \ \forall \ f \in A$;
- Se u è un monomio di A e $w^5 u \in (x^3, yz)$, allora $u \in (x^3, yz)$. Siccome (x^3, yz) è monomiale, dunque, per ogni $f \in A$ si ha $w^5 f \in (x^3, yz) \Rightarrow f \in (x^3, yz)$;
- $A/(x^3, yz, w^5) \neq 0$.

4. Sia $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ un anello di polinomi e $u_1, \ldots, u_r$ dei monomi di grado positivo di A. Generalizzando i ragionamenti precedenti si deduce che le seguenti sono equivalenti:

- $u_1, \ldots, u_r$ è una sequenza A-regolare;
- $\mathrm{MCD}(u_i, u_j) = 1 \ \forall \ i \neq j$.

Le sequenze regolari scimmiottano il comportamento delle variabili in un anello di polinomi nel senso seguente.

TEOREMA: Sia $a_1, \dots, a_n \in A$ è una sequenza A-regolare, e $I = (a_1, \dots, a_n) \subseteq A$. Allora, la mappa di A/I-algebre:

$$\begin{array}{rcl} A/I[x_1, \dots, x_n] & \to & \mathcal{G}_I(A) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I^k/I^{k+1} \\ x_i & \mapsto & \overline{a_i} \in I/I^2 \end{array}$$

è un isomorfismo.

ESERCIZIO: Per ogni A-modulo M (A anello qualunque), provare che le seguenti sono equivalenti:

(i) $a_1, \dots, a_n$ è una sequenza M-regolare.

(ii) $a_1^{d_1}, \dots, a_n^{d_n}$ è una sequenza M-regolare per ogni vettore di interi positivi $(d_1, \dots, d_n)$.

OSS: Supponiamo che $a, b \in A$ sia una sequenza M-regolare. Possiamo dire che $b, a \in A$ è una sequenza M-regolare??? Sia $K = \mathrm{Ker}(M \xrightarrow{\cdot b} M)$ e prendiamo $m \in K$.

Abbiamo che $bm = 0$ in M, quindi a maggior ragione $b\overline{m} = 0$ in M/aM. Allora $\overline{m} = 0$ in M/aM, siccome b è M/aM-regolare. Questo significa che $m = am'$ per qualche $m' \in M$.

Ma allora $a(m'b) = 0$ in M, che siccome a è M-regolare implica $m'b = 0$. Dunque $m' \in K$, e abbiamo dimostrato che $K = aK$. Se siamo in un ambiente dove si può usare Nakayama (ad esempio A locale Noetheriano e M finitamente generato) potremmo dedurre che $K = 0$, cioè che b è M-regolare.

Che a sia M/bM-regolare è vero per ogni A e per ogni M: se $a\overline{m} = 0$ in M/bM, allora $am = bm'$ per qualche $m' \in M$. Dunque $b\overline{m'} = 0$ in M/aM, che poichè b è M/aM-reglolare implica $m' = am''$ per qualche $m'' \in M$. Allora $am = abm''$, che siccome a è M-regolare implica $m = bm''$. Cioè $\overline{m} = 0$ in M/bM.

Dunque se siamo in un ambiente in cui vale Nakayama possiamo dedurre che b, a è una sequenza M-regolare.

L'osservazione precedente permette di dimostrare che, sotto ipotesi che garantiscano la validità del lemma di Nakayama, una permutazione di una sequenza M-regolare è anch'essa una sequenza M-regolare.

Più avanti dimostreremo una caratterizzazione omologica delle sequenze M-regolari che implicherà la validità di questa proprietà di permutazione e di altre proprietà sotto opportune ipotesi.

OSS.: In generale la proprietà di permutazione non vale: ad esempio, prendiamo $a_1 = x(y-1)$, $a_2 = y$ e $a_3 = z(y-1)$ in $A = K[x,y,z]$. È facile vedere che a_1, a_2, a_3 è A-regolare, poiché $(a_1, a_2) = (x, y)$ e $\overline{a_3} = z \in K[z] = A/(a_1, a_2)$, ma a_1, a_3, a_2 non lo è, poiché $xa_3 \in (a_1)$ ma $x \notin (a_1)$.

Motivazione geometrica per gli elementi regolari

Se $S = K[x_0, \dots, x_n]$, $I \subseteq S$ ideale omogeneo e ℓ forma lineare di S, allora si ha

$$\mathcal{Z}_+(I + (\ell)) = \mathcal{Z}_+(I) \cap \mathcal{Z}_+(\ell).$$

Se $A = S/I$, si noti che $S/(I + (\ell)) = A/(\bar{\ell})$. Quindi andare modulo una forma lineare è analogo a prendere una sezione iperpiana di una varietà: filosoficamente, se ℓ è A-regolare la relativa "sezione" fornisce informazioni più precise sull'anello A.

Richiamo veloce del concetto di primi associati

DEF.: L'insieme dei primi associati di un A-modulo M è:

$$\mathrm{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \exists\ 0 \neq m \in M : \mathfrak{p} = 0 :_A m\}$$

PROPOSIZIONE: Si consideri la famiglia di ideali di A

$$\mathcal{F} = \{0 :_A m \mid 0 \neq m \in M\}.$$

Allora ogni elemento massimale di $\mathcal{F}$ appartiene a $\mathrm{Ass}_A(M)$. In particolare, se A è Noetheriano:

(i) $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \emptyset$.

(ii) Un elemento $a \in A$ non è M-regolare se e solo se appartiene a:

$$\bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$$

Dimostrazione: Sia $I = 0 :_A m \subseteq A$ un ideale massimale in $\mathcal{F}$. Dobbiamo dimostrare che I è primo, quindi prendiamo a e b in A tali che $ab \in I$ ma $b \notin I$. Dunque $abm = 0$ e $bm \neq 0$.

Quindi $a \in J = 0 :_A (bm) \in \mathcal{F}$, e ovviamente $I \subseteq J$. Ma siccome I è massimale fra gli elementi di $\mathcal{F}$, $I = J$, da cui $a \in I$ e I è primo.

(i). Se A è Noetheriano, $\mathcal{F}$ ha almeno un elemento massimale per il lemma di Zorn.

(ii). Chiaramente se $a \in 0 :_A m$ per qualche $m \neq 0$, a non è M-regolare. D'altra parte, se a non è M-regolare, allora esiste $0 \neq m \in M$ tale che $a \in 0 :_A m$. Ora basta prendere un elemento massimale $\mathfrak{p}$ di $\mathcal{F}$ (che per quanto detto è un associato di M) che contenga $0 :_A m$. $\square$

PROPOSIZIONE: Sia A un anello Noetheriano e $M \neq 0$ un modulo finitamente generato. Allora esiste una catena di sottomoduli:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tale che esiste $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(A)$ per cui $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$.

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{p}_1 = 0 :_A m_1 \in \mathrm{Ass}_A(M)$. Definiamo M_1 come l'immagine dell'immersione $A/\mathfrak{p}_1 \hookrightarrow M$ che manda a in am_1. Poiché $M_1/M_0 = M_1 \cong A/\mathfrak{p}_1$, il primo passo è fatto!

Induttivamente, se $M_i \neq M$ scegliamo $\mathfrak{p}_{i+1} = 0 : m_{i+1}$ un primo associato di M/M_i e definiamo $M_{i+1} \supset M_i$ come il sollevamento ad M dell'immagine dell'immersione $A/\mathfrak{p}_{i+1} \hookrightarrow M/M_i$ che manda a in am_{i+1}. Chiaramente, si ha $M_{i+1}/M_i \cong A/\mathfrak{p}_{i+1}$.

La Noetherianità di M ci assicura che il procedimento terminerà. $\square$

ESERCIZIO: Data una sequenza esatta di A-moduli

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0,$$

si ha che: $\mathrm{Ass}_A(M) \subseteq \mathrm{Ass}_A(K) \cup \mathrm{Ass}_A(N)$.

PROPOSIZIONE: Sia A un anello Noetheriano e M un modulo finitamente generato. Allora $|\mathrm{Ass}_A(M)| < +\infty$

Dimostrazione: Si consideri una catena di sottomoduli

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

tali che $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$. Osserviamo che:

$$\mathrm{Ass}_A(M_i/M_{i-1}) = \mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{p}_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$$

e concludiamo per induzione su i usando l'esercizio precedente e le sequenze esatte corte:

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0.$$

□

PROP.: Se A è Noetheriano e M finitamente generato, allora

$$\mathrm{Min}(0 :_A M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M) \ : \nexists \ \mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}_A(M) : \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

PROP.: Sia A un anello Noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e $I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$ una decomposizione primaria minimale di I. Allora

$$\mathrm{Ass}(I) := \mathrm{Ass}_A(A/I) = \{\sqrt{\mathfrak{q}_i} \mid i = 1, \dots, n\}$$
$$\mathrm{Min}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I) \ : \nexists \ \mathfrak{p}' \in \mathrm{Ass}(I) : \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}\}.$$

ESEMPIO: In generale $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \mathrm{Ass}(0 :_A M)$. Ad esempio si prendano $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ ideali primi di A, e si ponga $M = A/\mathfrak{p}_1 \oplus A/\mathfrak{p}_2$. Si ha che $\mathrm{Ass}_A(M) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2\}$, ma $0 :_A M = \mathfrak{p}_1$ (e $\mathrm{Ass}(\mathfrak{p}_1) = \{\mathfrak{p}_1\}$).

Caratterizzazione omologica delle sequenze regolari

LEMMA 1: Sia A un anello Noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e $M \neq 0$ un A-modulo finitamente generato. Le seguenti sono equivalenti:

(i) I contiene un elemento M-regolare.

(ii) $\mathrm{Hom}_A(A/I, M) = 0$.

Dimostrazione: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $x \in I$ un elemento M-regolare, e $\phi \in \mathrm{Hom}_A(A/I, M)$. Poiché $x \cdot \phi(\overline{1}) = \phi(\overline{x}) = 0$, allora $\phi(\overline{1}) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Se I consiste di elementi non M-regolari, allora

$$I \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}.$$

Ma $|\mathrm{Ass}_A(M)| < +\infty$, perciò il prime avoidance ci dice che esiste $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$ tale che

$$I \subseteq \mathfrak{p}.$$

Ma $\mathfrak{p} = 0 :_A m$ dove $0 \neq m \in M$, dunque la seguente mappa di A-moduli è nonzero:

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{p} & \xrightarrow{\psi} & M \\ a & \mapsto & am \end{array}$$

Possiamo concludere perché la composizione dell'omomorfismo surgettivo $A/I \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$ (dato dall'inclusione $I \subseteq \mathfrak{p}$) con ψ è un elemento non nullo di $\mathrm{Hom}_A(A/I, M)$. $\square$

OSS.: Nell'implicazione $(i) \Rightarrow (ii)$ non abbiamo usato né la Noetherianità di A né il fatto che M è finitamente generato.

LEMMA 2: Sia A un anello, $I \subseteq A$ un ideale, M un A-modulo e $a_1, \dots, a_n$ una sequenza M-regolare contenuta in I. Allora:

$$\mathrm{Hom}_A(A/I, M/(a_1, \dots, a_n)M) \cong \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M)$$

Dimostrazione: Procediamo per induzione su n, essendo vero il caso $n = 0$. Supponiamo di avere

$$\mathrm{Hom}_A(A/I, M/(a_1, \dots, a_{n-1})M) \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I, M).$$

Siccome $a_n \in I$ è $M/(a_1, \dots, a_{n-1})M$-regolare il lemma 1 implica:

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I, M) = 0.$$

Sia $a = a_1$, e consideriamo la sequenza esatta corta:

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot a} M \to M/aM \to 0,$$

che induce la sequenza esatta lunga:

$$\dots \to \mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I, M) \to \mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I, M/aM) \to \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) \xrightarrow{\cdot a} \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) \to \dots$$

LEMMA 2: Sia A un anello, $I \subseteq A$ un ideale, M un A-modulo e $a_1, \dots, a_n$ una sequenza M-regolare contenuta in I. Allora:

$$\operatorname{Hom}_A(A/I, M/(a_1, \dots, a_n)M) \cong \operatorname{Ext}^n_A(A/I, M)$$

Dimostrazione: Procediamo per induzione su n, essendo vero il caso $n = 0$. Supponiamo di avere

$$\operatorname{Hom}_A(A/I, M/(a_1, \dots, a_{n-1})M) \cong \operatorname{Ext}^{n-1}_A(A/I, M).$$

Siccome $a_n \in I$ è $M/(a_1, \dots, a_{n-1})M$-regolare il lemma 1 implica:

$$\operatorname{Ext}^{n-1}_A(A/I, M) = 0.$$

Sia $a = a_1$, e consideriamo la sequenza esatta corta:

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot a} M \to M/aM \to 0,$$

che induce la sequenza esatta lunga:

$$0 \to \operatorname{Ext}^{n-1}_A(A/I, M/aM) \to \operatorname{Ext}^n_A(A/I, M) \xrightarrow{\cdot a} \operatorname{Ext}^n_A(A/I, M) \to \dots$$

La mappa $\mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) \xrightarrow{\cdot a} \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M)$ è anche indotta dalla moltiplicazione di a su A/I, che ovviamente è 0 perché $a \in I$. Dunque abbiamo la sequenza esatta

$$0 \to \mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I, M/aM) \to \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) \xrightarrow{0} \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M),$$

da cui deduciamo che

$$\mathrm{Ext}^{n-1}_A(A/I, M/aM) \cong \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M).$$

Siccome $a_2, \dots, a_n$ è una sequenza M/aM-regolare, un'ulteriore utilizzo dell'ipotesi induttiva ci permette di concludere. □

TEOREMA (Rees): Sia A un anello Noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e M un A-modulo finitamente generato tale che $M \neq IM$. Allora tutte le sequenze M-regolari massimali e contenute in I hanno la stessa lunghezza n:

$$n = \min\{i : \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}.$$

Dimostrazione: Sia $a_1, \dots, a_n$ una M-sequenza regolare massimale contenuta in I. Dal lemma 2 sappiamo che

$$(*) \quad \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A/I, M/(a_1, \dots, a_i)M) \quad \forall\ i = 1, \dots, n$$

Perciò dal lemma 1 deduciamo che $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0$ per $i < n$ (siccome $a_{i+1} \in I$ è $M/(a_1, \dots, a_i)M$-regolare). Siccome $a_1, \dots, a_n$ è massimale fra le sequenze M-regolari contenute in I, non esiste alcun elemento $M/(a_1, \dots, a_n)M$-regolare appartenente ad I. Ancora una volta grazie al lemma 1 ed a (*), deduciamo che $\mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) \neq 0$ (siccome $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$). $\square$

DEFINIZIONE: Dato A un anello Noetheriano, $I \subseteq A$ un ideale e M un A-modulo finitamente generato tale che $M \neq IM$, definiamo il grado di I su M come:

$$\mathrm{grado}(I, M) := \min\{i : \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \neq 0\}.$$

Integriamo la definizione ponendo $\mathrm{grado}(I, M) = +\infty$ se $M = IM$. Questo è consistente con il teorema di Rees, poiché si può vedere:

$$M = IM \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0 \ \forall \ i \in \mathbb{N}.$$

Per il grado di I intenderemo $\mathrm{grado}(I, A)$, e lo denoteremo semplicemente come:

$$\mathrm{grado}(I) := \min\{i : \mathrm{Ext}^i_A(A/I, A) \neq 0\}.$$

ESERCIZI: 1. Siano $A = K[x, y]$, $I = (x^2, xy) \subseteq A$. Si provi che

$$\mathrm{Ext}^1_A(A/I, A) \cong \mathrm{Hom}_A(A/I, A/(x^2)) \cong (x)/(x^2).$$

2. Sia A un anello Noetheriano, M un A-modulo finitamente generato, $I \subseteq A$ un ideale e $a \in I$. Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a \cdot \mathrm{Ext}^n_A(A/I, M) = a \cdot \mathrm{Ext}^n_A(M, A/I) = a \cdot \mathrm{Tor}^A_n(A/I, M) = 0.$$

3. Siano A un anello Noetheriano e M e N A-moduli finitamente generati. Allora $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ e $\mathrm{Tor}^A_n(M, N)$ sono A-moduli finitamente generati per ogni $n \in \mathbb{N}$.

PROP.: Sia A un anello Noetheriano, I un ideale e

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

una sequenza esatta corta di A-moduli finitamente generati.
Allora:

(i) $\mathrm{grado}(I, M) \geq \min\{\mathrm{grado}(I, K), \mathrm{grado}(I, N)\}$.

(ii) $\mathrm{grado}(I, K) \geq \min\{\mathrm{grado}(I, M), \mathrm{grado}(I, N) + 1\}$.

(iii) $\mathrm{grado}(I, N) \geq \min\{\mathrm{grado}(I, K) - 1, \mathrm{grado}(I, M)\}$.

Dimostrazione: Bisogna usare la sequenza esatta lunga indotta da $\mathrm{Hom}_A(A/I, -)$, lo facciamo nel primo caso...

Sia $h = \min\{\mathrm{grado}(I, K), \mathrm{grado}(I, N)\}$ e $i < h$. Allora

$$\mathrm{Ext}^i_A(A/I, K) = \mathrm{Ext}^i_A(A/I, N) = 0,$$

dunque dalla sequenza esatta lunga degli Ext

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i_A(A/I, K) \to \mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) \to \mathrm{Ext}^i_A(A/I, N) \to \ldots$$

si deduce $\mathrm{Ext}^i_A(A/I, M) = 0$ per ogni $i < h$, cioè $\mathrm{grado}(I, M) \geq h$.

ESERCIZIO: dimostrare analogamente (ii) e (iii). $\square$

PROP.: Sia A un anello Noetheriano e M un A-modulo finitamente generato. Se I e J sono ideali di A tali che $\sqrt{J} = I$ e $M \neq IM$, allora

$$\mathrm{grado}(I, M) = \mathrm{grado}(J, M).$$

Dimostrazione: $J \subseteq I \Rightarrow \mathrm{grado}(J, M) \leq \mathrm{grado}(I, M)$.

D'altra parte, abbiamo visto in un esercizio che, se $a_1, \dots, a_n$ è una sequenza M-regolare, allora lo è anche $a_1^N, \dots, a_n^N$ per ogni $N \in \mathbb{N}$. Naturalmente se la prima stava in I, allora esiste un N per cui la seconda sta in J, da cui

$$\mathrm{grado}(I, M) \leq \mathrm{grado}(J, M).$$

$\square$

PROP.: Sia A un anello Noetheriano e $a_1, \ldots, a_n$ una sequenza A-regolare. Allora $\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_n)) = n$. In particolare, se $I \subseteq A$ è un ideale, allora $\mathrm{grado}(I) \leq \mathrm{ht}(I)$.

Dimostrazione: Sia a_1 un elemento A-regolare non invertibile. Allora $a_1 \notin \mathfrak{p} \ \forall \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$. Poiché $\mathrm{Min}(A) \subseteq \mathrm{Ass}_A(A)$, ciò implica che $\mathrm{ht}((a_1)) \geq 1$. Dall'Hauptidealsatz deduciamo che, dunque, $\mathrm{ht}((a_1)) = 1$.

Per induzione, supponiamo che $\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_i)) = i$ per qualche $1 = i < n$, allora $a_{i+1} \notin \mathfrak{p} \ \forall \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A((a_1, \ldots, a_i))$. Dunque,

$$\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})) \geq \mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_i)) + 1 = i + 1.$$

Dall'Hauptidealsatz $\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})) = i + 1$, dunque per induzione $\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_n)) = n$. Per finire, se $a_1, \ldots, a_n$ è una sequenza A-regolare massimale contenuta in I, allora

$$n = \mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_n)) = \mathrm{grado}(I) \leq \mathrm{ht}(I).$$

$\square$

DEF.: Dati un anello A e un A-modulo M, il supporto di M è:

$$\mathrm{Supp}\, M = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

ES.: Si provi che $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}\, M \Rightarrow \mathfrak{p} \supseteq 0 :_A M$. Se M è finitamente generato, vale anche il viceversa.

ES.: Se A è Noetheriano e M è finitamente generato, si provi che per ogni ideale $I \subseteq A$ si ha

$$\sqrt{0 :_A M/IM} = \sqrt{I + 0 :_A M}.$$

Quindi $\dim M/IM = \dim A/(0 :_A M/IM) = \dim A/(I + 0 :_A M)$.

Profondità

DEFINIZIONE: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano e M un A-modulo finitamente generato. La profondità di M è il grado di $\mathfrak{m}$ su M cioè:

$$\mathrm{depth}(M) := \min\{i : \mathrm{Ext}^i_A(K, M) \neq 0\}, \quad \text{dove} \quad K = A/\mathfrak{m}.$$

OSS: Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale Noetheriano, M un modulo finitamente generato e $a_1, \ldots, a_n$ sono elementi di $\mathfrak{m}$, allora

$$\dim(M/(a_1, \ldots, a_n)M) = \dim(A/(0 :_A (M/(a_1, \ldots, a_n)M)) =$$
$$\dim \frac{A/(0 :_A M)}{(a_1, \ldots, a_n)(A/(0 :_A M))} \geq \dim(A/(0 :_A M)) - n = \dim(M) - n.$$

......

.... D'altra parte, se $a \in A$ è M-regolare, allora $a \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$.
Poiché $\mathrm{Min}(0 :_A M) \subseteq \mathrm{Ass}_A(M)$, dunque $a \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(0:_A M)} \mathfrak{p}$.
Ricordando che $\dim(M) = \dim(A/0 :_A M)$, questo implica che

$$\dim(M/aM) = \dim(M) - 1.$$

Per induzione, se $a_1, \ldots, a_n$ è M-regolare:

$$\dim(M/(a_1, \ldots, a_n)M) = \dim(M) - n.$$

PROPOSIZIONE: Se A è un anello locale Noetheriano e M un modulo finitamente generato, allora

$$\mathrm{depth}(M) \leq \dim(M).$$

Dimostrazione: Segue subito da quanto detto prima e dal fatto che la dimensione di Krull non può essere negativa. □

ESEMPIO: Sia $A = K[[x,y]]$, $I = (x)$ e $J = (x^2, xy)$. Notiamo che $x \in I$ è A-regolare, quindi $\mathrm{grado}(I) \geq 1$. D'altra parte $\mathrm{ht}(I) = 1$, quindi $\mathrm{grado}(I) = 1$. Poiché $\sqrt{J} = I$,

$$\mathrm{grado}(J) = \mathrm{grado}(I) = 1.$$

Calcoliamo $\mathrm{depth}(A/I)$ e $\mathrm{depth}(A/J)$. Osserviamo che $A/I = K[[y]]$, dunque $y \in \mathfrak{m} = (x,y)$ è A/I-regolare. Quindi $\mathrm{depth}(A/I) \geq 1$, e poiché $\dim(A/I) = 1$,

$$\mathrm{depth}(A/I) = 1.$$

D'altro canto, poiché $J = (x) \cap \mathfrak{m}^2$, $\mathrm{Ass}_A(A/J) = \{(x), \mathfrak{m}\}$. Quindi non esiste alcun elemento A/J-regolare dentro $\mathfrak{m}$, cioè:

$$\mathrm{depth}(A/J) = 0.$$

TEOREMA (Ishebeck): Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano, $M \neq 0$ un modulo finitamente generato, e $I \subseteq A$ un ideale. Allora

$$\mathrm{grado}(I, M) \geq \mathrm{depth}(M) - \dim A/I.$$

Dimostrazione: Se $\dim A/I = 0$ questo è chiaro perché in tal caso $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ e

$$\mathrm{grado}(I, M) = \mathrm{grado}(\mathfrak{m}, M) = \mathrm{depth}(M).$$

Allora facciamo un'induzione su $\dim A/I = r$. Eventualmente sostituendo I con $\sqrt{I}$, possiamo supporre che I sia radicale. Dunque $\mathrm{Min}(I) = \mathrm{Ass}(I)$, quindi $r > 0 \Rightarrow \mathfrak{m} \notin \mathrm{Ass}(I)$. Per il prime avoidance, allora, $\mathfrak{m} \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(I)} \mathfrak{p}$, quindi possiamo considerare $a \in \mathfrak{m}$ che sia A/I-regolare.

Allora possiamo considerare la sequenza esatta corta

$$0 \to A/I \xrightarrow{\cdot a} A/I \to A/(I + (a)) \to 0,$$

che induce la sequenza esatta lunga

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^j_A(A/(I+(a)), M) \to \mathrm{Ext}^j_A(A/I, M) \xrightarrow{\cdot a} \mathrm{Ext}^j_A(A/I, M) \to \mathrm{Ext}^{j+1}_A(A/(I+(a)), M) \to \ldots$$

che, siccome $\dim A/(I + (a)) = r - 1$, per $j < \mathrm{depth}(M) - r$ diventa (applicando l'ipotesi induttiva sulla dimensione di A/I):

$$0 \to \mathrm{Ext}^j_A(A/I, M) \xrightarrow{\cdot a} \mathrm{Ext}^j_A(A/I, M) \to 0$$

Per cui $\mathrm{Ext}^j_A(A/I, M) = a\,\mathrm{Ext}^j_A(A/I, M)$, che per Nakayama implica $\mathrm{Ext}^j(A/I, M) = 0 \ \forall\ j < \mathrm{depth}(M) - r$. $\square$

Teorema: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano e $M \neq 0$ un modulo finitamente generato. Allora:

$$\dim A/\mathfrak{p} \geq \mathrm{depth}(M) \quad \forall\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M).$$

Dimostrazione: Siccome $\mathfrak{p}$ non contiene elementi M-regolari, $\mathrm{grado}(\mathfrak{p}, M) = 0$. Allora il teorema di Ishebeck implica

$$0 \geq \mathrm{depth}(M) - \dim A/\mathfrak{p}.$$

$\square$

DEF.: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano e $M \neq 0$ un modulo finitamente generato. M si dice Cohen-Macaulay se

$$\mathrm{depth}(M) = \dim M.$$

Corollario (Purezza di Macaulay): Se M è Cohen-Macaulay, allora

$$\dim A/\mathfrak{p} = \dim M \quad \forall\ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M).$$

PROP.: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano e $M \neq 0$ un modulo finitamente generato. Se $a_1, \ldots, a_n$ è una sequenza M-regolare, allora M è Cohen-Macaulay se e solo se lo è $M/(a_1, \ldots, a_n)M$.

Dimostrazione: Per definizione e poiché tutte le sequenze M-regolari massimali in $\mathfrak{m}$ hanno la stessa lunghezza,

$$\operatorname{depth}(M/(a_1, \ldots, a_n)M) = \operatorname{depth}(M) - n,$$

mentre abbiamo osservato precedentemente che:

$$\dim(M/(a_1, \ldots, a_n)M) = \dim(M) - n.$$

$\square$

Anelli di Cohen-Macaulay

DEF.: Un anello locale Noetheriano si dice Cohen-Macaulay se è Cohen-Macaulay come A-modulo.

OSS.: Sia $I \subseteq A$ un ideale di un anello locale Noetheriano, e $R = A/I$. Allora le seguenti sono equivalenti:

(i) R è un anello di Cohen-Macaulay;

(ii) R è un A-modulo Cohen-Macaulay.

In generale, dato un ideale I in un qualunque anello A, si ha:

$$\mathrm{ht}(I) + \dim A/I \leq \dim A.$$

TEOREMA: Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello di Cohen-Macaulay, allora per ogni ideale I si ha:

(i) $\mathrm{grado}(I) = \mathrm{ht}(I)$;

(ii) $\mathrm{ht}(I) + \dim A/I = \dim A$.

Dimostrazione: Sappiamo già che:

$$\mathrm{grado}(I) \leq \mathrm{ht}(I) \leq \dim A - \dim A/I.$$

D'altra parte

$$\mathrm{depth}\, A - \dim A/I \leq \mathrm{grado}(I)$$

grazie ad Ishebeck. □

Abbiamo visto precedentemente che, se $a_1, \ldots, a_n$ è una sequenza A-regolare, dove A è un anello Noetheriano, allora

$$\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_n) = n.$$

Se l'anello A è Cohen-Macaulay, vale anche il viceversa!

TEOREMA: Se $(A, \mathfrak{m})$ è Cohen-Macaulay, le seguenti sono equivalenti:

(i) $a_1, \ldots, a_n$ è una sequenza A-regolare;

(ii) $\mathrm{ht}(a_1, \ldots, a_n) = n$;

(iii) $a_1, \ldots, a_n$ si può completare ad un sistema di parametri per A.

Dimostrazione: (i) ⇒ (ii) l'abbiamo già osservato. Se $\dim A = n$ l'implicazione (ii) ⇒ (iii) è ovvia. Se $\dim A = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) > n$, allora l'Hauptidealsatz ci assicura che

$$\mathfrak{m} \notin \mathrm{Min}((a_1, \ldots, a_n)).$$

Dunque possiamo trovare $a_{n+1} \in \mathfrak{m}$ che non stia in nessuno dei primi minimali di $(a_1, \ldots, a_n)$. Ma allora

$$\mathrm{ht}((a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})) = n + 1,$$

e possiamo estendere $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ ad un sistema di parametri per induzione su $\dim A - n$.

Osserviamo che finora non abbiamo usato l'ipotesi che A è Cohen-Macaulay, che sarà cruciale nel provare (iii) ⇒ (i).

Per provare (iii) $\Rightarrow$ (i), naturalmente possiamo supporre che $n \geq 1$ e che $a_1, \ldots, a_n$ sia già un sistema di parametri per A. Se $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$, allora per la purezza di Macaulay

$$\dim A/\mathfrak{p} = \dim A = n.$$

Dunque $a_1 \notin \mathfrak{p}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$ (altrimenti $\overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ sarebbe un sistema di parametri per $A/\mathfrak{p}$ che ha dimensione n), che vale a dire che a_1 è A-regolare. Quindi $A/(a_1)$ è Cohen-Macaulay, e le classi di $a_2, \ldots, a_n$ sono un sistema di parametri per $A/(a_1)$, così concludiamo per induzione su n. $\square$

PROP.: Se $(A, \mathfrak{m})$ è Cohen-Macaulay, allora $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello di Cohen-Macaulay per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$.

Dimostrazione: Osserviamo che $\operatorname{grado}(\mathfrak{p}) \leq \operatorname{depth}(A_{\mathfrak{p}})$.

Infatti, sia $a \in \mathfrak{p}$ un elemento A-regolare. Preso $x/y \in A_{\mathfrak{p}}$ tale che $a/1 \cdot x/y = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$, allora $\exists\ s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tale che $asx = 0$ in A. Allora $sx = 0$ in A, che implica $x/y = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$. Quindi $a/1 \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è un elemento $A_{\mathfrak{p}}$-regolare. Per induzione, poiché

$$\frac{A_{\mathfrak{p}}}{(a_1, \ldots, a_i)A_{\mathfrak{p}}} \cong \left(\frac{A}{(a_1, \ldots, a_i)} \right)_{\mathfrak{p}},$$

se $a_1, \ldots, a_n$ è una sequenza A-regolare dentro $\mathfrak{p}$, allora $a_1/1, \ldots, a_n/1$ è una sequenza $A_{\mathfrak{p}}$-regolare dentro $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$.

Ma allora abbiamo consluso, poiché $\operatorname{grado}(\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}}$. $\square$

La proposizione precedente permette di estendere in modo consistente il concetto di Cohen-Macaulay all'ambito non locale:

DEF.: Un anello Noetheriano A si dice Cohen-Macaulay se e solo se $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello di Cohen-Macaulay per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

In ambito locale, abbiamo visto che se $I = (a_1, \dots, a_n)$ è un ideale di altezza n in un anello Cohen-Macaulay A, allora $a_1, \dots, a_n$ è una sequenza A-regolare. In particolare A/I è Cohen-Macaulay, dunque $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A/I \ \forall \ \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(I)$.

Questa è una proprietà che caratterizza gli anelli Cohen-Macaulay!

TEOREMA: Per un anello Noetheriano A sono equivalenti:

(i) A è Cohen-Macaulay;

(ii) se I è un ideale di altezza n generato da n elementi, allora $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A/I$ per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(I)$.

Il caso graduato

Per un po' fissiamo A una K-algebra Noetheriana graduata standard, con K un campo e

$$\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} A_i$$

il massimale irrilevante (l'unico ideale massimale di A omogeneo!)

La situazione graduata è analoga (infatti spesso più semplice) di quella locale specialmente per il seguente:

Lemma (Nakayama versione graduata): Sia M un A-modulo graduato finitamente generato. Se $M = \mathfrak{m}M$, allora $M = 0$.

Dimostrazione: Se $M \neq 0$, allora scegliamo un generatore non nullo di M di grado minimo $i_0 \in \mathbb{Z}$. Allora $M = \bigoplus_{i \geq i_0} M_i$, mentre $\mathfrak{m}M \subseteq \bigoplus_{i > i_0} M_i$. $\square$

DEFINIZIONE: Sia M un A-modulo graduato finitamente generato. La profondità di M è il grado di $\mathfrak{m}$ su M cioè:

$$\mathrm{depth}(M) := \min\{i : \mathrm{Ext}^i_A(K, M) \neq 0\}, \quad K = A/\mathfrak{m}.$$

ESERCIZIO (Ishebeck versione graduata): Ripercorrere la dimostrazione del teorema di Ishebeck e dimostrare:

Dato $M \neq 0$ un A-modulo graduato finitamente generato e $I \subseteq A$ un ideale omogeneo, si ha $\mathrm{grado}(I, M) \geq \mathrm{depth}(M) - \dim A/I$.

Teorema: Sia $M \neq 0$ un A-modulo graduato finitamente generato. Allora:

$$\dim A/\mathfrak{p} \geq \operatorname{depth}(M) \quad \forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M).$$

DEF.: Un A-modulo $M \neq 0$ graduato e finitamente generato si dice Cohen-Macaulay se

$$\operatorname{depth}(M) = \dim M.$$

OSS.: Si può vedere che questa definizione è coerente con quella data precedentemente: cioè, un A-modulo graduato M è Cohen-Macaulay se e solo se $M_{\mathfrak{p}}$ è Cohen-Macaulay per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ such that $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

Corollario (Purezza di Macaulay, versione graduata): Se M è Cohen-Macaulay, allora

$$\dim A/\mathfrak{p} = \dim M \quad \forall\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M).$$

OSS.: Sia $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello di polinomi in n variabili sul campo K. Allora S è Cohen-Macaulay, infatti:

(i) $\dim S = n$;

(ii) $\operatorname{depth}(S) = n$, poiché $x_1, \ldots, x_n$ è una sequenza S-regolare contenuta in $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

ESEMPIO: Consideriamo l'ideale

$$I = (xy, xz) = (x) \cap (y, z) \subseteq K[x, y, z] = S.$$

Allora $\operatorname{Ass}_S(I) = \operatorname{Min}(I) = \{(x), (y, z)\}$ e

$$\dim S/I = \max\{\dim S/(x), \dim S/(y, z)\} = 2.$$

Però $\dim S/(y, z) = \dim K[x] = 1 < 2 = \dim S/I$, quindi S/I non è Cohen-Macaulay per la purezza di Macaulay.

Qualche considerazione geometrica

Per un po' di slides assumeremo $K = \overline{K}$:

PROP.: Sia I un ideale omogeneo in $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ tale che S/I è Cohen-Macaulay. Allora, tutte le componenti irriducibili di $\mathcal{Z}_+(I) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ hanno la stessa dimensione, cioè $\dim S/I - 1$.

Dimostrazione: Ogni componente irriducibile di $\mathcal{Z}_+(I)$ è della forma $\mathcal{Z}_+(\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(I)$. Siccome $\mathrm{Min}(I) \subseteq \mathrm{Ass}_S(I)$, per la purezza di Macaulay:

$$\dim \mathcal{Z}_+(\mathfrak{p}) = \dim S/\mathfrak{p} - 1 = \dim S/I - 1.$$

$\square$

OSSERVAZIONI UTILI ALLA COMPRENSIONE DELLA PROVA DEL PROSSIMO TEOREMA

:

(i) Se I e J sono ideali di un anello A, allora;

$$\mathrm{Hom}_A(A/I, A/J) \cong 0 :_{A/J} \frac{I+J}{J},$$

con mappa $\mathrm{Hom}_A(A/I, A/J) \ni f \mapsto f(1) \in 0 :_{A/J} \frac{I+J}{J}$.

(ii) Se I e J sono ideali omogenei di un anello graduato A, allora $J :_A I$ è omogeneo.

TEOREMA (Hartshorne): Sia I un ideale omogeneo in $S = K[x_1, \dots, x_n]$ tale che $\operatorname{depth}(S/I) \geq 2$. Allora, $X = \mathcal{Z}_+(I) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ è connesso.

Dimostrazione: Per assurdo, supponiamo che esistano due chiusi di Zariski $X_1 = \mathcal{Z}_+(I_1)$ e $X_2 = \mathcal{Z}_+(I_2)$ che disconnettano X. Allora:

(i) $\sqrt{I_1} \supsetneq \sqrt{I} \subsetneq \sqrt{I_2}$ $(X_1 \subsetneq X \supsetneq X_2)$;

(ii) $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I}$ $(X_1 \cup X_2 = X)$;

(iii) $\sqrt{I_1 + I_2} = \mathfrak{m}$ $(X_1 \cap X_2 = \emptyset)$;

Possiamo supporre che $I_1 \cap I_2 \subseteq I$; altrimenti, grazie a (ii), esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $I_1^N \cap I_2^N \subseteq I$, e basterà rimpiazzare I_i con I_i^N.

L'idea è considerare la sequenza esatta:

$$0 \to S/(I_1 \cap I_2) \xrightarrow{\alpha} S/I_1 \oplus S/I_2 \xrightarrow{\beta} S/(I_1 + I_2) \to 0$$

(i) $\alpha(f(\operatorname{mod} I_1 \cap I_2)) = (f(\operatorname{mod} I_1), -f(\operatorname{mod} I_2))$;

(ii) $\beta((g(\operatorname{mod} I_1), h(\operatorname{mod} I_2))) = (g + h)(\operatorname{mod} I_1 + I_2)$.

Il funtore $\operatorname{Hom}_S(-, A)$, dove $A = S/I$, induce la sequenza esatta lunga:

$$0 \to \operatorname{Hom}_S(S/(I_1 + I_2), A) \to \operatorname{Hom}_S(S/I_1 \oplus S/I_2, A) \to \\ \operatorname{Hom}_S(S/(I_1 \cap I_2), A) \to \operatorname{Ext}^1_S(S/(I_1 + I_2), A) \to \dots$$

Siccome $\sqrt{I_1 + I_2} = \mathfrak{m}$, abbiamo che

$$\operatorname{grado}(I_1 + I_2, A) = \operatorname{grado}(\mathfrak{m}, A) \geq 2,$$

per cui

$$\operatorname{Hom}_S(S/(I_1 + I_2), A) = \operatorname{Ext}^1_S(S/(I_1 + I_2), A) = 0.$$

Ma allora otteniamo un isomorfismo di S-moduli:

$$\operatorname{Hom}_S(S/I_1 \oplus S/I_2, A) \cong \operatorname{Hom}_S(S/(I_1 \cap I_2), A)$$

Il funtore $\mathrm{Hom}_S(-, A)$, dove $A = S/I$, induce la sequenza esatta lunga:

$$0 \to \mathrm{Hom}_S(S/(I_1 + I_2), A) \to \mathrm{Hom}_S(S/I_1 \oplus S/I_2, A) \to \mathrm{Hom}_S(S/(I_1 \cap I_2), A) \to \mathrm{Ext}^1_S(S/(I_1 + I_2), A) \to \dots$$

Siccome $\sqrt{I_1 + I_2} = \mathfrak{m}$, abbiamo che

$$\mathrm{grado}(I_1 + I_2, A) = \mathrm{grado}(\mathfrak{m}, A) \geq 2,$$

per cui

$$\mathrm{Hom}_S(S/(I_1 + I_2), A) = \mathrm{Ext}^1_S(S/(I_1 + I_2), A) = 0.$$

Ma allora otteniamo un isomorfismo di S-moduli:

$$\mathrm{Hom}_S(S/I_1, A) \oplus \mathrm{Hom}_S(S/I_2, A) \cong \mathrm{Hom}_S(S/(I_1 \cap I_2), A)$$

Osserviamo che, poiché $I_1 \cap I_2 \subseteq I$, si ha:

$$\mathrm{Hom}_S(S/(I_1 \cap I_2), S/I) \cong S/I = A.$$

Dunque nella slide precedente abbiamo visto che c'è un isomorfismo di S-moduli:

$$\mathrm{Hom}_S(S/I_1, A) \oplus \mathrm{Hom}_S(S/I_2, A) \xrightarrow{\widetilde{\alpha^*}} A$$

Facendo attenzione alle mappe coinvolte, si può vedere che l'isomorfismo precedente è così definito:

$$\mathrm{Hom}_S(S/I_1, A) \oplus \mathrm{Hom}_S(S/I_2, A) \ni (\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi_1(1) - \phi_2(1) \in A.$$

Naturalmente, $\phi_1(1)$ deve appartenere a:

$$0 :_A \overline{I_1} \subseteq A,$$

che è un ideale omogeneo di A. Siccome $\overline{I_1} \neq 0$, abbiamo:

$$0 :_A \overline{I_1} \subseteq \bigoplus_{i>0} A_i.$$

Analogamente:

$$0 :_A \overline{I_2} \subseteq \bigoplus_{i>0} A_i.$$

Allora

$$\mathrm{Im}(\widetilde{\alpha^*}) \subseteq 0 :_A \overline{I_1} \ + \ 0 :_A \overline{I_2} \subseteq \bigoplus_{i>0} A_i \subsetneq A,$$

quindi $\widetilde{\alpha^*}$ non è surgettivo, che è una contraddizione. □

Una conseguenza interessante è il seguente:

COROLLARIO: Sia $0 \leq c < n$ e

$$X = \bigcap_{i=1}^{c} H_i \subseteq \mathbb{P}^n$$

dove gli H_i sono ipersuperfici $\mathcal{Z}_+(f_i)$. Se $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^n} X = c$, allora X è connesso.

Dimostrazione: La condizione $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}^n} X = c$ significa che

$$I = (f_1, \ldots, f_c) \subseteq S = K[x_0, \ldots, x_n]$$

ha altezza c. Siccome S è Cohen-Macaulay, allora $f_1, \ldots, f_c$ è una sequenza S-regolare, dunque S/I è Cohen-Macaulay di dimensione $n + 1 - c \geq 2$. Allora $X = \mathcal{Z}_+(I)$ è connesso grazie al teorema di Hartshorne. $\square$

Sorprendentemente, il corollario precedente si può dimostrare senza l'ipotesi sulla codimensione:

TEOREMA: Se $c < n$, il luogo degli zeri di c polinomi omogenei in $\mathbb{P}^n$ è connesso.

La dimostrazione del teorema di sopra è al di fuori della portata di questo corso.È comunque interessante ricordare un risultato collegato di Eisenbud ed Evans:

TEOREMA: Ogni chiuso di Zariski in $\mathbb{P}^n$ può essere espresso come il luogo degli zeri di n polinomi omogenei.

Come ultima cosa su questi argomenti, enunciamo la seguente congettura, ancora completamente aperta, di Hartshorne:

CONGETTURA: Ogni chiuso di Zariski connesso di $\mathbb{P}^n$ può essere espresso come il luogo degli zeri di $c < n$ polinomi omogenei.

Rimettiamo i piedi per terra!

ESEMPI: 1. Esibiamo delle classi larghe di anelli Cohen-Macaulay:

(i) Ogni anello Artiniano A è ovviamente Cohen-Macaulay (perché $\mathrm{depth}(A_{\mathfrak{p}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) = 0$ per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$);

(ii) Ogni dominio Noetheriano di dimensione 1 è Cohen-Macaulay (perché $A_{\mathfrak{m}}$ è un dominio locale di dimensione 1 per ogni massimale $\mathfrak{m}$ (in particolare, ogni elemento non nullo di $A_{\mathfrak{m}}$ è $A_{\mathfrak{m}}$-regolare);

(iii) se $S = K[x_1, \dots, x_n]$ e I è un ideale generato da $\mathrm{ht}(I)$ elementi, allora S/I è Cohen-Macaulay.

2. Consideriamo l'ideale

$$I = (xz, xw, yz, yw) = (x, y) \cap (z, w) \subseteq K[x, y, z, w].$$

Il luogo degli zeri $\mathcal{Z}_+(I) \subset \mathbb{P}^3$ consiste nelle due rette sghembe:

$$\{x = y = 0\} \bigcup \{z = w = 0\},$$

che non è connesso. Allora $\mathrm{depth}(S/I) < 2 = \dim(S/I)$, per cui S/I non è Cohen-Macaulay.

3. Abbiamo già visto tanti anelli Cohen-Macaulay che non sono domini. Ora facciamo un esempio di un dominio che non è Cohen-Macaulay: Consideriamo

$$A = K[s^4, s^3t, st^3, t^4] \subseteq R = K[s^4, s^3t, s^2t^2, st^3, t^4] \subseteq K[s,t].$$

Notiamo che sia A che R hanno dimensione di Krull 2 (ad esempio perché s^4 e t^4 sono algebricamente indipendenti su K). Sia C il conucleo dell'inclusione di A-moduli $A \hookrightarrow R$:

$$0 \to A \to R \to C \to 0.$$

Osserviamo che $C \cong \langle s^2t^2 \rangle \cong K$, quindi $\mathrm{depth}(C) = \dim(C) = 0$. Per la proposizione sul comportamento del grado per sequenze esatte corte

$$0 \geq \min\{\mathrm{depth}(A) - 1, \mathrm{depth}(R)\},$$

che siccome $\mathrm{depth}(R) \geq 1$, implica $\mathrm{depth}(A) = 1 < 2 = \dim A$.

Se M è un A-modulo graduato e finitamente generato, di dimensione d, ricordiamo che esiste un (unico) polinomio $h_M \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tale che $h_M(1) \neq 0$ e vale:

$$\mathrm{HS}_M(t) = \frac{h_M(t)}{(1-t)^d}.$$

LEMMA: Se M è un A-modulo graduato e finitamente generato e $a \in A_1$ è un elemento M-regolare, allora:

$$h_M(t) = h_{M/aM}(t).$$

Dimostrazione: Consideriamo la sequenza esatta:

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot a} M \to M/aM \to 0.$$

In particolare ci sono sequenze esatte di K-spazi vettoriali:

$$0 \to M_{i-1} \xrightarrow{\cdot a} M_i \to (M/aM)_i \to 0 \quad \forall\ i \in \mathbb{Z}.$$

Dunque $M_i \cong M_{i-1} \oplus (M/aM)_i$ come K-spazi vettoriali, perciò:

$$\mathrm{HF}_{M/aM}(i) = \mathrm{HF}_M(i) - \mathrm{HF}_M(i-1).$$

Ma allora:

$$\mathrm{HS}_{M/aM}(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\mathrm{HF}_M(i) - \mathrm{HF}_M(i-1))t^i = \mathrm{HS}_M(t) - t\cdot\mathrm{HS}_M(t) = (1-t)\cdot\mathrm{HS}_M(t).$$

$\dim M = d \Rightarrow \dim M/aM = d-1$ perché a è M-regolare, per cui:

$$\frac{h_{M/aM}(t)}{(1-t)^{d-1}} = \mathrm{HS}_{M/aM}(t) = (1-t)\cdot\mathrm{HS}_M(t) = \frac{h_M(t)}{(1-t)^{d-1}}$$

$\square$

OSS: Si può dimostrare che, se il campo K è infinito e M è un A-modulo graduato e finitamente generato di profondità k, allora si può trovare una sequenza M-regolare di lunghezza k dentro A_1.

COROLLARIO: Se M è un A-modulo Cohen-Macaulay, allora i coefficienti dell' h-polinomio h_M sono positivi.

Dimostrazione: Volendo ci si può ridurre a considerare K infinito, ma per semplicità assumiamolo in partenza. Allora, se $\dim M = n$, possiamo trovare una sequenza M-regolare $a_1, \ldots, a_n$ di forme lineari (elementi di A_1). Per il lemma precedente,

$$h_M = h_{M/(a_1,\ldots,a_n)M}$$

$\dim M/(a_1, \ldots, a_n)M = 0 \Rightarrow h_{M/(a_1,\ldots,a_n)M} = \mathrm{HS}_{M/(a_1,\ldots,a_n)M}$; dunque i coefficienti di $h_{M/(a_1,\ldots,a_n)M}$, essendo dimensioni di K-spazi vettoriali, sono positivi. □

ESEMPIO: Si può vedere con qualsiasi programma d algebra (Macaulay2, Singular, Cocoa) che l'ideale:

$I = (x_1x_4, x_1x_6, x_1x_7, x_2x_3, x_2x_7, x_2x_8, x_3x_5, x_3x_6, x_4x_5, x_4x_8, x_6x_8, x_5x_7)$

di $S = K[x_1, \ldots, x_8]$ ha serie di Hilbert:

$$\mathrm{HS}_{S/I}(t) = \frac{1 + 5t + 3t^2 - t^3}{(1-t)^3},$$

quindi S/I non è Cohen-Macaulay.

ESEMPIO: Sia $S = K[x,y]$, $I = (x^2, xy)$ e $A = S/I$. Si noti che:

- $A_0 = K$;
- $A_1 = \langle x, y \rangle$;
- $A_k = \langle y^k \rangle \quad \forall \ k \geq 2$.

Dunque

$$\mathrm{HS}_A(t) = 1 + 2t + \sum_{k \geq 2} t^k = 1 + 2t + t^2 \sum_{k \geq 0} t^k =$$
$$1 + 2t + \frac{t^2}{1-t} = \frac{1 + t - t^2}{1-t}$$

Dunque A non è Cohen-Macaulay (già lo sapevamo perché $(x,y) \in \mathrm{Ass}_S(A)$).

Il complesso di Koszul

Dato un A-modulo M, la sua algebra tensoriale è l'anello graduato (non commutativo):

$$T(M) := \bigoplus_{i \geq 0} M^{\otimes^i},$$

dove $M^{\otimes^i}$ significa M tensorizzato con se stesso i volte.

DEF.: L' algebra esterna di un A-modulo M è:

$$\bigwedge M := T(M)/J,$$

dove J è l'ideale destro e sinistro generato da $\{m \otimes m : m \in M\}$. La classe di un elemento $m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \in T(M)$ viene denotata con $m_1 \wedge \cdots \wedge m_i$

OSS.: Siccome $0 = (m_1 + m_2) \wedge (m_1 + m_2) = m_1 \wedge m_1 + m_1 \wedge m_2 + m_2 \wedge m_1 + m_2 \wedge m_2 = m_1 \wedge m_2 + m_2 \wedge m_1$, si ha che:

$$m_1 \wedge m_2 = -m_2 \wedge m_1.$$

Quando $F \cong A^n$ è un A-modulo libero, allora l'algebra esterna $\bigwedge F$, come A-modulo, è isomorfa a:

$$\bigoplus_{i=0}^{n} A^{\binom{n}{i}}.$$

essendo $\bigwedge^k F := (\bigwedge F)_k$ l' A-modulo libero che ha come base:

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n,$$

dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di F.

La struttura moltiplicativa di $\bigwedge F$ è data semplicemente da:

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \wedge (e_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{k+h}}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{i_{k+1}, \ldots i_{k+h}\} \neq \emptyset, \\ (-1)^\sigma e_{i_{\sigma(1)}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\sigma(h+k)}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove σ è l'unica permutazione di $k + h$ elementi tale che

$$i_{\sigma(1)} < i_{\sigma(2)} < \ldots < i_{\sigma(h+k)}.$$

DG-algebre

DEF: Un' algebra graduata $C = \bigoplus_{i \geq 0} C_i$ si dice grado-commutativa se, per ogni $u \in C_i$ e $v \in C_j$, si ha che:

$$(1) \quad uv = (-1)^{ij} vu \qquad \text{e} \qquad (2) \; u^2 = 0 \;\; \text{se } i \text{ è dispari}$$

OSS.: La condizione (2) è implicata da (1) se 2 non è uno zero-divisore in C.

ESEMPI: Le seguenti sono algebre grado-commutative:

(i) $C = \bigwedge M$, dove M è un A-modulo;

(ii) $C = \bigoplus_{i \geq 0} C_i$, dove $C_0 = A$ è un anello commutativo, e $C_i = 0 \;\; \forall \; i > 0$. In tal caso, diciamo che C è concentrata in grado 0.

DEF: Un' algebra grado-commutativa C è una DG-algebra se esiste un omorfismo di gruppi abeliani $\partial : C \to C$ tale che:

(i) $\partial(C_i) \subseteq C_{i-1} \quad \forall\ i \in \mathbb{N}$;

(ii) $\partial^2 = 0$;

(iii) $\partial(uv) = \partial(u)v + (-1)^i u\partial(v) \quad \forall\ u \in C_i$.

OSS: si noti che ∂ è un omomorfismo di C_0-moduli.

DEF: Chiamiamo gli elementi dei C_0-moduli $Z(C) = \mathrm{Ker}(\partial) \subseteq C$ e $B(C) = \mathrm{Im}(\partial) \subseteq C$, rispettivamente, cicli e bordi. Il gruppo quoziente $H(C) = Z(C)/B(C)$ è l'omologia di C.

OSS: Grazie alla proprietà (iii) $Z(C)$ è un' algebra grado-commutativa e $B(C)$ è un ideale (sia destro che sinistro) omogeneo di $Z(C)$. Dunque, $H(C)$ eredita da C la struttura di algebra grado-commutativa.

ESEMPIO: Un' algebra grado-commutativa C concentrata in grado 0 è una DG-algebra ($\partial = 0$).

DEF.: Sia A un anello commutativo e $a_1, \dots, a_n$ elementi di A. Il complesso di Koszul associato a $a_1, \dots, a_n$ è la DG-algebra:

$$K(a_1, \dots, a_n; A) = \bigwedge A^n, \quad \text{dove} \quad \partial(e_i) = a_i$$

(qui $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di A^n come A-modulo).

OSS.: Basta specificare soltanto come agisce ∂ su $K(a_1, \dots, a_n; A)_1$ perché $K(a_1, \dots, a_n; A)$ è generata come A-algebra in grado 1 e dunque la terza proprietà delle DG-algebre e il fatto che ∂ sia una mappa di gruppi abeliani ci dice come agisce ∂ sugli elementi di grado più alto.

OSS.: Verifichiamo che $\partial^2 = 0$ è soddisfatta. Siccome ∂ è un omomorfismo di A-moduli, basta verificare che $\partial^2(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) = 0$ per ogni $s = 1, \ldots, n$ e $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$.

Se $s = 1$, $\partial^2(e_{k_1}) \in K(a_1, \ldots, a_n; A)_{-1} = 0$. Se $s > 1$,

$$\begin{aligned}
\partial^2(e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) = \partial(a_{k_1} e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s} - e_{k_1} \wedge \partial(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s})) = \\
\partial(a_{k_1} e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) - \partial(e_{k_1} \wedge \partial(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s})) = \\
a_{k_1}\partial(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) - a_{k_1}\partial(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) + e_{k_1} \wedge \partial^2(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) = \\
a_{k_1}\partial(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) - a_{k_1}\partial(e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}) + 0 = 0
\end{aligned}$$

OSS: Vediamo che, se

$$u = e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_s} \in K(a_1, \dots, a_n; A)_s,$$

allora

$$\partial(u) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} a_{k_i} e_{k_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{k_i}} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}.$$

La formula è sicuramente vera per $s = 1$, quindi procediamo per induzione supponendo di averla dimostrata per $s - 1$.

Chiamando $v = e_{k_2} \wedge \cdots \wedge e_{k_s} \in K(a_1, \dots, a_n; A)_{s-1}$, abbiamo che:

$$\partial(u) = \partial(e_{k_1} \wedge v) = \partial(e_{k_1})v - e_{k_1} \wedge \partial(v) =$$

$$a_{k_1} v - e_{k_1} \wedge \left(\sum_{i=2}^{s} (-1)^{i} a_{k_i} e_{k_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{k_i}} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} a_{k_i} e_{k_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{k_i}} \wedge \cdots \wedge e_{k_s}$$

DEF.: Sia A un anello commutativo, $a_1, \ldots, a_n$ elementi di A e M un A-modulo. Il complesso di Koszul associato a $a_1, \ldots, a_n$ a coefficienti in M è definito come:

$$K(a_1, \ldots, a_n; M) = K(a_1, \ldots, a_n; A) \otimes_A M.$$

OSS.: Poiché, come A-modulo, vale la decomposizione $K(a_1, \ldots, a_n; A) = \bigoplus_{i=0}^n K(a_1, \ldots, a_n; A)_i$, abbiamo:

$$K(a_1, \ldots, a_n; M) = \bigoplus_{i=0}^{n} (K(a_1, \ldots, a_n; A)_i \otimes_A M)$$

Con $Z(a_1, \ldots, a_n; M)$, $B(a_1, \ldots, a_n; M)$ e $H(a_1, \ldots, a_n; M)$ denotiamo, rispettivamente, $\mathrm{Ker}(\partial \otimes 1_M)$, $\mathrm{Im}(\partial \otimes 1_M)$ e $\dfrac{Z(a_1, \ldots, a_n; M)}{B(a_1, \ldots, a_n; M)}$.

L' A-modulo $H(a_1, \ldots, a_n; M)$ si chiama l' omologia di Koszul associata a $a_1, \ldots, a_n$ a coefficienti in M.

OSS.: Gli oggetti che abbiamo introdotto non sono soltanto A-moduli:

(i) $K(a_1, \ldots, a_n; A)$, $Z(a_1, \ldots, a_n; A)$ e $H(a_1, \ldots, a_n; A)$ sono algebre grado-commutative;

(ii) $K(a_1, \ldots, a_n; M)$ è un $K(a_1, \ldots, a_n; A)$-modulo graduato;

(iii) $Z(a_1, \ldots, a_n; M)$ è uno $Z(a_1, \ldots, a_n; A)$-modulo graduato.

(iv) $H(a_1, \ldots, a_n; M)$ è un $H(a_1, \ldots, a_n; A)$-modulo graduato.

OSS: Il complesso di Koszul $K(a_1, \ldots, a_n; M)$ si chiama così perche, se ci dimentichiamo della sua struttura di $K(a_1, \ldots, a_n; A)$-modulo, esso è un complesso di A-moduli $K_\bullet$ dove, $\forall\ i = 0, \ldots, n$:

(i) $K_i = K(a_1, \ldots, a_n; M)_i = (\bigwedge^i A^n) \otimes_A M \cong M^{\binom{n}{i}}$;

(ii) $\partial_i : K_i \to K_{i-1}$ è la restrizione di $\partial \otimes 1_M$ a $K(a_1, \ldots, a_n; M)_i$.

Quindi l'omologia di Koszul è l'omologia del complesso $K_\bullet$, ragion per cui d'ora in poi useremo la notazione:

$$H_i(a_1, \ldots, a_n; M) := H(a_1, \ldots, a_n; M)_i$$

La struttura dell'omologia di Koszul a coefficienti in M come $K(a_1, \ldots, a_n; A)$-modulo è però utile e non va dimenticata.

ESEMPI: Sia M un A-modulo:

(i) Se $a \in A$, il complesso di A-moduli $K(a; M)$ è semplicemente:

$$M \xrightarrow{\cdot a} M.$$

(ii) Se $a_1, a_2, a_3 \in A$, il complesso di A-moduli $K(a_1, a_2, a_3; M)$ è:

$$M \xrightarrow{\partial_3 \otimes 1_M} M^3 \xrightarrow{\partial_2 \otimes 1_M} M^3 \xrightarrow{\partial_1 \otimes 1_M} M$$

dove:

- $(\partial_1 \otimes 1_M)((m_1, m_2, m_3)) = a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3.$
- $(\partial_2 \otimes 1_M)((m_{12}, m_{13}, m_{23})) = (-a_2 m_{12} - a_3 m_{13}, a_1 m_{12} - a_3 m_{23}, a_1 m_{13} + a_2 m_{23}).$
- $(\partial_3 \otimes 1_M)(m_{123}) = (a_3 m_{123}, -a_2 m_{123}, a_1 m_{123}).$

LEMMA: Se $I = (a_1, \ldots, a_n) \subseteq A$ e M un A-modulo, allora:

$$H_0(a_1, \ldots, a_n; M) \cong M/IM \quad \text{e} \quad H_n(a_1, \ldots, a_n; M) \cong 0 :_M I.$$

Dimostrazione: Essendo $- \otimes_A M$ esatto a destra, abbiamo:

$$\mathrm{Coker}(\partial_1 \otimes 1_M) \cong \mathrm{Coker}(\partial_1) \otimes_A M = A/I \otimes_A M \cong M/IM.$$

Il secondo isomorfismo sussiste perché $H_n(a_1, \ldots, a_n; M)$ è il nucleo della mappa $M \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_M} M^n$ che manda $m \in M$ in:

$$((-1)^{n+1} a_n m, \ \ (-1)^n a_{n-1} m, \ \ \ldots, \ \ a_1 m) \in M^n \qquad \square$$

PROP.: Sia $I = (a_1, \ldots, a_n) \subseteq A$ e M un A-modulo. Allora $I \cdot H_i(a_1, \ldots, a_n; M) = 0 \ \ \forall \ i = 0, \ldots, n$.

Dimostrazione: $H(a_1, \ldots, a_n; M)$ è un $H(a_1, \ldots, a_n; A)$-modulo graduato. In particolare, dunque, $H_i(a_1, \ldots, a_n; M)$ ha una struttura di modulo su $H_0(a_1, \ldots, a_n; A) = A/I$ compatibile con quella di A-modulo. $\square$

Dato un elemento $a \in A$ e un A-modulo M, per definizione a è M-regolare se e solo se $H_i(a; M) = 0 \quad \forall\ i > 0$.

La relazione fra sequenze regolari e annullamenti di omologie di Koszul, come ci apprestiamo a vedere, vale più in generale. A tale scopo, però, avremo bisogno di innescare un qualche ragionamento induttivo sull'omologia di Koszul: non essendo l'omologia di Koszul un funtore derivato, non abbiamo la solita sequenza esatta lunga, dunque bisogna introdurre un nuovo strumento....

Prodotto tensore di complessi

DEF.: Dati due complessi di A-moduli $M_\bullet$ e $N_\bullet$, il loro prodotto tensore è il complesso di A-moduli $(M \otimes N)_\bullet$ definito come:

$$(M \otimes N)_k = \bigoplus_{i+j=k} M_i \otimes_A N_j$$

e differenziale dato da:

$$d_k^{M\otimes N}(m \otimes n) = d_i^M(m) \otimes n + (-1)^i m \otimes d_j^N(n) \quad \forall \; m \in M_i, \; n \in N_j.$$

ESERCIZI: 1) Verificare che $d_k^{M\otimes N} \circ d_{k-1}^{M\otimes N} = 0 \quad \forall \; k \in \mathbb{Z}$.
2) Sfruttando l'isomorfismo $A \otimes_A A \cong A$, verificare che, se $a_1, \ldots, a_n \in A$, c'è un isomorfismo di complessi di A-moduli:

$$K(a_1, \ldots, a_n; A) \cong K(a_1; A) \otimes K(a_2; A) \otimes \cdots \otimes K(a_n; A)$$

PROP.: C'è un isomorfismo di complessi di A-moduli:

$$(M \otimes N)_\bullet \cong (N \otimes M)_\bullet$$

Dimostrazione: Basta considerare gli isomorfismi di A-moduli:

- se $p+q$ è dispari, $M_p \otimes_A N_q \xrightarrow{f_{p,q}} N_q \otimes_A M_p$ dove $f_{p,q}(m \otimes n) = n \otimes m$.
- se $p+q$ è pari, $M_p \otimes_A N_q \xrightarrow{g_{p,q}} N_q \otimes_A M_p$ dove $g_{p,q}(m \otimes n) = (-1)^p n \otimes m$.

Allora gli isomorfismi di A-moduli:

$$(M \otimes N)_k \xrightarrow{\oplus_{p+q=k} f_{p,q}} (N \otimes M)_k \quad \text{se } k \text{ è dispari}$$

$$(M \otimes N)_k \xrightarrow{\oplus_{p+q=k} g_{p,q}} (N \otimes M)_k \quad \text{se } k \text{ è pari}$$

danno l'isomorfismo di complessi desiderato. □

LEMMA: Sia $a \in A$ e $C_\bullet$ un complesso di A-moduli. Allora c'è una sequenza esatta corta di complessi:

$$0 \to C_\bullet \to (C \otimes K(a; A))_\bullet \to C'_\bullet \to 0,$$

dove $C'_\bullet$ è $C_\bullet$ sfasato di 1, cioè: $C'_p = C_{p-1}$ e $d_p^{C'} = d_{p-1}^{C}$. La sequenza esatta lunga indotta ha la forma:

$$\cdots \to H_p(C_\bullet) \to H_p((C \otimes K(a; A))_\bullet) \to H_{p-1}(C_\bullet) \xrightarrow{(-1)^{p-1}a} H_{p-1}(C_\bullet) \to \cdots$$

Dimostrazione: Essendo $K(a; A)$ il complesso $A \xrightarrow{\cdot a} A$, $(C \otimes K(a; A))_p = C_p \oplus C_{p-1} \ \forall \ p \in \mathbb{Z}$, e

$$d_p^{C \otimes K(a;A)}((x, y)) = (d_p^C(x) + (-1)^{p-1} ay, d_{p-1}^C(y)).$$

È immediato verificare che le sequenze esatte corte $0 \to C_p \xrightarrow{\iota} C_p \oplus C_{p-1} \xrightarrow{\pi} C_{p-1} \to 0$ danno luogo alla sequenza esatta corta di complessi desiderata (l'unica cosa da controllare è che effettivamente si formino morfismi di complessi).

Ovviamente $H_{p-1}(C_\bullet) = H_p(C'_\bullet)$, quindi la mappa

$$H_{p-1}(C_\bullet) \to H_{p-1}(C_\bullet)$$

è il connettivo proveniente dalla sequenza esatta corta

$$0 \to C_\bullet \to (C \otimes K(a; A))_\bullet \to C'_\bullet \to 0,$$

che è definito tramite la sequenza di passaggi:

$$H_p(C'_\bullet) \ni y \mapsto (0, y) \in \pi^{-1}(y) \mapsto (0 + (-1)^{p-1} ay, 0) \mapsto \iota^{-1}((-1)^{p-1} ay, 0)) = (-1)^{p-1} ay \in H_{p-1}(C_\bullet)$$

□

OSS.: Poiché, per $a_1, \ldots, a_n \in A$ e M è un A-modulo:

$$\begin{aligned} K(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \otimes K(a_n; A) &= K(a_1, \ldots, a_{n-1}; A) \otimes_A M \otimes K(a_n; A) \\ &\cong K(a_1, \ldots, a_{n-1}; A) \otimes K(a_n; A) \otimes_A M \cong K(a_1, \ldots, a_n; M) \end{aligned}$$

il precedente lemma fornisce la sequenza esatta:

$$\cdots \to H_p(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \to H_p(a_1, \ldots, a_n; M) \to$$

$$H_{p-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{(-1)^{p-1} a_n} H_{p-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \to \cdots$$

TEOREMA: Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ è una sequenza M-regolare (per qualche A-modulo M), allora $H_i(a_1, \ldots, a_n; M) = 0$ per ogni $i > 0$.

Il viceversa vale se (a) $(A, \mathfrak{m})$ è locale e Noetheriano, M è finitamente generato e $a_1, \ldots, a_n \subseteq \mathfrak{m}$, o (b) A è graduato standard, M è graduato e finitamente generato e $a_1, \ldots, a_n$ sono omogenei di grado positivo, nella seguente forma più forte:

$$H_1(a_1, \ldots, a_n; M) = 0 \Rightarrow a_1, \ldots, a_n \text{ è } M\text{-regolare.}$$

Dimostrazione: Procediamo per induzione su n, avendo già osservato $n = 1$. Se $i \geq 2$, otteniamo dal lemma precedente:

$$H_i(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \to H_i(a_1, \ldots, a_n; M) \to H_{i-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}; M)$$

è esatta

TEOREMA: Se $a_1, \dots, a_n \in A$ è una sequenza M-regolare (per qualche A-modulo M), allora $H_i(a_1, \dots, a_n; M) = 0$ per ogni $i > 0$.

Il viceversa vale se (a) $(A, \mathfrak{m})$ è locale e Noetheriano, M è finitamente generato e $a_1, \dots, a_n \subseteq \mathfrak{m}$, o (b) A è graduato standard, M è graduato e finitamente generato e $a_1, \dots, a_n$ sono omogenei di grado positivo, nella seguente forma più forte:

$$H_1(a_1, \dots, a_n; M) = 0 \Rightarrow a_1, \dots, a_n \text{ è } M\text{-regolare.}$$

Dimostrazione: Procediamo per induzione su n, avendo già osservato $n = 1$. Se $i \geq 2$, otteniamo dal lemma precedente:

$$0 \to H_i(a_1, \dots, a_n; M) \to 0$$

è esatta, dunque $H_i(a_1, \dots, a_n; M) = 0$. Se $i = 1$, sempre dal lemma:

$$0 \to H_1(a_1, \dots, a_n; M) \to H_0(a_1, \dots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{\cdot a_n} H_0(a_1, \dots, a_{n-1}; M)$$

è esatta.

TEOREMA: Se $a_1, \ldots, a_n \in A$ è una sequenza M-regolare (per qualche A-modulo M), allora $H_i(a_1, \ldots, a_n; M) = 0$ per ogni $i > 0$.

Il viceversa vale se (a) $(A, \mathfrak{m})$ è locale e Noetheriano, M è finitamente generato e $a_1, \ldots, a_n \subseteq \mathfrak{m}$, o (b) A è graduato standard, M è graduato e finitamente generato e $a_1, \ldots, a_n$ sono omogenei di grado positivo, nella seguente forma più forte:

$$H_1(a_1, \ldots, a_n; M) = 0 \Rightarrow a_1, \ldots, a_n \text{ è } M\text{-regolare.}$$

Dimostrazione: Procediamo per induzione su n, avendo già osservato $n = 1$. Se $i \geq 2$, otteniamo dal lemma precedente:

$$0 \to H_i(a_1, \ldots, a_n; M) \to 0$$

è esatta, dunque $H_i(a_1, \ldots, a_n; M) = 0$. Se $i = 1$, sempre dal lemma:

$$0 \to H_1(a_1, \ldots, a_n; M) \to M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M \xrightarrow{\cdot a_n} M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M$$

è esatta. Siccome a_n è $M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M$-regolare, l'ultima mappa è iniettiva; il che implica che $H_1(a_1, \ldots, a_n; M) = 0$.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, se siamo nella situazione (a) o (b) e $M \neq 0$, allora $M/(a_1, \ldots, a_n)M \neq 0$. Siccome per ipotesi $H_1(a_1, \ldots, a_n; M) = 0$, dal lemma precedente abbiamo che:

$$H_1(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{\cdot(-a_n)} H_1(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \to H_1(a_1, \ldots, a_n; M)$$

è esatta.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, se siamo nella situazione (a) o (b) e $M \neq 0$, allora $M/(a_1, \dots, a_n)M \neq 0$. Siccome per ipotesi $H_1(a_1, \dots, a_n; M) = 0$, dal lemma precedente abbiamo che:

$$H_1(a_1, \dots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{\cdot(-a_n)} H_1(a_1, \dots, a_{n-1}; M) \to 0$$

è esatta. Poiché M è finitamente generato, anche l' A-modulo $N = H_1(a_1, \dots, a_{n-1}; M)$ lo è. Nel caso (b), N è pure graduato. In particolare possiamo usare Nakayama sia nel caso (a) che nel caso (b), quindi, siccome $a_n N = N$, otteniamo che $N = 0$. Per induzione su n, quindi, $a_1, \dots, a_{n-1}$ è una sequenza M-regolare.

Infine, usando ancora il lemma, la seguente

$$H_1(a_1, \dots, a_n; M) \to H_0(a_1, \dots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{\cdot a_n} H_0(a_1, \dots, a_{n-1}; M)$$

è esatta

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato, se siamo nella situazione (a) o (b) e $M \neq 0$, allora $M/(a_1, \ldots, a_n)M \neq 0$. Siccome per ipotesi $H_1(a_1, \ldots, a_n; M) = 0$, dal lemma precedente abbiamo che:

$$H_1(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \xrightarrow{\cdot(-a_n)} H_1(a_1, \ldots, a_{n-1}; M) \to 0$$

è esatta. Poiché M è finitamente generato, anche l' A-modulo $N = H_1(a_1, \ldots, a_{n-1}; M)$ lo è. Nel caso (b), N è pure graduato. In particolare possiamo usare Nakayama sia nel caso (a) che nel caso (b), quindi, siccome $a_n N = N$, otteniamo che $N = 0$. Per induzione su n, quindi, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ è una sequenza M-regolare.

Infine, usando ancora il lemma, la seguente

$$0 \to M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M \xrightarrow{\cdot a_n} M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M,$$

è esatta, da cui si ha che a_n è $M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M$-regolare. □

Corollario: Siano $a_1, \dots, a_n$ elementi di A e M un A-modulo. Se siamo in una delle seguenti situazioni:

(a) $(A, \mathfrak{m})$ è locale e Noetheriano, M è finitamente generato e $a_1, \dots, a_n \subseteq \mathfrak{m}$;

(b) A è graduato standard, M è graduato e finitamente generato e $a_1, \dots, a_n$ sono omogenei di grado positivo:

allora sono equivalenti:

(i) $a_1, \dots, a_n$ è una sequenza M-regolare;

(ii) $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}$ è una sequenza M-regolare per ogni permutazione σ di n elementi.

Dimostrazione: Grazie al teorema precedente basta dimostrare che:

$$H_1(a_1, \dots, a_n; M) = 0 \Leftrightarrow H_1(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; M) = 0.$$

Questo è vero perché, più in generale, $K(a_1, \dots, a_n; M)$ e $K(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; M)$ sono isomorfi come complessi. Per dimostrare questo basta trovare un isomorfismo di complessi

$$K(a_1, \dots, a_n; A) \cong K(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}; A).$$

Questo segue dal fatto che:

$$K(a_1; A) \otimes K(a_2; A) \otimes \cdots \otimes K(a_n; A) \cong$$
$$K(a_{\sigma(1)}; A) \otimes K(a_{\sigma(2)}; A) \otimes \cdots \otimes K(a_{\sigma(n)}; A)$$

□

OSS.: Se non siamo in ambito locale o graduato, come già osservato precedentemente, il corollario precedente non vale (avevamo considerato $a_1 = x(y-1)$, $a_2 = y$ e $a_3 = z(y-1)$ in $A = K[x, y, z]$: veniva che a_1, a_2, a_3 è A-regolare, ma a_1, a_3, a_2 non lo è).

Corollario: Sia $a_1, \ldots, a_n$ una successione A-regolare. Allora l' A-modulo $M = A/(a_1, \ldots, a_n)$ ha una risoluzione libera:

$$0 \to A \to A^n \to \ldots \to A^{\binom{n}{i}} \to \ldots \to A^n \to A \to M \to 0$$

Dimostrazione: Segue subito dal fatto che:

$$K(a_1, \ldots, a_n; A) \to H_0(a_1, \ldots, a_n; A) \to 0$$

è esatto con $K(a_1, \ldots, a_n; A)_i \cong A^{\binom{n}{i}}$ e $H_0(a_1, \ldots, a_n; A)$ è isomorfo a $A/(a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

OSS.: In particolare, se $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ è un anello di polinomi su un campo K, l' S-modulo $K \cong S/(x_1, \ldots, x_n)$ ha risoluzione proiettiva finita. Il prossimo argomento che affronteremo avrà come conseguenza il fatto che gli anelli di polinomi sono le uniche K-algebre graduate standard A tali che K ha risoluzione proiettiva finita come A-modulo.

Anelli regolari

Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano. Se I è un ideale di A, grazie a Nakayama, qualunque insieme minimale di generatori di I ha la stessa cardinalità

$$\mu(I) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(I/\mathfrak{m}I).$$

Siccome $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A$, l'Hauptidealsatz di Krull implica che $\dim A \leq \mu(\mathfrak{m})$. Quindi abbiamo:

$$\mathrm{depth}(A) \leq \dim A \leq \mu(\mathfrak{m}).$$

Abbiamo già studiato gli anelli A per cui il primo "$\leq$" è un "$=$", cioè gli anelli di Cohen-Macaulay.

DEF.: Un anello locale Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ si dice regolare se $\dim A = \mu(\mathfrak{m})$.

ESEMPI: 1. Un campo K è regolare come anello. Infatti la dimensione di Krull di K è 0 (poiché il suo unico ideale proprio è (0)). Inoltre $\mu((0)) = 0$.

2. Si consideri l'anello $A = K[x]/(x^2)$. Poiché, per ogni $a \in K^*$, $(x + a)(1/a^2 x - 1/a) = 1$, A è locale con unico ideale massimale $(\overline{x})$. Siccome $\dim(A) = 0 < 1 = \mu((\overline{x}))$, A non è regolare.

3. L'anello delle serie formali $A = K[[x_1, \ldots, x_n]]$ è regolare: infatti $\dim(A) = n$ e $\mu((x_1, \ldots, x_n)) = n$.

DEF.: Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello regolare n-dimensionale e $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)$, allora il sistema di parametri $a_1, \dots, a_n$ si dice un sistema regolare di parametri per A.

OSS.: Un sistema regolare di parametri è un sistema di parametri.

LEMMA: Siano $a_1, \dots, a_i$ elementi di un anello regolare $(A, \mathfrak{m})$ di dimensione n. Sono equivalenti:

(i) $a_1, \dots, a_i$ è parte di un sistema regolare di parametri;

(ii) Le classi di $a_1, \dots, a_i$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sono linearmente indipendenti su $A/\mathfrak{m}$.

(iii) $A/(a_1, \dots, a_i)$ è un anello regolare di dimensione $n - i$.

Dimostrazione: (i) $\Rightarrow$ (ii). Siano $a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n$ un sistema di generatori di $\mathfrak{m}$. Poiché le classi di $a_1, \dots, a_n$ generano $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ come $A/\mathfrak{m}$-spazio vettoriale e $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mu(\mathfrak{m}) = n$, le classi di $a_1, \dots, a_i$ in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sono linearmente indipendenti su $A/\mathfrak{m}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Siccome un sistema regolare di parametri è un particolare sistema di parametri, sappiamo che $A/(a_1, \ldots, a_i)$ ha dimensione $n - i$. Se $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n$ è un sistema di generatori di $\mathfrak{m}$, inoltre, le classi di $a_{i+1}, \ldots, a_n$ generano l'ideale massimale di $A/(a_1, \ldots, a_i)$, il quale dunque è un anello regolare.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Prendendo dei rappresentanti $a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ di un sistema regolare di parametri per $A/(a_1, \ldots, a_i)$, ovviamente $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Siccome $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$, scegliamo $a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ in modo che le classi di $a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n$ formino una base di $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Allora $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. $\square$

Prime avoidance (generale): Siano $J, I_1, \ldots, I_m$ ideali di un qualunque anello A tali che:

$$J \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} I_i.$$

Se I_i è primo per ogni $i \geq 3$, allora esiste $j \in \{1, \ldots, m\}$ tale che

$$J \subseteq I_j.$$

Dimostrazione: Se $m = 2$, per assurdo siano $a \in J \setminus I_2$ e $b \in J \setminus I_1$. Allora $a \in I_1$, $b \in I_2$ e $a + b \in I_1 \cup I_2$. Ciò è assurdo.

Se $m > 2$, supponiamo per assurdo che $J \nsubseteq \bigcup_{j \neq i} I_j \ \forall \ i = 1, \ldots, m$. Allora scegliamo $a_i \in J \setminus \bigcup_{j \neq i} I_j$ per ogni i. Quindi

$$a_1 a_2 \cdots a_{m-1} + a_m \in J \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} I_i,$$

e ciò è assurdo. $\square$

TEOREMA: Ogni anello regolare $(A, \mathfrak{m})$ è un dominio.

Dimostrazione: Ragioniamo per induzione su $\dim A = n = \mu(\mathfrak{m})$. Se $n = 0$, allora $\mathfrak{m} = (0)$, quindi A è un campo.

Se $n \geq 1$, siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ i primi minimali di A. Poiché $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{p}_i$ per ogni i e $\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}^2$, grazie al prime avoidance possiamo scegliere

$$a \in \mathfrak{m} \setminus ((\cup_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i) \cup \mathfrak{m}^2).$$

Allora $A/(a)$ è un anello locale regolare di dimensione $n-1$, poiché la classe di a in $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ non è 0. Quindi per induzione $A/(a)$ è un dominio, cioè $(a) \in \mathrm{Spec}(A)$. Sia $i \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $\mathfrak{p}_i \subseteq (a)$. Per ogni $x \in \mathfrak{p}_i$, allora esiste $y \in A$ tale che $x = ya$. Ma siccome $a \notin \mathfrak{p}_i$, allora $y \in \mathfrak{p}_i$, quindi $\mathfrak{p}_i = a\mathfrak{p}_i$. Il lemma di Nakayama implica che $\mathfrak{p}_i = (0)$, quindi A è un dominio. $\square$

TEOREMA: Un sistema regolare di parametri di A è una sequenza A-regolare. In particolare, ogni anello regolare è Cohen-Macaulay.

Dimostrazione: Mettendo insieme quanto detto finora, se $a_1, \dots, a_n$ è un sistema regolare di parametri, allora

$$(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq \dots \subsetneq (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

è una catena di ideali primi. Dalla definizione, allora $a_1, \dots, a_n$ è una successione A-regolare. □

OSS.: Quindi, nella serie di diseguaglianze

$$\operatorname{depth}(A) \leq \dim A \leq \mu(\mathfrak{m}),$$

l'uguaglianza $\dim A = \mu(\mathfrak{m})$ forza, a priori inaspettatamente, ad avere anche l'uguaglianza $\operatorname{depth}(A) = \dim A$. Il viceversa naturalmente è falso, ad esempio abbiamo visto diversi anelli di Cohen-Macaulay che non sono domini.

DEF.: Sia A un anello, M un A-modulo e $P_\bullet$ una risoluzione proiettiva di M. La lunghezza di $P_\bullet$ è definita come:

$$\inf\{h \in \mathbb{N} : P_k = 0 \ \forall \ k > h\}.$$

La dimensione proiettiva di M si definisce come:

$\mathrm{projdim}_A(M) = \min\{\text{lunghezza di una risoluzione proiettiva di } M\}$.

Ricordiamo che in generale gli A-moduli liberi sono particolari A-moduli proiettivi, ma se A è locale le due nozioni coincidono. Per questo motivo parleremo spesso di risoluzioni libere.

Corollario: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello regolare. Allora

$$\mathrm{projdim}(A/\mathfrak{m}) \leq \dim A.$$

Dimostrazione: Sia $n = \dim A$ e $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_n)$. Siccome $a_1, \ldots, a_n$ è una successione A-regolare, quindi il complesso di Koszul $K(a_1, \ldots, a_n; A)$ è una risoluzione libera di $A/\mathfrak{m}$ di lunghezza n. $\square$

Risoluzioni libere minimali

Fissiamo per un po' un anello locale Noetheriano $(A, \mathfrak{m})$ locale, e denotiamo con K il campo residuo $A/\mathfrak{m}$ (che ha una struttura di A-modulo).

DEF.: Una risoluzione libera di un A-modulo M finitamente generato

$$\cdots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

si dice minimale se $\mathrm{Im}(d_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1} \quad \forall \; i \geq 1$.

ESEMPIO: Se $a_1, \ldots, a_n$ è una successione A-regolare, allora $K(a_1, \ldots, a_n; A)$ è una risoluzione libera minimale di $A/(a_1, \ldots, a_n)$, poiché le matrici associate alle mappe di $K(a_1, \ldots, a_n; A)$ hanno entrate in $(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathfrak{m}$.

ESEMPIO: Se $a, b, c \in A$, il complesso di Koszul $K(a, b, c; A)$ si può scrivere come segue:

$$0 \to A \xrightarrow{\begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -b & -c & 0 \\ a & 0 & -c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}} A^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}} A \to 0$$

Se a, b, c è una sequenza A-regolare, $K(a, b, c; A)$ è una risoluzione libera minimale di $A/(a, b, c)$. In generale, le mappe di una risoluzione libera sono sempre rappresentate da matrici (perché tutti i moduli nella risoluzione hanno una base), e la risoluzione è minimale se e solo se le entrate di tutte le matrici stanno in $\mathfrak{m}$.

OSS.: Dato un A-modulo $M \neq 0$ finitamente generato, possiamo sempre trovare una risoluzione libera minimale:

Consideriamo un sistema minimale di generatori $m_1, \dots, m_{\beta_0}$ di M, e scegliamo $F_0 = A^{\beta_0}$ con

$$\epsilon : F_0 \to M$$
$$e_i \mapsto m_i$$

Allora $\mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq \mathfrak{m}F_0$, poiché

$$\mathrm{Ker}(\epsilon)/\mathfrak{m}\,\mathrm{Ker}(\epsilon) \to F_0/\mathfrak{m}F_0 \to M/\mathfrak{m}M \to 0$$

è esatta e $\dim_K(F_0/\mathfrak{m}F_0) = \dim_K(M/\mathfrak{m}M) = \beta_0$. Quindi, comunque scegliamo la mappa $d_1 : F_1 \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq F_0$, essa avrà la proprietà che $\mathrm{Im}(d_1) \subseteq \mathfrak{m}F_0$.

Come M, anche $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ è finitamente generato, dunque scegliamo $F_1 = A^{\beta_1}$ dove β_1 è la cardinalità di un sistema minimale di generatori di $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ e definiamo d_1 di conseguenza, cosicché $\mathrm{Ker}(d_1) \subseteq \mathfrak{m}F_1$. Andando avanti in questa maniera si trova una risoluzione libera minimale di M.

PROP.: Sia $F_\bullet$ una risoluzione libera minimale di un A-modulo M finitamente generato con $F_i \cong A^{\beta_i}$. Allora

$$\beta_i = \dim_K(\mathrm{Tor}_i^A(M,K)).$$

Dimostrazione: Per definizione, $\mathrm{Tor}_i^A(M,K)$ sarà l' i-esima omologia del complesso $F_\bullet \otimes_A K$:

$$\cdots \to F_i/\mathfrak{m}F_i \xrightarrow{\overline{d_i}} F_{i-1}/\mathfrak{m}F_{i-1} \xrightarrow{\overline{d_{i-1}}} \cdots \xrightarrow{\overline{d_1}} F_0/\mathfrak{m}F_0 \to 0.$$

PROP.: Sia $F_\bullet$ una risoluzione libera minimale di un A-modulo M finitamente generato con $F_i \cong A^{\beta_i}$. Allora

$$\beta_i = \dim_K(\mathrm{Tor}_i^A(M,K)).$$

Dimostrazione: Per definizione, $\mathrm{Tor}_i^A(M,K)$ sarà l' i-esima omologia del complesso $F_\bullet \otimes_A K$:

$$\cdots \to K^{\beta_i} \xrightarrow{0} K^{\beta_{i-1}} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} K^{\beta_0} \to 0.$$

Tale omologia è K^{β_i}. $\square$

Grazie al risultato precedente i ranghi dei moduli liberi di una risoluzione minimale di M sono degli invarianti del modulo.

DEF.: Se

$$\cdots \to A^{\beta_i} \to A^{\beta_{i-1}} \to \cdots \to A^{\beta_0} \to M \to 0$$

è una risoluzione libera minimale di un A-modulo finitamente generato M, i numeri $\beta_i(M) = \beta_i$ sono i numeri di Betti di M.

PROP.: Dato un A-modulo finitamente generato M, vale:

$$\mathrm{projdim}(M) = \sup\{i : i \in \mathbb{N} : \beta_i(M) \neq 0\}.$$

Dimostrazione: La diseguaglianza $\leq$ è ovvia. D' altra parte, se $F_\bullet$ è una risoluzione libera di M di lunghezza p, allora per ogni $i > p$ si ha $\mathrm{Tor}_i^A(M, K) = 0$ per ogni $i > p$, da cui $\beta_i(M) = 0 \ \forall \ i > p$. $\square$

Corollario: Se M è un A-modulo finitamente generato, allora:

$$\mathrm{projdim}(M) \leq \mathrm{projdim}(K).$$

Dim.: $\beta_p(M) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Tor}_p^A(M, K) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{projdim}(K) \geq p$. $\square$

Corollario: Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello regolare n-dimensionale, allora:

$$\mathrm{projdim}(K) = n.$$

Dim.: Segue dal fatto che $K(a_1, \ldots, a_n; A)$ è una risoluzione libera minimale di K (dove $a_1, \ldots, a_n$ è un sistema regolare di parametri). In particolare, $\beta_i(K) = \binom{n}{i} \ \ \forall \ i \in \mathbb{N}$. $\square$

LEMMA: Se A è un anello, M un A-modulo, $a \in A$ un elemento M-regolare e

$$N_2 \xrightarrow{\phi_2} N_1 \xrightarrow{\phi_1} N_0 \xrightarrow{\phi_0} M \to 0$$

è una sequenza esatta di A-moduli, allora

$$N_2/aN_2 \xrightarrow{\overline{\phi_2}} N_1/aN_1 \xrightarrow{\overline{\phi_1}} N_0/aN_0 \xrightarrow{\overline{\phi_0}} M/aM \to 0$$

è una sequenza esatta di $A/(a)$-moduli.

Dimostrazione: Siccome $- \otimes_A A/(a)$ è esatto a destra, basta verificare l'esattezza in N_1/aN_1.

Sia $x \in N_1$ tale che $\overline{\phi_1}(\overline{x}) = 0$. Allora $\exists\ y \in N_0 : ay = \phi_1(x)$. Quindi $a\phi_0(y) = \phi_0(ay) = 0$, che poiché a è M-regolare implica $\phi_0(y) = 0$. Allora $\exists\ x' \in N_1 : \phi_1(x') = y$. Dunque $x - ax' \in \mathrm{Ker}(\phi_1)$, cosicché $\exists\ z \in N_2 : \phi_2(z) = x - ax'$. Allora $\overline{\phi_2}(\overline{z}) = \overline{x}$. $\square$

Corollario: Se A è un anello,

$$\ldots \to N_2 \xrightarrow{\phi_2} N_1 \xrightarrow{\phi_1} N_0 \to 0$$

è una sequenza esatta di A-moduli e $a \in A$ è un elemento N_i-regolare per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora

$$\ldots \to N_2/aN_2 \xrightarrow{\overline{\phi_2}} N_1/aN_1 \xrightarrow{\overline{\phi_1}} N_0/aN_0 \to 0$$

è una sequenza esatta di $A/(a)$-moduli.

Dimostrazione: Essendo N_i-regolare, a è pure $\mathrm{Im}(\phi_{i+1})$-regolare. Quindi basta applicare il lemma a tutte le successioni esatte:

$$N_{i+3} \to N_{i+2} \to N_{i+1} \to \mathrm{Im}(\phi_{i+1}) \to 0.$$

□

Corollario: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano e M un A-modulo finitamente generato. Se $a \in \mathfrak{m}$ è M-regolare e A-regolare, allora:

$$\operatorname{projdim}_A(M) = \operatorname{projdim}_{A/(a)}(M/aM)$$

Dimostrazione: Sia $F_\bullet$ una risoluzione libera minimale di M. Allora $F_\bullet \otimes_A A/(a)$ è una risoluzione libera minimale di M/aM poiché a è M-regolare e A^m-regolare per ogni $m \in \mathbb{N}$. $\square$

OSS.: Abbiamo già usato diverse volte che, se F è un funtore A-lineare di A-moduli, M è un A-modulo e $f : M \to M$ è la moltiplicazione per un elemento $a \in A$, allora $F(f) : F(M) \to F(M)$ è ancora la moltiplicazione per a (poiché $F(f) = F(a \cdot 1_M) = a \cdot F(1_M) = a \cdot 1_{F(M)} = \cdot a$).

Ci capiterà di usare il seguente fatto più generale: Una mappa di A-moduli $f : M^p \to M^q$ è rappresentata da una matrice X di taglia $q \times p$ le cui entrate sono mappe di A-moduli $f_{ij} : M \to M$. Allora, se F è un funtore additivo covariante abbiamo che

$$F(f) : F(M)^p \to F(M)^q$$

è rappresentata dalla matrice Y le cui entrate sono $F(f_{ij})$.

Se le mappe f_{ij} sono moltiplicazioni per elementi $a_{ij} \in A$ e F è A-lineare, si ha

$$Y = X = (a_{ij}) \in A^{qp}.$$

Se F è controvariante, vale il discorso analogo con Y che è la trasposta di X.

Il fatto descritto nella slide precedente è utile perché le mappe fra A-moduli liberi (in particolare, quindi, le mappe in una risoluzione libera) sono sempre matrici ad entrate in A, essendo $\mathrm{Hom}_A(A, A) \cong A$. È anche utile osservare che una risoluzione libera è minimale se e solo se le matrici associate alle mappe della risoluzione hanno entrate in $\mathfrak{m}$.

Ad esempio, il complesso di Koszul $K(a_1, a_2, a_3; A)$ ha la forma:

$$0 \to A \xrightarrow{\partial_3} A^3 \xrightarrow{\partial_2} A^3 \xrightarrow{\partial_1} A \to 0$$

(i) $\partial_1 \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3)$;

(ii) $\partial_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -a_2 & -a_3 & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 \\ 0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$

(iii) $\partial_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_3 \\ -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Essendo $- \otimes_A M$ un funtore A-lineare, le mappe in $K(a_1, a_2, a_3; M) = K(a_1, a_2, a_3; A) \otimes_A M$ sono associate alle stesse matrici.

TEOREMA

(Auslander-Buchsbaum): Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale Noetheriano e $M \neq 0$ è un A-modulo finitamente generato di dimensione proiettiva finita, allora:

$$\mathrm{projdim}(M) + \mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(A).$$

Dimostrazione: Innanzitutto ricordiamo che, chiamando $K = A/\mathfrak{m}$:

$$\mathrm{depth}(M) = \min\{i \in \mathbb{N} : \mathrm{Ext}^i_A(K, M) \neq 0\}.$$

Procediamo per induzione su $p = \mathrm{projdim}(M)$. Se $p = 0$, allora $\mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(A)$ perché $M \cong A^{\beta_0}$.

Se $p = 1$, prendiamo una risoluzione libera minimale di M:

$$0 \to A^{\beta_1} \xrightarrow{d} A^{\beta_0} \to M \to 0.$$

La sequenza esatta lunga associata ad $\mathrm{Hom}_A(K, -)$ ha la forma:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i_A(K, A)^{\beta_1} \xrightarrow{d_*} \mathrm{Ext}^i_A(K, A)^{\beta_0} \to \mathrm{Ext}^i_A(K, M) \to \ldots$$

Essendo $\operatorname{Ext}^i_A(K,-)$ un funtore A-lineare, la matrice X associata a d_* è uguale a quella associata a d, in particolare ha entrate in $\mathfrak{m}$. Poiché $\mathfrak{m}\operatorname{Ext}^i_A(K,N)=0$ per ogni A-modulo N, in particolare $d_*=0$. Dunque abbiamo sequenze esatte per ogni $i\geq 0$:

$$0\to \operatorname{Ext}^i_A(K,A)^{\beta_0}\to \operatorname{Ext}^i_A(K,M)\to \operatorname{Ext}^{i+1}_A(K,A)^{\beta_1}\to 0.$$

Allora $\operatorname{depth}(M)=\operatorname{depth}(A)-1$.

Sia $p>1$, e consideriamo una risoluzione libera minimale di M:

$$0\to F_p\to\ldots\to F_1\to F_0\xrightarrow{\epsilon} M\to 0.$$

Siccome

$$0\to F_p\to\ldots\to F_1\to \operatorname{Ker}(\epsilon)\to 0$$

è una risoluzione libera minimale di $N=\operatorname{Ker}(\epsilon)$, abbiamo che $\operatorname{projdim}(N)=p-1$.

Per induzione, quindi, abbiamo:

$$\mathrm{depth}(N) = \mathrm{depth}(A) - p + 1 < \mathrm{depth}(A).$$

Allora la sequenza esatta corta:

$$0 \to N \to A^{\beta_0} \to M \to 0$$

induce la sequenza esatta lunga:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^i_A(K,A)^{\beta_0} \to \mathrm{Ext}^i_A(K,M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(K,N) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_A(K,A)^{\beta_0} \to \ldots$$

da cui $\mathrm{depth}(M) = \mathrm{depth}(N) - 1$. $\square$

OSS: Dati due ideali I e J di un anello A, allora:

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

Infatti, l'omomorfismo di A-moduli $I \xrightarrow{\phi} (I+J)/J$ tale che $\phi(f) = \overline{f}$ è chiaramente surgettivo. Inoltre $\mathrm{Ker}(\phi) = I \cap J$. $\square$

LEMMA: Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale Noetheriano e $a \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Allora l' A-modulo $\mathfrak{m}/(a)$ è un addendo diretto di $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$.

Dimostrazione: La mappa di A-moduli $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{m}/(a)$ è quella ovvia, bisogna trovare $\iota : \mathfrak{m}/(a) \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$ tale che $\pi \circ \iota = 1_{\mathfrak{m}/(a)}$. Siccome $a \notin \mathfrak{m}^2$, possiamo trovare $a_2, \dots, a_s \in A$ tale che $a, a_2, \dots, a_s$ sia un sistema minimale di generatori per $\mathfrak{m}$. Dunque

$$(a) \cap (a_2, \dots, a_s) \subseteq a\mathfrak{m}.$$

Ne segue che possiamo definire ι come la seguente composizione:

$$\mathfrak{m}/(a) = \frac{(a_2, \dots, a_s) + (a)}{(a)} \cong \frac{(a_2, \dots, a_s)}{(a) \cap (a_2, \dots, a_s)} \to \mathfrak{m}/a\mathfrak{m},$$

da cui si vede facilmente $\pi \circ \iota = 1_{\mathfrak{m}/(a)}$. $\square$

TEOREMA

(Auslander-Buchsbaum-Serre): Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale Noetheriano e $K = A/\mathfrak{m}$ è il suo campo residuo, le seguenti sono equivalenti:

(i) A è regolare;

(ii) $\mathrm{projdim}(M) < +\infty$ per ogni A-modulo M;

(iii) $\mathrm{projdim}(M) \leq \dim A$ per ogni A-modulo M.

(iv) $\mathrm{projdim}(K) < +\infty$;

(v) $\mathrm{projdim}(K) = \dim A$.

Dimostrazione: Abbiamo già dimostrato che

$$(i) \Rightarrow (v) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv).$$

Quindi dobbiamo dimostrare $(iv) \Rightarrow (i)$, e lo faremo per induzione su $s = \mu(\mathfrak{m})$. Se $s = 0$, allora A è ovviamente regolare, quindi assumiamo che $s > 0$.

Di sicuro, se $s > 0$, K non è libero, poiché $0 :_A K = \mathfrak{m} \neq 0$. Quindi $0 < \operatorname{projdim}(K) < +\infty$.Allora Auslander-Buchsbaum implica che:

$$\operatorname{depth}(A) = \operatorname{depth}(K) + \operatorname{projdim}(K) > 0.$$

Dunque possiamo scegliere $a \in \mathfrak{m}$ che non stia in alcuno dei primi associati di A né in $\mathfrak{m}^2$ (usando il prime avoidance). Poiché a è A-regolare, naturalmente è anche $\mathfrak{m}$-regolare, quindi:

$$\operatorname{projdim}_{A/(a)}(\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}) = \operatorname{projdim}_A(\mathfrak{m}) = \operatorname{projdim}_A(K) - 1 < +\infty.$$

Dal lemma precedente, sappiamo che $\mathfrak{m}/(a)$ è un addendo diretto come A-modulo (e quindi anche come $A/(a)$-modulo) di $\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}$. Sia dunque N un $A/(a)$-modulo tale che

$$\mathfrak{m}/a\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/(a) \oplus N.$$

Quindi

$$\mathrm{Tor}^i_{A/(a)}(\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}, K) \cong \mathrm{Tor}^i_{A/(a)}(\mathfrak{m}/(a), K) \oplus \mathrm{Tor}^i_{A/(a)}(N, K),$$

da cui

$$\mathrm{projdim}_{A/(a)}(\mathfrak{m}/(a)) \leq \mathrm{projdim}_{A/(a)}(\mathfrak{m}/a\mathfrak{m}) < +\infty.$$

Notiamo che $\mathfrak{m}/(a)$ è l'ideale massimale di $A/(a)$, e che

$$\mu(\mathfrak{m}/(a)) = \mu(\mathfrak{m}) - 1 = s - 1.$$

Inoltre

$$\mathrm{projdim}_{A/(a)}(K) = \mathrm{projdim}_{A/(a)}(\mathfrak{m}/(a)) + 1 < +\infty,$$

dunque per induzione $A/(a)$ è regolare. Quindi $s - 1 = \dim A/(a)$. Per finire, poiché a è A-regolare, $\dim A/(a) = \dim A - 1$. $\square$

Corollario: La regolarità localizza! Cioè, se $(A, \mathfrak{m})$ è regolare, allora $A_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

Dimostrazione: Dal teorema di A-B-S sappiamo che

$$\mathrm{projdim}_A(A/\mathfrak{p}) < +\infty.$$

Scegliamo una risoluzione libera finita $F_\bullet \to A/\mathfrak{p} \to 0$. Poiché $A_\mathfrak{p}$ è un A-modulo piatto, allora:

$$F_\bullet \otimes_A A_\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{p} \otimes_A A_\mathfrak{p} \to 0$$

è una risoluzione libera finita dell' $A_\mathfrak{p}$-modulo $A/\mathfrak{p} \otimes_A A_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ quindi deduciamo da A-B-S che $A_\mathfrak{p}$ è regolare. $\square$

DEF.: Un anello Noetheriano A si dice regolare se $A_\mathfrak{p}$ è un anello regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Grazie al corollario, basta verificare che $A_\mathfrak{m}$ sia regolare per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.

TEOREMA: L' anello di polinomi $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ è un anello regolare.

Dimostrazione: Abbiamo già visto che ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subseteq S$ è generato da n elementi. Ne segue che $\mathfrak{m}S_{\mathfrak{m}}$ è generato da n elementi in $S_{\mathfrak{m}}$, che ha dimensione $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = n$. Quindi $S_{\mathfrak{m}}$ è un anello regolare per ogni ideale massimale di S, dunque S è un anello regolare. $\square$

A questo punto, non sarebbe troppo difficile dimostrare il seguente:

TEOREMA: Se A è un anello regolare di dimensione di Krull n, allora $\mathrm{projdim}(M) \leq n$ per ogni A-modulo M.

Se S è un anello di polinomi in n variabili su un campo K, allora ogni S-modulo M ha una risoluzione libera di lunghezza al più n.

LEMMA: Sia A una K-algebra graduata standard e $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} A_i$. Allora

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) \cong A.$$

Dimostrazione: Siccome $\mathfrak{m} = (A_1)$, c' è un isomorfismo di anelli

$$A \cong \mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(A).$$

dato da $A_i \ni f \mapsto \overline{f} \in \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$. D' altra parte:

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) = \bigoplus_{i\geq 0} \frac{\mathfrak{m}^i A_{\mathfrak{m}}}{\mathfrak{m}^{i+1} A_{\mathfrak{m}}} \cong \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} \otimes_A A_{\mathfrak{m}} \cong$$
$$\bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i \otimes_A A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cong \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i \otimes_A (A/\mathfrak{m})_{\mathfrak{m}} \cong$$
$$\bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i \otimes_A (A/\mathfrak{m}) \cong \bigoplus_{i\geq 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} = \mathcal{G}_{\mathfrak{m}}(A)$$

□

TEOREMA: Una K-algebra graduata standard A è regolare se e solo se A è un anello di polinomi.

Dimostrazione: Che un anello di polinomi è regolare l'abbiamo già visto. Per l'altra implicazione, sia $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i>0} A_i$. Se A è regolare, allora anche $A_\mathfrak{m}$ lo è, dunque l'ideale massimale $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ è generato da una sequenza $A_\mathfrak{m}$-regolare. Allora $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m})$ è un anello di polinomi, e per il lemma $A \cong \mathcal{G}_{\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m})$. $\square$

Significato geometrico della regolarità

Per le prossime 5 slides K è un campo algebricamente chiuso di caratteristica 0 e $S = K[x_1, \dots, x_n]$.

DEF.: Sia $I = (f_1, \dots, f_r)$ un ideale primo di S, $X = \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ e $P \in X$. X si dice non singolare in P se la matrice Jacobiana

$$\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,n}$$

ha rango $\mathrm{codim}_{\mathbb{A}^n} X$. La varietà algebrica X si dice non singolare se è non singolare in ogni suo punto.

OSS.: Con le notazioni precedenti, lo spazio tangente a X in $P = (p_1, \dots, p_r)$ è il luogo degli zeri dei polinomi lineari:

$$\sum_{j=1}^{n} (\partial f_i / \partial x_j)(P)(x_j - p_j) \quad \forall\ i = 1, \dots, r$$

Quindi la condizione che $\mathcal{J}$ abbia rango $\mathrm{codim}_{\mathbb{A}^n}(X)$ significa che lo spazio tangente a X in P abbia la stessa dimensione di X.

TEOREMA: Dato $I \subseteq S$ ideale primo, sono equivalenti:

(i) $X = \mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ è non singolare;

(ii) S/I è un anello regolare.

Dimostrazione: Sia $P = (p_1, \dots, p_n) \in X$ e

$$\mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n) \supseteq I$$

l' ideale (massimale) che lo definisce, cioè tale che $\mathcal{Z}(\mathfrak{m}) = \{P\}$. L' omomorfismo di K-spazi vettoriali $\theta_P : S \to K^n$ definito come

$$\theta_P(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

ha la proprietà che $\theta_P(\mathfrak{m})$ genera K^n e $\theta_P(\mathfrak{m}^2) = 0$. Dunque $\overline{\theta_P} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to K^n$ è un omomorfismo surgettivo di K-spazi vettoriali, che siccome $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$ è un isomorfismo.

Se $I = (f_1, \dots, f_r)$, il rango della matrice Jacobiana

$$\mathcal{J} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,n}$$

è proprio la dimensione del K-spazio vettoriale $\theta_P(I) \subseteq K^n$, sia essa c. Quindi $\dim_K((I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2) = c$. D'altra parte, denotando con $\overline{\mathfrak{m}}$ la classe di $\mathfrak{m}$ in $A = S/I$ e l'ideale massimale di $A_{\overline{\mathfrak{m}}}$ con $\mathfrak{n}$, si ha:

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \cong (\overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2) \otimes_A A_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong \overline{\mathfrak{m}} \otimes_A (A/\overline{\mathfrak{m}})_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong \overline{\mathfrak{m}}/\overline{\mathfrak{m}}^2 = \mathfrak{m}/(I+\mathfrak{m}^2)$$

L' isomorfismo di K-spazi vettoriali:

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong (I+\mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathfrak{m}/(I+\mathfrak{m}^2)$$

ci dice che $c = n - \mu(\mathfrak{n})$. Poiché $\mathrm{codim}_{\mathbb{A}^n}(X) = \mathrm{ht}(I) = n - \dim A = n - \dim A_{\overline{\mathfrak{m}}}$, questo implica che X è non singolare in P se e solo se $A_{\overline{\mathfrak{m}}}$ è un anello regolare. Siccome c' è una corrispondenza biunivoca fra punti di X e ideali massimali di A, concludiamo. $\square$

OSS: Abbiamo in realtà provato qualcosa di più preciso, e cioè che $X = \mathcal{Z}(I)$ non è singolare in $P = (p_1, \ldots, p_n) \in X$ se e solo se $A_{\overline{\mathfrak{m}_P}}$ è un anello regolare, dove $\mathfrak{m} = (x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) \subseteq S$ e $\overline{\mathfrak{m}_P}$ è la sua classe in $A = S/I$.

ESEMPIO: 1. Sia $f = y^2 - x^3 - 3x^2 \in K[x,y] = S$.

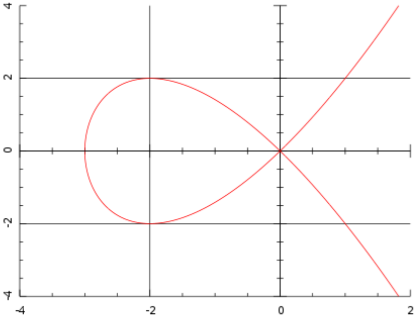


Figure: Tschirnhausen cubic

La curva piana rappresentata sopra ha chiaramente una singolarità in $(0,0)$. Per vederlo rigorosamente, la matrice Jacobiana è

$$(\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y) = (3x^2 - 6x,\ 2y),$$

che in $(0,0)$ ha rango $0 < 1 = \operatorname{codim}_{\mathbb{A}^2} C$.

Per dimostrare che c' è una singolarità in $(0,0)$, possiamo anche dimostrare che $A_{\mathfrak{m}}$ non è regolare dove $A = S/(f)$ e $\mathfrak{m} = (\overline{x}, \overline{y})$.

Se $A_{\mathfrak{m}}$ fosse regolare, siccome $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}) = 1$, l'ideale $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ dovrebbe essere principale. Usando che $A_{\mathfrak{m}} \cong S_{(x,y)}/fS_{(x,y)}$, quindi dovrebbero esistere polinomi $h_1, h_2 \in S \smallsetminus (x, y)$ e $g_1 \in S$ (se no il ragionamento è simmetrico) tali che:

$$x/h_1 + g_1 y/h_2 \in fS_{(x,y)}.$$

A sua volta, questo significa che esistono polinomi $h_3 \in S \smallsetminus (x, y)$ e $g_2 \in S$ tali che:

$$x/h_1 + g_1 y/h_2 + g_2 f/h_3 = (h_2 h_3 x + h_1 h_3 g_1 y + h_1 h_2 g_2 f)/h_1 h_2 h_3 = 0 \quad \text{in} \quad S_{(x,y)}.$$

Che significa che esiste $h_4 \in S \smallsetminus (x, y)$ tale che:

$$h_2 h_3 h_4 x + h_1 h_3 h_4 g_1 y + h_1 h_2 h_4 g_2 f = 0 \quad \text{in} \quad S.$$

Questo è evidentemente impossibile, poiché nel supporto del polinomio $h_2 h_3 h_4 x$ c' è un monomio del tipo λx con $\lambda \in K \smallsetminus \{0\}$, monomio che non può stare nel supporto di $h_1 h_3 h_4 g_1 y + h_1 h_2 h_4 g_2 f$.

UFD

DEF.: Un elemento a di un anello A si dice irriducibile se non è invertibile e

$$a = xy \Rightarrow x \text{ oppure } y \text{ è invertibile.}$$

L'elemento a si dice primo se $(a) \in \mathrm{Spec}(A)$.

In un dominio, un elemento primo non nullo è irriducibile.

DEF.: Un dominio A è un UFD se ogni elemento non invertibile di A si scrive come prodotto di elementi primi.

Se A è un UFD, allora ogni elemento irriducibile deve essere primo.
D'altra parte, se A è un dominio Noetheriano, ogni elemento si scrive come un prodotto di irriducibili.
Quindi:

un dominio Noetheriano è un UFD se e solo se ogni irriducibile è primo.

PROPOSIZIONE: In un dominio A, una decomposizione di un elemento non nullo come prodotto di primi è unica. Cioè, se

$$0 \neq a = p_1 \cdots p_n = p_1' \cdots p_m'$$

con $p_1, \dots, p_n, p_1', \dots, p_m'$ elementi primi, allora $m = n$ e $p_i' = p_i$ (a meno di riordinare e di fattori invertibili).

Dimostrazione: Se $p_1 \cdots p_n = p_1' \cdots p_m'$, allora $p_1' \cdots p_m' \in (p_1)$. Poiché (p_1) è primo, esiste $i \in \{1, \dots, m\}$ tale che $p_i' \in (p_1)$. A meno di riordinare, possiamo supporre $i = 1$. Dunque $p_1' = up_1$ per qualche $u \in A$. Poiché un primo non nullo in un dominio è irriducibile, u è invertibile. Allora $p_1 p_2 \cdots p_n = up_1 p_2' \cdots p_m'$ che, siccome A è un dominio, implica

$$p_2 \cdots p_n = up_2' \cdots p_m'.$$

A questo punto possiamo concludere per induzione su $\min\{m, n\}$.
□

TEOREMA: Per un dominio Noetheriano A sono equivalenti:

(i) A è un UFD;

(ii) Ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ di altezza 1 è principale.

Dimostrazione: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di altezza 1, e $0 \neq a \in \mathfrak{p}$. Siccome A è un UFD, a è un prodotto di elementi primi:

$$a = \prod_{i=1}^{m} a_i.$$

Siccome $\mathfrak{p}$ è primo, esiste $i \in \{1, \ldots, m\}$ tale che $a_i \in \mathfrak{p}$. Allora

$$0 \subsetneq (a_i) \subseteq \mathfrak{p}$$

è una catena di ideali primi, e poiché $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ abbiamo $\mathfrak{p} = (a_i)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sia $a \in A$ un elemento irriducibile. Consideriamo $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Min}((a))$, che grazie all' Hauptidealsatz ha altezza 1. Allora $\mathfrak{p} = (x)$ per qualche $x \in A$, e esiste $y \in A$ tale che $a = xy$. Poiché a è irriducibile, y deve essere invertibile, dunque $(a) = (x)$ è primo. $\square$

Ci apprestiamo a dimostrare il seguente:

TEOREMA (Auslander-Buchsbaum): Un anello regolare locale è un UFD.

ESEMPIO: $A = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 - y^3 + y)$ e $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ sono anelli regolari ma non un UFD. (Non sono locali).

La dimostrazione del teorema richiederà un po' di fatica .....

LEMMA Sia A un dominio Noetheriano, $\Gamma \subset A$ un insieme di elementi primi non nulli di A e T il sistema moltiplicativo generato da Γ. Se $T^{-1}A$ è un UFD, allora A è un UFD.

Dimostrazione: Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A di altezza 1. Dobbiamo dimostrare che $\mathfrak{p}$ è principale. Se $\mathfrak{p} \cap T \neq \emptyset$, allora $\mathfrak{p}$ contiene un elemento primo $a \neq 0$, dunque $(0) \subsetneq (a) \subseteq \mathfrak{p}$ è una catena di primi. Poiché $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, ciò è possibile se e solo se $\mathfrak{p} = (a)$.

Dunque possiamo supporre che $\mathfrak{p} \cap T = \emptyset$, cosicché $\mathfrak{p} \cdot T^{-1}A$ è un ideale primo di altezza 1 di $T^{-1}A$. Poiché $T^{-1}A$ è un UFD, esiste $x \in \mathfrak{p}$ tale che $\mathfrak{p} \cdot T^{-1}A = x \cdot T^{-1}A$. Fra tali elementi, scegliamo un x tale che l'ideale di A generato da x sia massimale rispetto all'inclusione. Allora a non divide x per nessun $a \in \Gamma$, poiché $ay = x \in \mathfrak{p} \Rightarrow y \in \mathfrak{p}$ e $(y) \supsetneq (x)$, e $\mathfrak{p} \cdot T^{-1}A = y \cdot T^{-1}A$ contraddicendo la massimalità di (x).

Vogliamo dimostrare che $\mathfrak{p} = (x)$ ("$\supseteq$" è ovvio perché $x \in \mathfrak{p}$).

Sia $y \in \mathfrak{p}$. Poiché $\mathfrak{p} \cdot T^{-1}A = x \cdot T^{-1}A$, esiste $t = a_1 \cdots a_r \in T$ tale che $ty = xz_1$ per qualche $z_1 \in A$. In particolare $xz_1 \in (a_1)$, che siccome a_1 è primo e $x \notin (a_1)$. implica che $z_1 = z_2 a_1$ per qualche $z_2 \in A$. Quindi $a_1 a_2 \cdots a_r \cdot y = x a_1 z_2$, che visto che A è un dominio implica $a_2 \cdots a_r \cdot y = x z_2$. Facendo lo stesso ragionamento $z_2 = a_2 z_3$ per qualche $z_3 \in A$, quindi proseguendo così alla fine troviamo che $z_1 = tz$ per qualche $z \in A$. Dunque $ty = xtz$ che, di nuovo perché A è un dominio, implica $y = xz$, cioè $y \in (x)$. $\square$

Dato un anello qualsiasi A, abbiamo visto che un A-modulo P è proiettivo se e solo se è un addendo diretto di un A-modulo libero F. Cioè, se e solo se esiste un A-modulo M t. c.

$$P \oplus M \cong F$$

(si noti che, quindi, anche M è proiettivo).

DEF.: P si dice stabilmente libero se si può scegliere F in modo che M sia un A-modulo libero.

PROPOSIZIONE: Dato un anello A, un A-modulo proiettivo P è stabilmente libero se e solo se ammette una risoluzione libera finita.

Dimostrazione: Se P è stabilmente libero (cioè $P \oplus F_1 \cong F_0$ dove F_0 e F_1 sono A-moduli liberi) allora

$$0 \to F_1 \to F_0 \to P \to 0$$

è una risoluzione libera finita.

Al contrario supponiamo che

$$0 \to F_n \xrightarrow{d_n} \ldots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} P \to 0$$

sia una risoluzione libera finita. Si noti che, poiché P è proiettivo, la successione esatta corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_0) \to F_0 \xrightarrow{d_0} P \to 0$$

è spezzante. Dunque $F_0 \cong \mathrm{Ker}(d_0) \oplus P$ e $\mathrm{Ker}(d_0)$ è proiettivo. Quindi anche la successione esatta corta

$$0 \to \mathrm{Ker}(d_1) \to F_1 \xrightarrow{d_1} \mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Ker}(d_0) \to 0$$

è spezzante. Dunque $F_1 \cong \mathrm{Ker}(d_1) \oplus \mathrm{Ker}(d_0)$, e di conseguenza $\mathrm{Ker}(d_1)$ è proiettivo.

Procedendo così, dunque, $F_0 \cong \mathrm{Ker}(d_0) \oplus P$ e

$$F_i \cong \mathrm{Ker}(d_{i-1}) \oplus \mathrm{Ker}(d_i) \quad \forall\ i = 1, \dots, n-1$$

Dunque

$$\begin{aligned} P \oplus F_1 \oplus F_3 \oplus \dots &\cong P \oplus (\mathrm{Ker}(d_0) \oplus \mathrm{Ker}(d_1)) \oplus (\mathrm{Ker}(d_2) \oplus \mathrm{Ker}(d_3)) \oplus \dots \\ &\cong (P \oplus \mathrm{Ker}(d_0)) \oplus (\mathrm{Ker}(d_1) \oplus \mathrm{Ker}(d_2)) \oplus \dots \\ &\cong F_0 \oplus F_2 \oplus \dots \end{aligned}$$

□

Dalle proprietà del prodotto tensore, si possono dedurre le seguenti proprietà dell'algebra esterna:

LEMMA: Siano M ed N due A-moduli, e $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\bigwedge^n(M \oplus N) \cong \bigoplus_{i+j=n} \bigwedge^i M \otimes_A \bigwedge^j N$.

(ii) $\bigwedge^n M_{\mathfrak{p}} \cong (\bigwedge^n M)_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

LEMMA: Se $P \oplus A^{n-1} \cong A^n$, allora $P \cong A$.

Dimostrazione: Si hanno i seguenti isomorfismi di A-moduli:

$$\begin{aligned} A &\cong \wedge^n A^n \\ &\cong \wedge^n(P \oplus A^{n-1}) \\ &\cong \oplus_{i+j=n}(\wedge^i P \otimes_A \wedge^j A^{n-1}) \end{aligned}$$

Per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $P_{\mathfrak{p}}$ è un $A_{\mathfrak{p}}$-modulo libero tale che $P_{\mathfrak{p}} \oplus A_{\mathfrak{p}}^{n-1} \cong A_{\mathfrak{p}}^n$, dunque $P_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}$.

Dunque $(\wedge^i P)_\mathfrak{p} \cong \wedge^i (P_\mathfrak{p}) = 0$ per ogni $i > 1$ e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Quindi $\wedge^i P = 0$ per ogni $i > 1$, e

$$A \cong \oplus_{i+j=n} (\wedge^i P \otimes_A \wedge^j A^{n-1}) \cong P.$$

□

TEOREMA (Auslander-Buchsbaum): Un anello locale regolare $(A, \mathfrak{m})$ è un UFD.

Dimostrazione: Se $\dim A = 0$ A è un campo (quindi un UFD), dunque possiamo supporre $\dim A > 0$ e prendere $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$. Poiché $A/(x)$ è regolare, e quindi un dominio, x è un elemento primo di A, dunque è sufficiente dimostrare che A_x è un UFD. Cioè che ogni primo $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A_x)$ di altezza 1 è principale.

Sia $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_x)$ contenente $\mathfrak{q}$. Quindi esiste $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}(A)$ (non contenente x) tale che $\mathfrak{p}' A_x \cong \mathfrak{p}$, e:

$$(A_x)_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}'}.$$

Quindi $(A_x)_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale regolare di dimensione minore di quella di A, e quindi un UFD per induzione. Quindi $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ è principale per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_x)$ contenente $\mathfrak{q}$. In particolare $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ è un $(A_x)_{\mathfrak{p}}$-modulo libero per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_x)$, e quindi $\mathfrak{q}$ è un A_x-modulo proiettivo. Ora, osserviamo che esiste $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(A)$ non contenente x tale che $\mathfrak{q}' A_x \cong \mathfrak{q}$. Essendo A un anello locale regolare, $\mathfrak{q}'$ ammette una risoluzione libera finita come A-modulo. Poiché A_x è un A-modulo piatto, localizzando a x otteniamo una risoluzione libera finita di $\mathfrak{q}$ come A_x-modulo.

Ricapitolando, abbiamo dimostrato che ogni $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A_x)$ di altezza 1 è un A_x-modulo proiettivo e ammette una risoluzione libera finita di A_x-moduli. Quindi $\mathfrak{q}$ è un A_x-modulo stabilmente libero. Cioè:

$$\mathfrak{q} \oplus A_x^m \cong A_x^n$$

per qualche m e n. D'altronde, se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A_x)$ contiene $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_\mathfrak{p} \cong (A_x)_\mathfrak{p}$, e l'isomorfismo $(A_x)_\mathfrak{p} \oplus (A_x)_\mathfrak{p}^m \cong (A_x)_\mathfrak{p}^n$ implica che $m = n - 1$. Quindi

$$\mathfrak{q} \oplus A_x^{n-1} \cong A_x^n,$$

che implica $\mathfrak{q} \cong A_x$. Dunque $\mathfrak{q}$ è principale, ovvero A_x è un UFD. $\square$

Risoluzioni iniettive

Dato un anello A, ricordiamo che un A-modulo E si dice iniettivo se esiste il seguente diagramma commutativo per ogni f e g:

$$\begin{tikzcd} & E \\ M \arrow[ur, dotted, "\exists h"] & N \arrow[l, hook', "\forall f"] \arrow[u, "\forall g"'] \end{tikzcd}$$

OSS.: Se $\iota : E \hookrightarrow M$ sono A-moduli, con E iniettivo, allora E è un addendo diretto di M. Infatti, basra considerare il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & E \\ M \arrow[ur, dotted, "\exists \pi"] & E \arrow[l, hook', "\iota"] \arrow[u, "1_E"'] \end{tikzcd}$$

ESERCIZIO: Si provi che un addendo diretto di un A-modulo iniettivo è iniettivo.

DEF.: Un'inclusione di A-moduli $\iota : M \hookrightarrow N$ si dice estensione essenziale di M se per ogni sottomodulo non nullo $L \subseteq N$, $L \cap \iota(M) \neq 0$.

ESEMPIO: Supponiamo che A sia un dominio e chiamiamo K il suo campo delle frazioni. Allora $A \hookrightarrow K$ è un'estensione essenziale di A: se $L \subseteq K$ è un A-sottomodulo non nullo, sia $x/y \in L$ con $x, y \in A \setminus \{0\}$. Allora $x = y \cdot (x/y) \in L \cap A$.

ESERCIZIO: Siano $\iota : M \hookrightarrow N$ un'estensione essenziale di A-moduli e E un A-modulo iniettivo. Se $M \xrightarrow{\alpha} E$ è iniettiva, si verifichi che ogni sua estensione $N \xrightarrow{\beta} E$ deve essere iniettiva.

PROP.: Data un'inclusione di A-moduli $\iota : M \hookrightarrow N$, esiste un A-sottomodulo $N_0 \subseteq N$ tale che $\iota : M \hookrightarrow N_0$ è massimale fra le estensioni essenziali di M contenute in N.

Dimostrazione: Se $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N$ sono una catena di sottomoduli tali che $\iota : M \hookrightarrow N_i$ è essenziale per ogni i, chiaramente anche $\iota : M \hookrightarrow \cup_i N_i$ è essenziale. Quindi concludiamo grazie al lemma di Zorn. $\square$

DEF.: Un'estensione essenziale $M \hookrightarrow N_0$ come nella proposizione precedente si dice estensione essenziale massimale di M dentro N. Un'estensione essenziale $M \hookrightarrow N$ è un'estensione essenziale massimale di M (in senso assoluto) se ogni estensione essenziale $N \hookrightarrow N'$ è un isomorfismo.

PROP.:

(i) Un A-modulo è iniettivo se e solo se non ha estensioni essenziali proprie.

(ii) Sia $M \hookrightarrow E$ un' inclusione di A-moduli con E iniettivo. Se $M \hookrightarrow N$ è un'estensione essenziale massimale di M dentro E, allora N è iniettivo. In particolare, N è un'estensione essenziale massimale di M.

(iii) Se $M \hookrightarrow E$ e $M \hookrightarrow E'$ sono estensioni essenziali massimali di M, allora $E \cong E'$ (non canonicamente).

Dimostrazione: (i) Sia E un A-modulo iniettivo. Per ogni $\iota : E \hookrightarrow N$, abbiamo che E è un addendo diretto di N. Equivalentemente, esiste un A-sottomodulo $N' \subseteq N$ tale che $N = \iota(E) \oplus N'$. Poiché $N' \cap \iota(E) = 0$, se N fosse un'estensione essenziale di E, allora $N' = 0$, che sarebbe a dire $E \cong N$.

Per il viceversa, immergiamo il nostro A-modulo M in un iniettivo E, diciamo $\iota : M \hookrightarrow E$. Per il lemma di Zorn possiamo scegliere un A-sottomodulo $N \subseteq E$ che sia massimale rispetto alla proprietà che $N \cap \iota(M) = 0$. Allora $\bar{\iota} : M \hookrightarrow E/N$ è un'estensione essenziale. Siccome M non ha estensioni essenziali proprie, $M \cong E/N$, quindi $E = \iota(M) + N$. Poiché $N \cap \iota(M) = 0$, in realtà $E = \iota(M) \oplus N$, da cui segue che M è iniettivo (essendo addendo diretto di un iniettivo).

(ii) Sia $M \hookrightarrow E$ con E iniettivo e $M \hookrightarrow N$ un'estensione essenziale massimale dentro E. Dimostriamo che N non ha estensioni essenziali proprie in senso assoluto. Sia, per assurdo, $\beta : N \hookrightarrow Q$ un'estensione essenziale propria. Siccome E è iniettivo, l'inclusione $N \to E$ si può estendere ad una mappa $\alpha : Q \to E$. Poiché $N \hookrightarrow Q$ è essenziale, α è iniettiva, quindi $\alpha(Q)$ sarebbe un'estensione essenziale di M dentro E più grande di N, una contraddizione. Dunque N è iniettivo grazie a (i).

(iii) Siano $M \hookrightarrow E$ e $M \hookrightarrow E'$ due estensioni essenziali massimali di M. Essendo E' iniettivo, la mappa iniettiva $M \to E'$ si estende ad una mappa $\phi : E \to E'$. Poiché $M \hookrightarrow E$ è essenziale, ϕ è iniettiva. Allora $M \hookrightarrow E$ è un' estensione essenziale massimale di M dentro E', quindi $E \cong E'$. $\square$

DEF.: Dato un A-modulo M denoteremo con $E_A(M)$, solo $E(M)$ quando è chiaro chi è A, la sua estensione essenziale massimale (unica a meno d'isomorfismo non canonico). Chiameremo $E(M)$ l' involucro iniettivo di M.

DEF.: Dato un qualunque anello A e un qualunque A-modulo M, una risoluzione iniettiva di M:

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

si dice minimale se $E^0 \cong E(M)$, $E^1 \cong E(\mathrm{Coker}(\epsilon))$ e, per ogni $i \geq 2$, $E^i \cong E(\mathrm{Coker}(d^{i-2}))$.

ESERCIZIO: Due risoluzioni iniettive minimali di M sono isomorfe (come complessi).

OSS.: Contrariamente alle "cugine" risoluzioni proiettive minimali, che possono essere definite solo se A è locale Noetheriano e M è finitamente generato, le risoluzioni iniettive minimali si possono definire sempre!

ESERCIZIO: si provi che una somma diretta finita di A-moduli iniettivi è un A-modulo iniettivo.

Cosa si può dire di somme dirette infinite?

LEMMA: Sia A *Noetheriano* e $\{E_\lambda\}_\Lambda$ una famiglia di A-moduli iniettivi, dove Λ è un insieme qualunque. Allora $E = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ è un A-modulo iniettivo.

Dimostrazione: Grazie al criterio di Baer basta provare che ogni mappa di A-moduli $\alpha : I \to E$, dove $I \subseteq A$ è un ideale, può essere estesa ad una mappa di A-moduli $\tilde{\alpha} : A \to E$. Poiché I è *finitamente generato*, esiste un sottoinsieme finito Λ' di Λ tale che

$$\alpha(I) \subseteq E' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} E_\lambda.$$

Essendo E' iniettivo α può essere estesa ad una mappa da A in E'. Dunque $\tilde{\alpha}$ è semplicemente la composizione $A \to E' \subseteq E$. □

TEOREMA: Se A è Noetheriano e E è un A-modulo initettivo, allora E è isomorfo a una somma diretta di moduli del tipo $E_A(A/\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$.

Dimostrazione: Prendiamo una famiglia $\{E_\lambda\}_\Lambda$ di sottomoduli di E che sia massimale rispetto alle proprietà:

(i) $E_\lambda \cong E_A(A/\mathfrak{p}_\lambda)$ per qualche $\mathfrak{p}_\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$.

(ii) $E_\lambda \cap E_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$.

Che tale famiglia esista è assicurato dal lemma di Zorn. Sia $E' = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$. Essendo E' iniettivo, scegliamo $E'' \subseteq E$ tale che $E = E' \oplus E''$. Per assurdo $E'' \neq 0$: allora esiste $0 \neq m \in E''$. Sia $\mathfrak{p}$ un primo associato di $\langle m\rangle$. Allora $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \langle m\rangle \subseteq E''$, e l'estensione essenziale massimale di $A/\mathfrak{p}$ dentro E'', essendo quest'ultimo un A-modulo iniettivo, è isomorfa a $E_A(A/\mathfrak{p})$. Ma allora E'' contiene una copia isomorfa di $E_A(A/\mathfrak{p})$, che potremmo aggiungere a $\{E_\lambda\}_\Lambda$, contraddicendone la massimalità. □

LEMMA: Se A è Noetheriano e M è un A-modulo finitamente generato, allora:

$$\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(E(M)).$$

Dimostrazione: Che $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(E(M))$ è chiaro. Se $\mathfrak{p}$ è un associato di $E(M)$, allora $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow E(M)$. Quindi $A/\mathfrak{p} \cap M \neq 0$, e poiché

$$0 :_A a = \mathfrak{p} \quad \forall\ 0 \neq a \in A/\mathfrak{p},$$

$\mathfrak{p}$ deve appartenere a $\mathrm{Ass}(M)$. $\square$

DEF.: Un A-modulo si dice indecomponibile se non può essere scritto come somma diretta di due suoi sottomoduli non nulli.

TEOREMA: Se A è un anello Noetheriano, un A-modulo iniettivo E è indecomponibile se e solo se $E \cong E(A/\mathfrak{p})$ per qualche $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Inoltre, $E(A/\mathfrak{p}) \cong E(A/\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Dimostrazione: Abbiamo già visto che E è una somma diretta di moduli del tipo $E(A/\mathfrak{p})$ con $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, quindi se E è indecomponibile deve essere uno di questi.

Se $E(A/\mathfrak{p})$ fosse decomponibile, allora esisterebbero due sottomoduli $N_1, N_2 \subseteq E(A/\mathfrak{p})$ non nulli tali che $N_1 \cap N_2 = 0$. Allora $(N_1 \cap A/\mathfrak{p}) \cap (N_2 \cap A/\mathfrak{p}) = 0$. D'altronde, essendo $A/\mathfrak{p} \subseteq E(A/\mathfrak{p})$ essenziale, $N_i \cap A/\mathfrak{p}$ non è nullo. Ciò contraddice il fatto che $A/\mathfrak{p}$ è un dominio.

Poiché $\mathrm{Ass}(E(A/\mathfrak{p})) = \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$, è chiaro che $E(A/\mathfrak{p}) \cong E(A/\mathfrak{q}) \Leftrightarrow \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. $\square$

LEMMA: Sia A Noetheriano e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Siano $E = E_A(A/\mathfrak{p})$ e $\kappa = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Allora:

(i) Se $a \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$, allora $E \xrightarrow{\cdot a} E$ è un isomorfismo di A-moduli. In particolare, la mappa di A-moduli $E \to E_\mathfrak{p}$ che manda m in $m/1$ è un isomorfismo.

(ii) $0 :_E \mathfrak{p} \cong \kappa$ (come $A_\mathfrak{p}$-moduli).

(iii) $\operatorname{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(\kappa, E) \cong \kappa$ (come $A_\mathfrak{p}$-moduli) e $\operatorname{Hom}_{A_\mathfrak{q}}(\kappa, E_\mathfrak{q}) = 0$ per ogni $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$.

Dimostrazione: (i) Si noti che $\kappa \cong (A/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ è il campo delle frazioni di $A/\mathfrak{p}$. Quindi, sia come $A/\mathfrak{p}$-modulo che come A-modulo, è un'estensione essenziale di $A/\mathfrak{p}$. Allora una sua copia isomorfa (come A-modulo) è contenuta in E, quindi possiamo scrivere la catena di estensioni essenziali di A-moduli:

$$A/\mathfrak{p} \subseteq \kappa \subseteq E.$$

Siccome la moltiplicazione $\kappa \xrightarrow{\cdot a} \kappa$ è bigettiva, $E \xrightarrow{\cdot a} E$ è iniettiva (perché $\kappa \subseteq E$ è essenziale) e $\kappa \subseteq aE$. Allora $aE \subseteq E$ è un sottomodulo iniettivo (poiché isomorfo ad E) contenente $A/\mathfrak{p}$. Quindi $aE = E$.

(ii). Da (i) $0 :_E \mathfrak{p}$ ha una struttura di $A_\mathfrak{p}$-modulo. Allora (una copia isomorfa di) κ è contenuta in $0 :_E \mathfrak{p}$, e siccome $0 :_E \mathfrak{p}$ è un κ-spazio vettoriale, κ è un addendo diretto (come κ-modulo e come $A_\mathfrak{p}$-modulo) di $0 :_E \mathfrak{p}$. Poiché $\kappa \subseteq E$ è un'estensione essenziale di $A_\mathfrak{p}$-moduli, $\kappa = 0 :_E \mathfrak{p}$.

(iii). Grazie a (i) e (ii) abbiamo isomorfismi di $A_\mathfrak{p}$-moduli:

$$\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(\kappa, E) \cong 0 :_E \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = 0 :_E \mathfrak{p} \cong \kappa.$$

Per dimostrare che $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(\kappa, E_A(A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}) = 0$ per ogni $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, prima assumiamo che $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p}$. Per ogni $0 \neq m \in E_A(A/\mathfrak{q})$, siccome

$$\varnothing \subsetneq \mathrm{Ass}(\langle m \rangle) \subseteq \mathrm{Ass}(E_A(A/\mathfrak{q})) = \{\mathfrak{q}\},$$

abbiamo $\mathrm{Ass}(\langle m \rangle) = \{\mathfrak{q}\}$, e dunque che $\sqrt{(0 : \langle m \rangle)} = \mathfrak{q}$. Dunque, se $a \in \mathfrak{q} \smallsetminus \mathfrak{p}$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a^N m = 0$. Allora $m/1 = 0$ in $E_A(A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$, quindi $E_A(A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} = 0$.

Se $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, allora

$$\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(\kappa, E_A(A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}) \cong 0 :_{E_A(A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}} \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \cong 0 :_{E_A(A/\mathfrak{q})} \mathfrak{p}.$$

Se l'ultimo non fosse 0, allora $\mathfrak{p}$ ucciderebbe un elemento non nullo di $E_A(A/\mathfrak{q})$, dunque $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ perché $\mathrm{Ass}(E(A/\mathfrak{q})) = \{\mathfrak{q}\}$. □

OSS.: Un funtore additivo commuta con le somme dirette finite. In generale, ciò è falso per somme dirette infinite. Nella prossima dimostrazione useremo il fatto (da provare come ESERCIZIO) che, se M è un A-modulo finitamente generato, allora $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ commuta con le somme dirette (anche infinite).

TEOREMA: Se A è Noetheriano e E è un A-modulo iniettivo:

$$E \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} E_A(A/\mathfrak{p})^{\alpha_{\mathfrak{p}}},$$

dove gli $\alpha_{\mathfrak{p}}$ sono indipendenti dalla decomposizione (gli $\alpha_{\mathfrak{p}}$ potrebbero essere insiemi di cardinalità infinita).

Dimostrazione: Sappiamo già che una decomposizione come quella dell'enunciato esiste. Siccome $\operatorname{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, - \otimes_A A_{\mathfrak{p}})$ commuta con le somme dirette, abbiamo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, E_{\mathfrak{p}}) &\cong \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, E_A(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}})^{\alpha_{\mathfrak{q}}} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, E_A(A/\mathfrak{p}))^{\alpha_{\mathfrak{p}}} \cong (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{\alpha_{\mathfrak{p}}}\end{aligned}$$

□

DEF.: Sia A un anello Noetheriano e M un A-modulo. Sia $0 \to M \to E^\bullet$ una risoluzione iniettiva minimale di M con

$$E^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} E_A(A/\mathfrak{p})^{\mu_i(\mathfrak{p},M)} \quad \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

Allora $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ è l' i-esimo numero di Bass rispetto a $\mathfrak{p}$.

Si può dimostrare che:

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \dim_\kappa(\mathrm{Ext}^i_{A_\mathfrak{p}}(\kappa, M_\mathfrak{p})), \quad \text{dove } \kappa = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}.$$

In particolare, se M è finitamente generato, $\mu_i(\mathfrak{p}, M)$ è un numero finito per ogni i e $\mathfrak{p}$.

ESERCIZIO: 1. Provare che, se A è un anello di Cohen-Macaulay, allora

$$\mu_i(\mathfrak{p}, A) = 0 \quad \text{se } i < \mathrm{ht}(\mathfrak{p}).$$

2. Provare che, se A è un anello regolare, allora

$$\mu_i(\mathfrak{p}, A) = \delta_{i,\mathrm{ht}(\mathfrak{p})} \quad \forall\ i, \mathfrak{p}$$

Risoluzioni libere graduate

Vogliamo studiare le risoluzioni libere nel contesto graduato. Ci limiteremo a studiare risoluzioni finite (che sono già abbastanza difficili e su cui la ricerca odierna è in grande fermento), quindi poiché abbiamo visto che l'unico anello regolare graduato standard è l'anello di polinomi

$$S = K[x_1, \dots, x_n]$$

in n variabili su un campo K, studieremo le risoluzioni libere degli S-moduli graduati. Non solo risoluzioni libere però, perché vogliamo costruire risoluzioni che si ricordino della struttura graduata.

DEF.: Se M e N sono S-moduli graduati, un omomorfismo di S-moduli $\phi : M \to N$ si dice omogeneo se $\phi(M_i) \subseteq N_i$.

DEF.: Una risoluzione libera graduata di un S-modulo graduato M è una risoluzione libera di M in cui tutte le mappe sono omogenee.

Se partiamo da un S-modulo M graduato, vogliamo costruire una risoluzione libera graduata. C' è subito un problema però: sia $M = S/(f)$, dove f è un polinomio omogeneo non nullo di grado d. La risoluzione libera di M che abbiamo imparato a fare è:

$$0 \to S \xrightarrow{\partial_1} S \xrightarrow{\epsilon} S/(f) \to 0$$

tale che $\epsilon(1) = \overline{1}$ e $\partial_1(1) = f$. Quindi, a meno che $d = 0$, la mappa ∂_1 non è omogenea, perché $0 \neq \partial_1(S_i) \subseteq S_{i+d}$.

DEF.: Se M è un S-modulo graduato, il suo sfasato di $k \in \mathbb{Z}$ è l' S-modulo $M(k)$ che è uguale ad M come S-modulo, e tale che:

$$M(k)_i = M_{k+i} \quad \forall \; i \in \mathbb{Z}.$$

Con questa nozione, una risoluzione libera graduata di $S/(f)$ sarà:

$$0 \to S(-d) \xrightarrow{\partial_1} S \xrightarrow{\epsilon} S/(f) \to 0$$

dove $\epsilon(1) = \overline{1}$ e $\partial_1(1) = f$ (d era il grado di f).

OSS.: Un S-modulo graduato M ha sempre una risoluzione graduata libera. Infatti, sia $\{m_{0,i} : i \in I_0\}$ un insieme di generatori omogenei di M. Sia $d_{0,i} = \deg(m_{0,i})$, e consideriamo l' S-modulo libero graduato

$$F_0 = \bigoplus_{i \in I_0} S(-d_{0,i}).$$

La mappa surgettiva $\epsilon : F_0 \to M$ che a e_i associa $m_{0,i}$ è omogenea (perché e_i ha grado $d_{0,i}$ in $S(-d_{0,i})$!). Chiaramente $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ è un sottomodulo graduato di F_0, diciamo generato da elementi omogenei $\{m_{1,i} : i \in I_1\}$ di grado $d_{1,i} = \deg(m_{1,i})$. Perciò con lo stesso ragionamento definiamo $F_1 = \bigoplus_{i \in I_1} S(-d_{1,i})$ e la mappa omogenea $F_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathrm{Ker}(\epsilon) \subseteq F_0$ che manda e_i in $m_{1,i}$.

Continuando in questa maniera, troviamo una risoluzione libera graduata:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

Se un S-modulo graduato M è finitamente generato, allora in ognuno dei passi descritti precedentemente possiamo scegliere un sistema di generatori finito. In questo modo possiamo scrivere una risoluzione graduata libera di M come:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{\epsilon} M \to 0,$$

dove $\beta_{i,j}$ è il numero di generatori di grado j di $\mathrm{Ker}(\partial_{i-1})$ (se $i \geq 2$).

Sia $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ l'unico ideale massimale omogeneo di S.

DEF.: Una risoluzione libera graduata di un S-modulo graduato M:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

si dice minimale se, chiamando $F_k = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{k,j}}$:

$$\mathrm{Im}(\partial_i) \subseteq \mathfrak{m} F_{i-1} \quad \forall \; i \in \mathbb{N}$$

Come nel caso locale, una risoluzione libera graduata è minimale se e solo se le matrici associate alle mappe della risoluzione hanno entrate in $\mathfrak{m}$. Essendo le mappe della risoluzione omogenee, tali entrate devono essere polinomi omogenei di S. Dovendo stare in $\mathfrak{m}$, inoltre, tali polinomi o sono nulli, o hanno grado positivo.

OSS.: Una risoluzione libera graduata minimale di un modulo graduato finitamente generato esiste sempre: basta scegliere ogni volta un sistema di generatori omogenei che sia minimale.
Analogamente a quanto succede nel locale, la risoluzione libera graduata che ne risulterà sarà minimale grazie a Nakayama.

Un primo esempio di risoluzione libera graduata minimale (d' ora in poi abbrevieremo con RLGM) è dato dal complesso di Koszul di una successione S-regolare di polinomi omogenei $f_1, \ldots, f_c$ di gradi $\deg(f_i) = d_i$. Bisognerà solo stare attenti al fatto che la risoluzione sia graduata, sfasando opportunamente i moduli liberi coinvolti nella risoluzione: scordandosi della graduazione, tale risoluzione ha la forma:

$$0 \to S \to S^c \to \cdots \to S^{\binom{c}{i}} \to \cdots \to S^c \to S \to S/(f_1, \ldots, f_c) \to 0$$

dove una base di $S^{\binom{c}{i}}$ è data da $\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq c\}$.

Il modo di rendere la risoluzione libera data dal complesso di Koszul graduata è semplicemente sfasare i moduli liberi in modo che:

$$\deg(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) = d_{j_1} + \ldots + d_{j_i}.$$

ESEMPIO: Siano $S = K[x,y,z,u]$, $f_1 = x^2$, $f_2 = y^3z^4$ e $f_3 = u^{30}$; f_1, f_2, f_3 formano una sequenza S-regolare, e il complesso di Koszul $K(f_1, f_2, f_3; S)$ fornisce una RLGM di $A = S/(f_1, f_2, f_3)$ della forma:

$$\begin{aligned} 0 \to S(-39) \longrightarrow S(-9) \oplus S(-32) \oplus S(-37) \longrightarrow \\ S(-2) \oplus S(-7) \oplus S(-30) \longrightarrow S \to A \to 0 \end{aligned}$$

In particolare, il campo $K = S/\mathfrak{m}$ avrà una RLGM data dal complesso di Koszul del tipo:

$$0 \to S(-n) \to \cdots \to S(-i)^{\binom{n}{i}} \to \cdots \to S(-1)^n \to S \to K \to 0$$

Come nel caso locale, si dimostra:

PROP.: Data una RLGM di un S-modulo graduato finitamente generato M:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{1,j}} \xrightarrow{\partial_1} \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \xrightarrow{\epsilon} M \to 0,$$

allora

$$\beta_{i,j} = \dim_K(\mathrm{Tor}_i^S(M,K)_j).$$

In particolare, i numeri $\beta_{i,j}$ sono invarianti di M.

DEF.: I numeri $\beta_{i,j}(M) = \beta_{i,j}$ sono i numeri di Betti graduati di M. La somma $\beta_i(M) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_{i,j}$ è l' i-esimo numero di Betti totale di M.

Classicamente l' interesse è nel calcolare i numeri di Betti graduati di quozienti S/I, dove I è un ideale omogeneo di S. Per come abbiamo costruito le RLGM, abbiamo:

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i+1,j}(S/I) \quad \text{e } \beta_{0,j}(S/I) = \delta_{0,j}.$$

Ci sono algoritmi per calcolare la RLGM di un ideale basati sulle basi di Gröbner. Se l'ideale di partenza è monomiale la situazione è più semplice, ma anche in questo caso c' è del mistero.

ESEMPIO: Sia I il seguente ideale monomiale in $S = K[x_1, \dots, x_6]$:

$(x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_6, x_2x_4x_5, x_3x_4x_5, x_1x_4x_6, x_3x_4x_6, x_1x_5x_6, x_3x_5x_6)$

La RLGM di I è:

$$0 \to S(-5)^6 \to S(-4)^{15} \to S(-3)^{10} \to I \to 0$$

se la caratteristica di K è diversa da 2, mentre è

$$0 \to S(-6) \to S(-5)^6 \oplus S(-6) \to S(-4)^{15} \to S(-3)^{10} \to I \to 0$$

quando la caratteristica di K è 2 !

Corollario: Se M è un S-modulo graduato finitamente generato, allora:

$$\mathrm{projdim}(M) = \max\{i \in \mathbb{N} : \beta_i(M) \neq 0\}.$$

In particolare, poiché $\beta_i(M) = \dim_K(\mathrm{Tor}_i^S(M, K))$, anche nel contesto graduato

$$\mathrm{projdim}(M) \leq \mathrm{projdim}(K) \leq n$$

per ogni S-modulo graduato finitamente generato M. In effetti, poiché la RLGM è una particolare risoluzione libera graduata, possiamo dedurne che ogni S-modulo graduato finitamente generato M ha una risoluzione libera graduata di lunghezza $\leq n$.

OSS.: Ripensando alla dimostrazione del fatto che, nel locale, un modulo finitamente generato è libero se e solo se è proiettivo, osserviamo che l'unica cosa che abbiamo usato è Nakayama. Quindi si dimostra allo stesso modo che: un S-modulo graduato finitamente generato è libero se e solo se è proiettivo.

Poiché ogni S-modulo M graduato finitamente generato ha dimensione proiettiva finita e $\mathrm{depth}(S) = n$, la stessa identica dimostrazione che è stata data nel locale fornisce la seguente versione graduata della formula di Auslander-Buchsbaum:

Teorema (Auslander-Buchsbaum). Se M è un S-modulo graduato finitamente generato, allora:

$$\mathrm{depth}(M) + \mathrm{projdim}(M) = n.$$

OSS.: In particolare, se I è un ideale omogeneo di S, allora S/I è Cohen-Macaulay se e solo se

$$\mathrm{projdim}(S/I) = \mathrm{ht}(I).$$

DEF.: Sia M un S-modulo graduato finitamente generato. Dato un sistema minimale di generatori omogenei $m_1, \dots, m_k$, il modulo delle sizigie di M (rispetto a tale scelta di generatori) è definito come:

$$\mathrm{Syz}(M) = \{(f_1, \dots, f_k) \in S^k : f_1 m_1 + \dots + f_k m_k = 0\}$$

Il modulo delle sizigie di M è un sottomodulo graduato di S^k, e non è difficile vedere che, a meno di isomorfismo omogeneo, $\mathrm{Syz}(M)$ non dipende dai generatori scelti. Inoltre $\mathrm{Syz}(M)$ è finitamente generato (grazie al Teorema della Base di Hilbert!), quindi, ponendo $\mathrm{Syz}_0(M) = M$, possiamo definire ricorsivamente:

$$\mathrm{Syz}_i(M) = \mathrm{Syz}(\mathrm{Syz}_{i-1}(M)) \quad \forall \ i \in \mathbb{N}.$$

Teorema delle sizigie di Hilbert: Se M è un S-modulo graduato finitamente generato, allora:

$$\mathrm{Syz}_{n+1}(M) = 0.$$

Dimostrazione: Costruiamo una risoluzione minimale a partire da un sistema minimale di generatori omogenei $m_1, \ldots, m_k$ di M. Per definizione, il nucleo della presentazione $F_0 = S^k \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ che manda e_i in m_i è proprio $\mathrm{Syz}(M) = \mathrm{Ker}(\epsilon)$. Analogamente abbiamo che $\mathrm{Syz}_i(M) = \mathrm{Ker}(\partial_{i-1})$ per ogni $i \geq 2$, dove i ∂_i sono i differenziali della risoluzione minimale di M. Allora il teorema segue perché una risoluzione libera minimale di M ha al più lunghezza n. □

I numeri di Betti graduati sono un invariante più fine delle funzioni di Hilbert.

OSS.: Ricordiamo che la serie di Hilbert di S ha la forma:

$$\mathrm{HS}_S(t) = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

LEMMA: Se M è un S-modulo graduato finitamente generato con una risoluzione libera graduata (non necessariamente minimale)

$$0 \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{p,j}} \to \ldots \to \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_{0,j}} \to M \to 0.$$

Allora

$$\mathrm{HS}_M(t) = \frac{\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sum_{j\in\mathbb{Z}} \beta_{i,j} t^j}{(1-t)^n}.$$

Dimostrazione: Essendo le mappe nella risoluzione graduata omogenee, per ogni $d \in \mathbb{Z}$ la seguente è una sequenza esatta di K-spazi vettoriali:

$$0 \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)_d^{\beta_{p,j}} \to \ldots \to \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)_d^{\beta_{0,j}} \to M_d \to 0.$$

Allora $\mathrm{HS}_M(t) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{i,j} \mathrm{HS}_{S(-j)}(t)$. Ma

$$\mathrm{HS}_{S(-j)}(t) = t^j \, \mathrm{HS}_S(t) = \frac{t^j}{(1-t)^n}.$$

Allora

$$\mathrm{HS}_M(t) = \frac{\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_{i,j} t^j}{(1-t)^n},$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

OSS.: Se M è un S-modulo graduato finitamente generato, definiamo per ogni i:

$$m_i(M) = \min\{j : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

Allora $m_i(M)$ è il grado minimo di un elemento non nullo dell' i-esimo modulo F_i nella RLGM di M. Siccome ∂_i è omogeneo e

$$\mathrm{Im}(\partial_i) \subseteq \mathfrak{m}F_{i-1} \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(\partial_i) = \mathrm{Im}(\partial_{i+1}) \subseteq \mathfrak{m}F_i,$$

quindi abbiamo che F_{i-1} non è 0 in grado $m_i(M) - 1$. Quindi

$$m_i(M) > m_{i-1}(M).$$

PROP.: Se M è un S-modulo graduato finitamente generato e:

$$t_i(M) = \max\{j : \beta_{i,j}(M) \neq 0\} \quad \forall\ i,$$

allora $t_i(M) > t_{i-1}(M)$ se $i \leq n - \dim(M)$.

Dimostrazione: Per semplicità lo dimostriamo solo per $M = S/I$ nel qual caso dobbiamo dimostrare che:

$$t_i(S/I) > t_{i-1}(S/I) \quad \text{se} \quad i \leq \mathrm{ht}(I).$$

Consideriamo una RLGM di S/I

$$0 \to F_p \xrightarrow{\partial_p} \ldots \xrightarrow{\partial_1} F_0 \to 0$$

e applichiamole il funtore controvariante $\mathrm{Hom}_S(-, S)$ ottenendo il complesso:

$$0 \to \mathrm{Hom}_S(F_0, S) \xrightarrow{\partial_1^*} \ldots \xrightarrow{\partial_p^*} \mathrm{Hom}_S(F_p, S) \to 0.$$

L' i-esima coomologia di tale complesso è, per definizione,

$$\mathrm{Ext}^i_S(S/I, S),$$

che sappiamo essere 0 se $i < \mathrm{grado}(I) = \mathrm{ht}(I)$ (l' ultima eguaglianza vale perché S è Cohen-Macaulay).

Osserviamo che $t_i = t_i(S/I)$ è, per definizione, il massimo grado di un generatore minimale di F_i. Dunque $-t_i$ è il minimo grado in cui $\mathrm{Hom}_S(F_i, S)$ non è 0, sia

$$0 \neq \phi_i \in \mathrm{Hom}_S(F_i, S)_{-t_i}.$$

Siccome $\mathrm{Im}(\partial_i^*) \subseteq \mathfrak{m}\,\mathrm{Hom}_S(F_i, S)$, di certo $\phi_i \notin \mathrm{Im}(\partial_i^*)$. Se $i < \mathrm{ht}(I)$, abbiamo

$$\mathrm{Ker}(\partial_{i+1}^*) = \mathrm{Im}(\partial_i^*),$$

dunque in tal caso $0 \neq \partial_{i+1}^*(\phi_i) \subseteq \mathfrak{m}\,\mathrm{Hom}_S(F_{i+1}, S)$. Dunque $\mathrm{Hom}_S(F_{i+1}, S)$ è non nullo in grado $< -t_i$; riassumendo $t_{i+1} > t_i$ se $i < \mathrm{ht}(I)$. $\square$

Per visualizzare i numeri di Betti di un S-modulo graduato finitamente generato M è conveniente formare una tabella. La scelta naturale sarebbe inserire il numero $\beta_{i,j}(M)$ nell'entrata relativa all' i-esima colonna e la j-esima riga, ma così verrebbero troppe righe:

ESEMPIO: Se $I = (x^2, y^2) \subseteq K[x, y] = S$, una RLGM dell' S-modulo S/I è fornita dal complesso di Koszul $K(x^2, y^2; S)$:

$$0 \to S(-4) \to S(-2)^2 \to S \to S/I \to 0.$$

In questo caso, la tabella descritta sarebbe:

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	0	0
2	0	2	0
3	0	0	0
4	0	0	1

L'osservazione fatta poco prima, implica che, con le stesse notazioni $m_i(M) \geq m_0(M) + i$. Quindi, un modo più conveniente per riempire la nostra tabella di Betti, è inserire il numero $\beta_{i,i+j}(M)$ nell'entrata relativa all' i-esima colonna e la j-esima riga. In questo modo, la tabella dell'esempio precedente sarebbe:

	0	1	2
0	1	0	0
1	0	2	0
2	0	0	1

DEF.: La tabella di Betti di un S-modulo M graduato e finitamente generato, è la tabella $\beta(M)$ la cui entrata corrispondente all' i-esima colonna e la j-esima riga è $\beta_{i,i+j}(M)$.

Se si vogliono considerare contemporaneamente le tabelle di Betti di tutti gli S-moduli graduati finitamente generati, allora bisogna lavorare con tabelle con colonne in $\{0, \ldots, n\}$ e righe indiciate su tutto $\mathbb{Z}$. Se però si vuole considerare la tabella di Betti di un solo M, questa avrà entrate non nulle nel rettangolo righe per colonne:

$$\{m_0(M), \ldots, r\} \times \{0, \ldots, \mathrm{projdim}(M)\}$$

dove:

$$r = \max\{j - i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

DEF.: La regolarità d Castelnuovo-Mumford di un S-modulo M graduato finitamente generato è:

$$\mathrm{reg}(M) = \max\{j - i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

In questo corso abbiamo visto che un invariante fondamentale di un A-modulo M finitamente generato è la sua profondità. Se A è un anello regolare, grazie alla formula di Auslander-Buchsbaum

$$\mathrm{depth}(M) = \dim A - \mathrm{projdim}(M),$$

quindi conoscere la dimensione proiettiva di M è equivalente a conoscere la sua profondità. Quando $A = S$ è un anello di polinomi e M è graduato, $\mathrm{projdim}(M)$ fornisce la larghezza di $\beta(M)$.

Da questo discorso dovrebbe essere chiaro che, in ambito graduato, la regolarità di Castelnuovo-Mumford è un altro invariante fondamentale: essa fornisce l'altra dimensione di $\beta(M)$, l'altezza.

La scorsa lezione abbiamo provato che

$$t_i(M) - i \geq t_j(M) - j \quad \forall\ j < i \leq n - \dim(M).$$

Siccome

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{t_i(M) - i : i = 0, \dots, \mathrm{projdim}(M)\},$$

quindi per calcolare la regolarità di Castelnuovo-Mumford basta guardare le posizioni omologiche da $n - \dim M$ in poi.

Poiché solitamente il minimo grado in cui M è non zero (vale a dire $m_0(M)$) è noto in partenza, denoteremo $\beta(M)$ senza più specificare né righe né colonne:

$$\beta(M) = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & \beta_{i,i+j}(M) & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Spesso l'interesse si ha nel calcolare tabelle di Betti di moduli graduati ciclici S/I con I ideale omogeneo, ed in questo caso:

$$m_0(S/I) = 0.$$

Se I è l'ideale dell'esempio della slide 366, allora $\beta(S/I)$ è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

se $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Quando $\mathrm{char}(K) = 2$, invece $\beta(S/I)$ è:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

In questo esempio si può vedere che, indipendentemente da $\mathrm{char}(K)$, $\mathrm{ht}(I) = 3$. Quindi, S/I è Cohen-Macaulay se e solo se $\mathrm{char}(K) \neq 2$. La regolarità di Castelnuovo-Mumford di S/I, invece, è 2 o 3 a seconda che, rispettivamente, $\mathrm{char}(K) \neq 2$ o $\mathrm{char}(K) = 2$.

Teoria di Boij-Söderberg

Il teorema di Macaulay menzionato durante il corso caratterizza le funzioni da $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che sono funzioni di Hilbert di S/I dove $I \subseteq S$ è un ideale omogeneo. Nello stesso ordine di idee, sarebbe bello caratterizzare tutte le tabelle in

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{N}^{n+1}$$

che sono tabelle di Betti di S/I per qualche ideale omogeneo I. Questo problema, però, è probabilmente "hopeless".

Recentemente c' è stata una notevole svolta su questo argomento. Nel 2008 Boij e Söderberg hanno cambiato la prospettiva:

(i) Considerare $\beta(M)$ per tutti gli S-moduli M graduati finitamente generati, e non solo per gli S-moduli $M = S/I$.

(ii) Considerare le tabelle di Betti a meno di multipli razionali.

Il merito di Boij e Söderberg è stato quello di cambiare il punto di vista, e di proporre due congetture che avrebbero portato ad una classificazione completa di quali tabelle β in

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{Q}^{n+1}$$

sono tali che esistono S-modul $M_1, \ldots, M_m$ graduati e finitamente generati e numeri razionali positivi $q_1. \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ tali che:

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} q_i \beta(M_i).$$

Tali congetture sono diventate teoremi grazie ad un lavoro di Eisenbud e Schreyer del 2009.

Nelle slides successive lo scopo sarà quello di spiegare questa classificazione.

Essenzialmente, l' idea di considerare tutti i moduli e non solo quelli ciclici è per dare una struttura di semigruppo alle tabelle di Betti: dati due S-moduli M_1 e M_2 graduati e finitamente generati, siccome $\mathrm{Tor}_i^S(-,K)$ è un funtore additivo:

$$\beta(M_1) + \beta(M_2) = \beta(M_1 \oplus M_2).$$

Ovviamente l'insieme delle tabelle di Betti dei moduli del tipo S/I, invece, non è chiuso rispetto alla somma.

Inoltre studiare la struttura di semigruppo dell'insieme di tutte le tabelle di Betti è un' impresa troppo ardua,è più fattibile, come spesso accade, studiare il cono razionale da esse generato:

$$\left\{ \sum_{i=1}^{m} q_i \beta(M_i) \right\}$$

dove $m \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ e gli M_i sono S-moduli graduati finitamente generati.

DEF.: Un S-modulo graduato M ha risoluzione pura di tipo $(d_0, \ldots, d_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ se ha una risoluzione libera minimale del tipo:

$$0 \to S(-d_p)^{\beta_p} \to \ldots \to S(-d_1)^{\beta_1} \to S(-d_0)^{\beta_0} \to M \to 0.$$

Come abbiamo visto, una condizione necessaria per l' esistenza di un modulo M come nella definizione è che $d_0 < d_1 < \ldots < d_p$.

TEOREMA (Herzog-Kühl): Sia M un S-modulo graduato Cohen-Macaulay con risoluzione pura di tipo $(d_0, \ldots, d_p)$. Allora, $\beta_0 = \beta_0(M)$ determina gli altri $\beta_i = \beta_i(M)$ tramite la formula:

$$\beta_i = \beta_0 \cdot (-1)^{i+1} \prod_{0 \neq k \neq i} \frac{d_k - d_0}{d_k - d_i} \qquad \forall\ i = 1, \ldots, p$$

Inoltre, $e = e(M) = \beta_0 \cdot (1/p!) \cdot \prod_{k=1}^{p} (d_k - d_0)$.

Dimostrazione: Poichè M è Cohen-Macaulay, la formula di Auslander-Buchsbaum ci dice:

$$p = n - d, \qquad \text{dove } d = \dim(M).$$

Dalla formula per la serie di Hilbert di M in termini dalla sua risoluzione graduata otteniamo:

$$(1-t)^p h_M(t) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \beta_i t^{d_i}.$$

Chiamando $f(t) = (1-t)^p h_M(t)$ e $g(t) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \beta_i t^{d_i}$, otteniamo, per ogni $i \in \{0, \dots, p-1\}$, l'equazione:

$$0 = f^{(i)}(1) = g^{(i)}(1) = \sum_{k=0}^{p} ((-1)^k \beta_k \cdot d_k(d_k - 1) \cdots (d_k - i + 1)).$$

Inoltre, essendo che $h_M(1) = e(M) = e$, abbiamo

$$(-1)^p p! e = f^{(p)}(1) = g^{(p)}(1) = \sum_{k=0}^{p} ((-1)^k \beta_k \cdot d_k(d_k - 1) \cdots (d_k - p + 1)).$$

Quello appena descritto è un sistema lineare composto da $p+1$ equazioni nelle $p+1$ incognite $\beta_0, \ldots, \beta_p$. Rappresentiamo tale sistema come:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & (-1)^p \\ d_0 & -d_1 & \ldots & (-1)^p d_p \\ d_0(d_0-1) & -d_1(d_1-1) & \ldots & (-1)^p d_p(d_p-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0 \cdots (d_0-p+2) & -d_1 \cdots (d_1-p+2) & \ldots & (-1)^p d_p \cdots (d_p-p+2) \\ d_0 \cdots (d_0-p+1) & -d_1 \cdots (d_1-p+1) & \ldots & (-1)^p d_p \cdots (d_p-p+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^p p! e \end{pmatrix}$$

Quello appena descritto è un sistema lineare composto da $p+1$ equazioni nelle $p+1$ incognite $\beta_0, \ldots, \beta_p$. Rappresentiamo tale sistema come, dopo qualche operazione elementare sulle righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \ldots & (-1)^p \\ d_0 & -d_1 & \ldots & (-1)^p d_p \\ d_0^2 & -d_1^2 & \ldots & (-1)^p d_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0^{p-1} & -d_1^{p-1} & \ldots & (-1)^p d_p^{p-1} \\ d_0^p & -d_1^p & \ldots & (-1)^p d_p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{p-1} \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^p p! e \end{pmatrix}$$

La matrice di sopra è una matrice di Vandermonde, il cui determinante è ben noto. Usando la regola di Cramer otteniamo le soluzioni:

$$\beta_i = (-1)^i p! e \prod_{k \neq i} \frac{1}{d_k - d_i} \quad \forall\ i = 0, \ldots, p,$$

da cui seguono subito le formule che vogliamo dimostrare. $\square$

OSS.: Nel teorema di Herzog e Kühl otteniamo anche (con le stesse notazioni):

$$\beta_i = p!e(-1)^i \prod_{k \neq i} \frac{1}{d_k - d_i} \qquad \forall\ i = 0, \ldots, p.$$

DEF.: dato un vettore $\mathbf{d} = (d_0, \ldots, d_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ con $d_0 < d_1 < \ldots < d_p$, il diagramma puro $\pi(\mathbf{d})$ è la tabella in $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{N}^{n+1}$ con uniche entrate non nulle corrispondenti alla colonna i e la riga $d_i - i$ per ogni $i = 0, \ldots, p$; Il valore di tali entrate sarà inoltre dato da:

$$q \cdot (-1)^i \prod_{k \neq i} \frac{1}{d_k - d_i},$$

dove q è il più piccolo numero razionale positivo che rende tutti questi valori interi.

TEOREMA 1 (Eisenbud-Schreyer): Dato un vettore $(d_0, \ldots, d_p)$ in $\mathbb{N}^{p+1}$ $(p \leq n)$ con $d_0 < d_1 < \ldots < d_p$, esiste un S-modulo graduato Cohen-Macaulay con risoluzione pura di tipo $(d_0, \ldots, d_p)$.

Per il secondo teorema diamo un ordine parziale ai diagrammi puri: dati due vettori $\mathbf{d} = (d_0, \ldots, d_p)$ e $\mathbf{d}' = (d'_0, \ldots, d'_p)$ in $\mathbb{N}^{p+1}$ con $d_0 < d_1 < \ldots < d_p$ e $d'_0 < d'_1 < \ldots < d'_p$, diciamo che:

$$\mathbf{d} \leq \mathbf{d}' \quad \Leftrightarrow \quad d_i \leq d'_i \ \ \forall \ i = 0, \ldots, p.$$

TEOREMA 2 (Eisenbud-Schreyer): Dato un S-modulo graduato Cohen-Macaulay M di dimensione proiettiva p, la sua tabella di Betti si scrive in maniera unica come:

$$\beta(M) = \sum_{i=1}^{m} q_i \pi(\mathbf{d}_i)$$

dove $\mathbf{d}_1 < \mathbf{d}_2 < \ldots < \mathbf{d}_m$ e i q_i numeri razionali positivi.

Il secondo teorema di Eisenbud-Schreyer fornisce un algoritmo esplicito sul come calcolare i q_i e i $\mathbf{d}_i$.

ESEMPIO: Sia $I = (x^2, xy, y^3)$. Verificate come ESERCIZIO che $M = S/I$ è Cohen-Macaulay e che

$$\beta(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il più grande multiplo razionale

$$q_1 \cdot \pi(0,2,3) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 3q_1 & 2q_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tale che $\beta(M) - q_1 \cdot \pi(0,2,3)$ abbia entrate positive. Tale q_1 è evidentemente $1/2$, e

$$\beta_1 = \beta(M) - 1/2 \cdot \pi(0,2,3) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora si scelga il più grande multiplo razionale

$$q_2 \cdot \pi(0,2,4) = \begin{bmatrix} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

tale che $\beta_1 - q_2 \cdot \pi(0,2,4)$ abbia entrate positive. Tale q_2 è evidentemente 1/4, e

$$\beta_2 = \beta_1 - 1/4 \cdot \pi(0,2,4) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 \end{bmatrix}$$

Ma

$$\pi(0,3,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

quindi $\beta_2 = 1/4 \cdot \pi(0,3,4)$. Riassumendo, abbiamo trovato

$$\beta(M) = 1/2 \cdot \pi(0,2,3) + 1/4 \cdot \pi(0,2,4) + 1/4 \cdot \pi(0,3,4)$$