Condizioni di Serre e positività dell' h-vettore

Matteo Varbaro (Università di Genova)

24/9/2015 Genova

L' h-vettore

K un campo, R una K-algebra graduata standard,

L' h-vettore

K un campo, R una K-algebra graduata standard, cioè:

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i, \quad R_0 = K, \quad \dim_K R_1 < \infty, \quad R = K[R_1].$$

L' h-vettore

K un campo, R una K-algebra graduata standard, cioè:

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i, \quad R_0 = K, \quad \dim_K R_1 < \infty, \quad R = K[R_1].$$

Serie di Hilbert di R: $\mathrm{HS}_R(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_K R_i \cdot t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$.

L' h-vettore

K un campo, R una K-algebra graduata standard, cioè:

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i, \quad R_0 = K, \quad \dim_K R_1 < \infty, \quad R = K[R_1].$$

Serie di Hilbert di R: $\mathrm{HS}_R(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_K R_i \cdot t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$.

Teorema (Hilbert)

Esiste un polinomio $h_R(t) = h_0 + h_1 t + \ldots h_s t^s \in \mathbb{Z}[t]$ tale che

$$\mathrm{HS}_R(t) = \frac{h_R(t)}{(1-t)^d}, \quad d = \dim R.$$

K un campo, R una K-algebra graduata standard, cioè:

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i, \quad R_0 = K, \quad \dim_K R_1 < \infty, \quad R = K[R_1].$$

Serie di Hilbert di R: $\mathrm{HS}_R(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \dim_K R_i \cdot t^i \in \mathbb{Z}[[t]]$.

Teorema (Hilbert)

Esiste un polinomio $h_R(t) = h_0 + h_1 t + \ldots h_s t^s \in \mathbb{Z}[t]$ tale che

$$\mathrm{HS}_R(t) = \frac{h_R(t)}{(1-t)^d}, \quad d = \dim R.$$

Il vettore $(h_0, h_1, \ldots, h_s) \in \mathbb{Z}^{s+1}$ si chiama l' **h-vettore** di R.

L' h-vettore

L' h-vettore

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- ℓ è R-regolare.

L' h-vettore

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- ℓ è R-regolare.
- $h_R(t) = h_{R/(\ell)}(t)$.

L' h-vettore

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- ℓ è R-regolare.
- $h_R(t) = h_{R/(\ell)}(t)$.

Corollario

Se R è Cohen-Macaulay, allora $h_i \geq 0$ per ogni i.

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- ℓ è R-regolare.
- $h_R(t) = h_{R/(\ell)}(t)$.

Corollario

Se R è Cohen-Macaulay, allora $h_i \geq 0$ per ogni i.

D' altra parte, h_0 e h_1 sono positivi per ogni R .....

L' h-vettore

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- ℓ è R-regolare.
- $h_R(t) = h_{R/(\ell)}(t)$.

Corollario

Se R è Cohen-Macaulay, allora $h_i \geq 0$ per ogni i.

D' altra parte, h_0 e h_1 sono positivi per ogni R .....

Domanda

Dato $\ell \geq 2$, per quali R si ha $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$?

Data $0 \neq \ell \in R_1$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- ℓ è R-regolare.
- $h_R(t) = h_{R/(\ell)}(t)$.

Corollario

Se R è Cohen-Macaulay, allora $h_i \geq 0$ per ogni i.

D' altra parte, h_0 e h_1 sono positivi per ogni R .....

Domanda

Dato $\ell \geq 2$, per quali R si ha $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$?

Basta che R abbia profondità elevata?

Attenzione: il locale è un altro mondo!

Attenzione: il locale è un altro mondo!

Se $(A, \mathfrak{m})$ è Noetheriano e locale, allora $\mathrm{HS}_A(t) := \mathrm{HS}_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)}(t)$.

Attenzione: il locale è un altro mondo!

Se $(A, \mathfrak{m})$ è Noetheriano e locale, allora $\mathrm{HS}_A(t) := \mathrm{HS}_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)}(t)$.

In questa situazione A Cohen-Macaulay NON implica $h_i \geq 0 \ \ \forall\, i$.

Attenzione: il locale è un altro mondo!

Se $(A, \mathfrak{m})$ è Noetheriano e locale, allora $\mathrm{HS}_A(t) := \mathrm{HS}_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)}(t)$.

In questa situazione A Cohen-Macaulay NON implica $h_i \geq 0 \quad \forall\ i$.

Infatti, esistono anche domini 1-dimensionali tali che $h_2 < 0$.

Attenzione: il locale è un altro mondo!

Se $(A, \mathfrak{m})$ è Noetheriano e locale, allora $\mathrm{HS}_A(t) := \mathrm{HS}_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)}(t)$.

In questa situazione A Cohen-Macaulay NON implica $h_i \geq 0 \quad \forall\ i$.

Infatti, esistono anche domini 1-dimensionali tali che $h_2 < 0$.

Congettura (Rossi)

Se $(A, \mathfrak{m})$ è di Gorenstein e 1-dimensionale, allora $h_i \geq 0 \quad \forall\ i$.

Attenzione: il locale è un altro mondo!

Se $(A, \mathfrak{m})$ è Noetheriano e locale, allora $\mathrm{HS}_A(t) := \mathrm{HS}_{\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)}(t)$.

In questa situazione A Cohen-Macaulay NON implica $h_i \geq 0 \ \ \forall\ i$.

Infatti, esistono anche domini 1-dimensionali tali che $h_2 < 0$.

Congettura (Rossi)

Se $(A, \mathfrak{m})$ è di Gorenstein e 1-dimensionale, allora $h_i \geq 0 \ \ \forall\ i$.

Per oggi, ci occuperemo solo del caso graduato (standard).

Profondità e positività

Profondità e positività

Ci eravamo domandati se avere profondità alta implica la positività di qualche coefficiente dell' h-vettore ...

Ci eravamo domandati se avere profondità alta implica la positività di qualche coefficiente dell' h-vettore ... Riflettendoci un attimo, è immediato vedere che la risposta è NO, infatti:

Ci eravamo domandati se avere profondità alta implica la positività di qualche coefficiente dell' h-vettore ... Riflettendoci un attimo, è immediato vedere che la risposta è NO, infatti:

Fatto

Per ogni $d \in \mathbb{N}$ si può costruire una K-algebra graduata standard di dimensione d e profondità $d-1$ tale che $h_2 < 0$.

Profondità e positività

Ci eravamo domandati se avere profondità alta implica la positività di qualche coefficiente dell' h-vettore ... Riflettendoci un attimo, è immediato vedere che la risposta è NO, infatti:

Fatto

Per ogni $d \in \mathbb{N}$ si può costruire una K-algebra graduata standard di dimensione d e profondità $d-1$ tale che $h_2 < 0$.

D'altra parte ...

Ci eravamo domandati se avere profondità alta implica la positività di qualche coefficiente dell' h-vettore ... Riflettendoci un attimo, è immediato vedere che la risposta è NO, infatti:

Fatto

Per ogni $d \in \mathbb{N}$ si può costruire una K-algebra graduata standard di dimensione d e profondità $d-1$ tale che $h_2 < 0$.

D'altra parte ...

Teorema (Dao, Han, _)

depth $R \geq \ell$, $\mathrm{char}(K) = 0$ e Proj R è liscio $\implies h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Condizioni di Serre

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

Condizioni di Serre

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_{\mathfrak{p}}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Condizioni di Serre

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Osservazioni

- Ogni R soddisfa (S_0).

Condizioni di Serre

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Osservazioni

- Ogni R soddisfa (S_0).
- R soddisfa $(S_1) \iff R$ non ha primi immersi.

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Osservazioni

- Ogni R soddisfa (S_0).
- R soddisfa $(S_1) \iff R$ non ha primi immersi.
- R soddisfa (R_0) e $(S_1) \iff R$ è ridotto.

Condizioni di Serre

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Osservazioni

- Ogni R soddisfa (S_0).
- R soddisfa (S_1) $\iff$ R non ha primi immersi.
- R soddisfa (R_0) e (S_1) $\iff$ R è ridotto.
- R soddisfa (R_1) e (S_2) $\iff$ R è normale (Serre).

Condizioni di Serre

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Osservazioni

- Ogni R soddisfa (S_0).
- R soddisfa (S_1) $\iff$ R non ha primi immersi.
- R soddisfa (R_0) e (S_1) $\iff$ R è ridotto.
- R soddisfa (R_1) e (S_2) $\iff$ R è normale (Serre).
- R soddisfa (S_ℓ) per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ $\iff$ R è Cohen-Macaulay.

Per ogni $\ell \in \mathbb{N}$, le **condizioni di Serre** per R sono:

- (R_ℓ) se $R_\mathfrak{p}$ è regolare per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ di altezza $\leq \ell$.
- (S_ℓ) se $\operatorname{depth} R_\mathfrak{p} \geq \min\{\dim R_\mathfrak{p}, \ell\}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.

Osservazioni

- Ogni R soddisfa (S_0).
- R soddisfa (S_1) $\iff$ R non ha primi immersi.
- R soddisfa (R_0) e (S_1) $\iff$ R è ridotto.
- R soddisfa (R_1) e (S_2) $\iff$ R è normale (Serre).
- R soddisfa (S_ℓ) per ogni $\ell \in \mathbb{N}$ $\iff$ R è Cohen-Macaulay.
- R soddisfa (R_ℓ) per ogni $\ell < \dim R$ $\iff$ $\operatorname{Proj} R$ è liscio.

Osserviamo che se Proj R è liscio, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq \ell \iff R \text{ soddisfa } (S_\ell).$$

Osserviamo che se Proj R è liscio, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq \ell \iff R \text{ soddisfa } (S_\ell).$$

Allora ci si potrebbe fare la seguente domanda:

Condizioni di Serre

Osserviamo che se Proj R è liscio, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq \ell \iff R \text{ soddisfa } (S_\ell).$$

Allora ci si potrebbe fare la seguente domanda:

Domanda

Se R soddisfa (S_ℓ), abbiamo $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$?

Osserviamo che se Proj R è liscio, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq \ell \iff R \text{ soddisfa } (S_\ell).$$

Allora ci si potrebbe fare la seguente domanda:

Domanda

Se R soddisfa (S_ℓ), abbiamo $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$?

NO, ad esempio $R = S/I$ dove

$$I = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6) \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_6]$$

Osserviamo che se Proj R è liscio, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq \ell \iff R \text{ soddisfa } (S_\ell).$$

Allora ci si potrebbe fare la seguente domanda:

Domanda

Se R soddisfa (S_ℓ), abbiamo $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$?

NO, ad esempio $R = S/I$ dove

$$I = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6) \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_6]$$

soddisfa (S_2) ma ha serie di Hilbert $\frac{1+3t-t^2}{(1-t)^3}$ $(h_2 < 0)$.

Osserviamo che se Proj R è liscio, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq \ell \iff R \text{ soddisfa } (S_\ell).$$

Allora ci si potrebbe fare la seguente domanda:

Domanda

Se R soddisfa (S_ℓ), abbiamo $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$?

NO, ad esempio $R = S/I$ dove

$$I = (x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2^2, x_2x_3, x_3^2, x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6) \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_6]$$

soddisfa (S_2) ma ha serie di Hilbert $\frac{1+3t-t^2}{(1-t)^3}$ $(h_2 < 0)$.

In questo esempio, R non è ridotto ......

Positività di h_2

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e Proj R è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$.

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e $\operatorname{Proj} R$ è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$. In particolare, se R è un dominio allora $h_2 \geq 0$.

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e $\operatorname{Proj} R$ è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$. In particolare, se R è un dominio allora $h_2 \geq 0$.

In particolare, se R soddisfa (R_0) e (S_2), allora $h_2 \geq 0$ .....

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e $\operatorname{Proj} R$ è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$. In particolare, se R è un dominio allora $h_2 \geq 0$.

In particolare, se R soddisfa (R_0) e (S_2), allora $h_2 \geq 0$ .....

Congettura (Dao, Han, _)

Se R soddisfa $(R_{\ell-2})$ e (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e Proj R è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$. In particolare, se R è un dominio allora $h_2 \geq 0$.

In particolare, se R soddisfa (R_0) e (S_2), allora $h_2 \geq 0$ .....

Congettura (Dao, Han, _)

Se R soddisfa $(R_{\ell-2})$ e (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per ora sappiamo:

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e Proj R è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$. In particolare, se R è un dominio allora $h_2 \geq 0$.

In particolare, se R soddisfa (R_0) e (S_2), allora $h_2 \geq 0$ .....

Congettura (Dao, Han, _)

Se R soddisfa $(R_{\ell-2})$ e (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per ora sappiamo:

Teorema (Dao, Han, _)

Sia $d = \dim R$ e $\mathrm{char}(K) = 0$. Allora:

- Se R soddisfa (R_{d-1}) e (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Positività di h_2

Teorema (Chiantini, Ciliberto; Dao, Han, _)

Se R è ridotto e $\operatorname{Proj} R$ è connesso in codimensione 1, allora $h_2 \geq 0$. In particolare, se R è un dominio allora $h_2 \geq 0$.

In particolare, se R soddisfa (R_0) e (S_2), allora $h_2 \geq 0$ .....

Congettura (Dao, Han, _)

Se R soddisfa $(R_{\ell-2})$ e (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per ora sappiamo:

Teorema (Dao, Han, _)

Sia $d = \dim R$ e $\operatorname{char}(K) = 0$. Allora:

- Se R soddisfa (R_{d-1}) e (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.
- Se R soddisfa (R_{d-2}) e (S_{d-1}), allora $h_2, \ldots, h_{d-1} \geq 0$.

Condizioni globali

È anche possibile ottere questo tipo di risultati imponendo condizioni globali su R piuttosto che sulle singolarità di $\operatorname{Proj} R$:

Condizioni globali

È anche possibile ottere questo tipo di risultati imponendo condizioni globali su R piuttosto che sulle singolarità di Proj R:

Teorema (Murai, Terai)

Se R è un anello di Stanley-Reisner che soddisfa (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Condizioni globali

È anche possibile ottere questo tipo di risultati imponendo condizioni globali su R piuttosto che sulle singolarità di Proj R:

Teorema (Murai, Terai)

Se R è un anello di Stanley-Reisner che soddisfa (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per dimostrare questo risultato, Murai e Terai provano il seguente fatto:

Condizioni globali

È anche possibile ottere questo tipo di risultati imponendo condizioni globali su R piuttosto che sulle singolarità di Proj R:

Teorema (Murai, Terai)

Se R è un anello di Stanley-Reisner che soddisfa (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per dimostrare questo risultato, Murai e Terai provano il seguente fatto: sia $R = S/I$ dove S è un anello di polinomi in n variabili su K, d la dimensione di R, e $\omega_S = S(-n)$ il modulo canonico di S.

Condizioni globali

È anche possibile ottere questo tipo di risultati imponendo condizioni globali su R piuttosto che sulle singolarità di Proj R:

Teorema (Murai, Terai)

Se R è un anello di Stanley-Reisner che soddisfa (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per dimostrare questo risultato, Murai e Terai provano il seguente fatto: sia $R = S/I$ dove S è un anello di polinomi in n variabili su K, d la dimensione di R, e $\omega_S = S(-n)$ il modulo canonico di S.

Teorema (Murai, Terai)

Se $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall \ i = 0, \ldots, d-1$, allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Condizioni globali

È anche possibile ottere questo tipo di risultati imponendo condizioni globali su R piuttosto che sulle singolarità di $\operatorname{Proj} R$:

Teorema (Murai, Terai)

Se R è un anello di Stanley-Reisner che soddisfa (S_ℓ), allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Per dimostrare questo risultato, Murai e Terai provano il seguente fatto: sia $R = S/I$ dove S è un anello di polinomi in n variabili su K, d la dimensione di R, e $\omega_S = S(-n)$ il modulo canonico di S.

Teorema (Murai, Terai)

Se $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall \ i = 0, \ldots, d-1$, allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

D' altra parte, si può vedere facilmente che ....

Condizioni globali

Proposizione

R soddisfa (S_ℓ) se e solo se

$$\dim \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall\ i = 0, \ldots, d-1.$$

Condizioni globali

Proposizione

R soddisfa (S_ℓ) se e solo se

$$\dim \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall\ i = 0, \ldots, d-1.$$

Quindi:

Proposizione

Se R soddisfa (S_ℓ) e $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq \dim \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S)$ per ogni $i = 0, \ldots, d-1$, allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

Proposizione

R soddisfa (S_ℓ) se e solo se

$$\dim \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall\ i = 0, \ldots, d-1.$$

Quindi:

Proposizione

Se R soddisfa (S_ℓ) e $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq \dim \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S)$ per ogni $i = 0, \ldots, d-1$, allora $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

REGOLARITÀ $\leq$ DIMENSIONE significa che la coomologia locale a supporto nel massimale irrilevante è 0 in gradi positivi .....

Anelli F-puri

Anelli F-puri

Se $\mathrm{char}(K) = p > 0$, sia $F : R \to R$ la mappa di Frobenius $r \mapsto r^p$.

Anelli F-puri

Se $\mathrm{char}(K) = p > 0$, sia $F : R \to R$ la mappa di Frobenius $r \mapsto r^p$.

Definizione

R è F-**puro** se $F(R)$ è addendo diretto (come $F(R)$-modulo) di R.

Se char$(K) = p > 0$, sia $F : R \to R$ la mappa di Frobenius $r \mapsto r^p$.

Definizione

R è F-**puro** se $F(R)$ è addendo diretto (come $F(R)$-modulo) di R.

Per un ideale $J \subseteq S$, $J^{[p]} = (f^p : f \in J) \subseteq S$.

Anelli F-puri

Se $\mathrm{char}(K) = p > 0$, sia $F : R \to R$ la mappa di Frobenius $r \mapsto r^p$.

Definizione

R è F-**puro** se $F(R)$ è addendo diretto (come $F(R)$-modulo) di R.

Per un ideale $J \subseteq S$, $J^{[p]} = (f^p : f \in J) \subseteq S$.

Teorema (Fedder)

$R = S/I$ è F-puro $\iff$ $I^{[p]} : I \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$, dove $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Anelli F-puri

Se $\mathrm{char}(K) = p > 0$, sia $F : R \to R$ la mappa di Frobenius $r \mapsto r^p$.

Definizione

R è F-**puro** se $F(R)$ è addendo diretto (come $F(R)$-modulo) di R.

Per un ideale $J \subseteq S$, $J^{[p]} = (f^p : f \in J) \subseteq S$.

Teorema (Fedder)

$R = S/I$ è F-puro $\iff$ $I^{[p]} : I \not\subseteq \mathfrak{m}^{[p]}$, dove $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Esempio

Se I è monomiale square-free, notiamo che $(x_1 \cdots x_n)^{p-1} \in I^{[p]} : I$, dunque ogni anello di Stanley-Reisner è F-puro.

Anelli F-puri

Anelli F-puri

Teorema (Dao, Han, _)

Se R è F-puro, allora:

$$\operatorname{reg} \operatorname{Ext}^i_S(R, \omega_S) \leq \dim \operatorname{Ext}^i_S(R, \omega_S) \ \forall \ i \geq 0.$$

Teorema (Dao, Han, _)

Se R è F-puro, allora:

$$\operatorname{reg} \operatorname{Ext}^i_S(R, \omega_S) \leq \dim \operatorname{Ext}^i_S(R, \omega_S) \ \forall\ i \geq 0.$$

In particolare, se R è F-puro e soddisfa (S_ℓ):

$$h_2, \ldots, h_\ell \geq 0.$$

GIN

In realtà, se $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall \ i = 0, \ldots, d-1$ possiamo dedurre più di $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$.

In realtà, se $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \; \forall \; i = 0, \ldots, d-1$ possiamo dedurre più di $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$. Ad esempio, se $\operatorname{char}(K) = 0$:

In realtà, se $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall \ i = 0, \ldots, d-1$ possiamo dedurre più di $h_2, \ldots, h_\ell \geq 0$. Ad esempio, se $\operatorname{char}(K) = 0$:

Lemma

Se $\operatorname{reg} \operatorname{Ext}_S^{n-i}(R, \omega_S) \leq i - \ell \ \forall \ i = 0, \ldots, d-1$, allora i generatori minimali di $\operatorname{Gin}(I)$ di grado $< \ell$ sono monomi in $K[x_1, \ldots, x_{n-d}]$.

In realtà, se $\operatorname{reg}\operatorname{Ext}_S^{n-i}(R,\omega_S) \leq i-\ell \;\forall\; i = 0,\ldots,d-1$ possiamo dedurre più di $h_2,\ldots,h_\ell \geq 0$. Ad esempio, se $\operatorname{char}(K) = 0$:

Lemma

Se $\operatorname{reg}\operatorname{Ext}_S^{n-i}(R,\omega_S) \leq i-\ell \;\forall\; i = 0,\ldots,d-1$, allora i generatori minimali di $\operatorname{Gin}(I)$ di grado $< \ell$ sono monomi in $K[x_1,\ldots,x_{n-d}]$.

Corollario

Se I è generato in gradi $\leq \delta$, $\operatorname{Proj} R$ è liscio di codimensione c, allora:

$$\operatorname{depth} R \geq c(\delta-1) \implies R \text{ è Cohen-Macaulay.}$$

TANTI AUGURI, MARILINA !!!!