

## Sequenze spettrali

A anello. Una **sequenza spettrale**  $\mathbb{E}$  consiste nei seguenti dati:

- ▶ Una collezione di  $A$ -moduli  $(E_r^{p,q})$ , per  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  e  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ .
- ▶ Fissato  $r$ , per ogni  $(p, q)$ , mappe di  $A$ -moduli

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$$

tali che  $d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r, q+r-1} = 0$ .

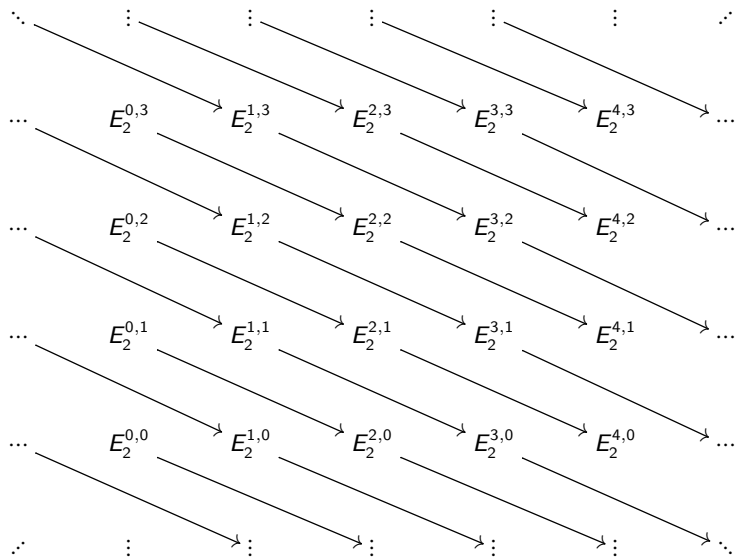
- ▶ Per ogni  $r$ ,  $E_{r+1}^{p,q} = \frac{\text{Ker}(d_r^{p,q})}{\text{Im}(d_r^{p-r, q+r-1})}$ .

Conviene immaginarsi una sequenza spettrale come un libro, in cui a pagina  $r$  è illustrato il foglio  $(E_r^{\bullet, \bullet})$  .....

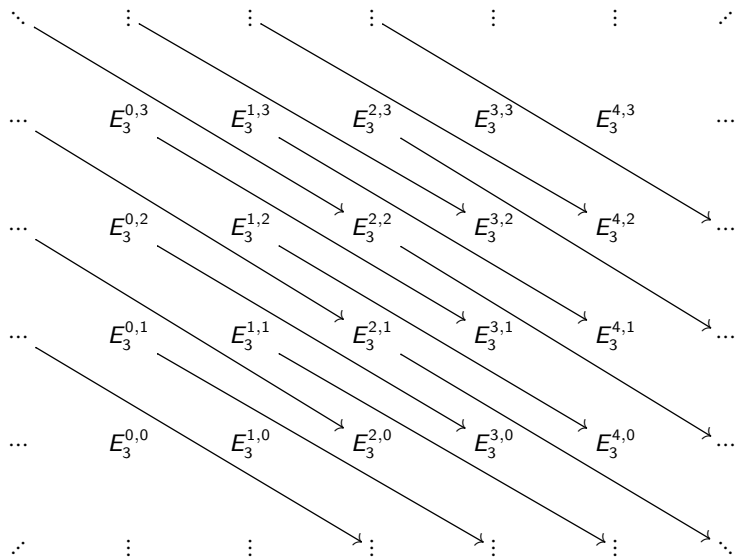
$$(d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \rightarrow E_1^{p+1,q})$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
 \dots & \longrightarrow & E_1^{0,3} & \longrightarrow & E_1^{1,3} & \longrightarrow & E_1^{2,3} & \longrightarrow & E_1^{3,3} & \longrightarrow & E_1^{4,3} & \longrightarrow & \dots \\
 \dots & \longrightarrow & E_1^{0,2} & \longrightarrow & E_1^{1,2} & \longrightarrow & E_1^{2,2} & \longrightarrow & E_1^{3,2} & \longrightarrow & E_1^{4,2} & \longrightarrow & \dots \\
 \dots & \longrightarrow & E_1^{0,1} & \longrightarrow & E_1^{1,1} & \longrightarrow & E_1^{2,1} & \longrightarrow & E_1^{3,1} & \longrightarrow & E_1^{4,1} & \longrightarrow & \dots \\
 \dots & \longrightarrow & E_1^{0,0} & \longrightarrow & E_1^{1,0} & \longrightarrow & E_1^{2,0} & \longrightarrow & E_1^{3,0} & \longrightarrow & E_1^{4,0} & \longrightarrow & \dots \\
 \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots
 \end{array}$$

$$(d_2^{p,q} : E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2,q-1})$$



$$(d_3^{p,q} : E_3^{p,q} \rightarrow E_3^{p+3,q-2})$$



Diciamo che  $\mathbb{E}$  è *eventualmente costante* se esiste  $r_0$  tale che:

$$d_r^{p,q} = 0 \quad \forall r \geq r_0, (p, q) \in \mathbb{Z}^2.$$

Ciò è equivalente a dire che  $E_r^{p,q} = E_{r_0}^{p,q} \quad \forall r \geq r_0, (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ . In tal caso si dice che  $\mathbb{E}$  *degenera* a pagina  $r_0$ , e si pone

$$E_\infty^{p,q} := E_{r_0}^{p,q} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2.$$

**OSS.:** Per ogni  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ , consideriamo l'insieme

$$Q_r = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : E_r^{p,q} \neq 0\},$$

e si noti che  $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset Q_4 \supset \dots$ . Dunque se  $Q_1$  è un insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$ , allora  $\mathbb{E}$  è eventualmente costante.

**DEF.:** Diremo che  $\mathbb{E}$  è *limitata* se  $Q_1$  è un insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$ .

(Quasi tutte le sequenze spettrali provenienti da situazioni "naturali" sono limitate).

Una sequenza spettrale  $\mathbb{E}$  eventualmente costante converge ad una collezione di  $A$ -moduli  $(E^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  se: per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ , esiste una filtrazione di  $A$ -sottomoduli di  $E^n$ :

$$\dots \supset F^p E^n \supset F^{p+1} E^n \supset \dots$$

tale che:

- ▶  $\bigcap_{p \in \mathbb{Z}} F^p E^n = \{0\}$  e  $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} F^p E^n = E^n$ ;
- ▶  $E_\infty^{p,q} \cong F^p E^{p+q} / F^{p+1} E^{p+q} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ .

Solitamente, quello che succede è che per qualche motivo si conosce qualche pagina di  $\mathbb{E}$  (solitamente la prima o la seconda). Quindi, se si sa che  $(E_r^{p,q})_{(p,q)}$  è l' $r$ -esima pagina di una sequenza spettrale convergente a  $(E^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , si scrive:

$$E_r^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}.$$

**OSS:** Sia  $\mathbb{E} = (E_r^{i,j})$  sequenza spettrale tale che  $E_r^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ .

- ▶ Se  $A$  è un campo e  $\mathbb{E}$  degenera a pagina  $r$ , allora:

$$E^n \cong \bigoplus_{p+q=n} E_r^{p,q}.$$

- ▶  $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ p + q = n \Rightarrow E^n = 0$ .
- ▶ Se esiste  $p_0$  tale che  $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ p \neq p_0$ , allora  $\mathbb{E}$  degenera a pagina  $r$  e  $E^n \cong E_r^{p_0, n-p_0}$ .
- ▶ Se esiste  $q_0$  tale che  $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ q \neq q_0$  e  $r \geq 2$ , allora  $\mathbb{E}$  degenera a pagina  $r$  e  $E^n \cong E_r^{n-q_0, q_0}$ .



Sia  $C^\bullet$  un complesso di cocatene con differenziali  $(d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Ad ogni *filtrazione regolare* di  $C^\bullet$  si può associare una sequenza spettrale convergente alla coomologia di  $C^\bullet$ :

**DEF.:** Una *filtrazione regolare* di  $C^\bullet$  consiste in una filtrazione di  $A$ -sottomoduli di  $C^n$  (per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ )

$$\dots \supset F^p C^n \supset F^{p+1} C^n \supset \dots$$

tale che:

- ▶  $\bigcap_{p \in \mathbb{Z}} F^p C^n = \{0\}$  e  $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} F^p C^n = C^n$ ;
- ▶  $d^n(F^p C^n) \subset F^p C^{n+1}$ .

**TEOREMA:** Ad ogni filtrazione regolare di  $C^\bullet$  è associata una sequenza spettrale convergente ad  $(E^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dove  $E^n = H^n(C^\bullet)$ . Inoltre  $F^p E^n \cong H^n(F^p C^\bullet)$ .

**Dim.:** Chi è interessato alla dimostrazione può leggerla alle pagine 203-206 del libro di Gelfand and Manin *Methods of homological algebra*.

## Complessi doppi

Un **complesso doppio** di  $A$ -moduli  $C^{\bullet, \bullet}$  consiste in:

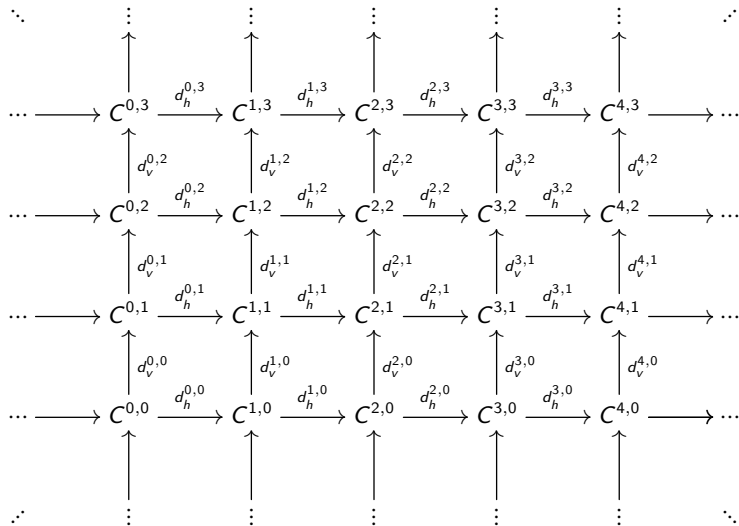
- ▶ complessi di  $A$ -moduli  $C^{\bullet, q}$  per ogni  $q \in \mathbb{Z}$ , con differenziali  $(d_h^{n, q})_{n \in \mathbb{Z}}$ ;
- ▶ complessi di  $A$ -moduli  $C^{p, \bullet}$  per ogni  $p \in \mathbb{Z}$ , con differenziali  $(d_v^{p, n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ,

tali che tutti i seguenti quadrati commutino:

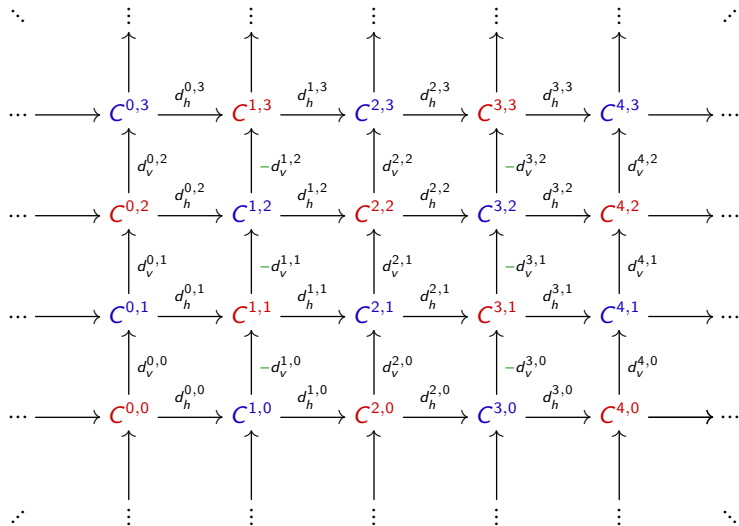
$$\begin{array}{ccc} C^{p, q+1} & \xrightarrow{d_h^{p+1, q}} & C^{p+1, q+1} \\ \uparrow d_v^{p, q} & & \uparrow d_v^{p+1, q} \\ C^{p, q} & \xrightarrow{d_h^{p, q}} & C^{p+1, q} \end{array}$$

Il *complesso totale* di  $C^{\bullet, \bullet}$  è il seguente complesso  $\text{Tot}(C)^{\bullet}$ :

- ▶  $\text{Tot}(C)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p, q}$ ;
- ▶  $d^n : \text{Tot}(C)^n \rightarrow \text{Tot}(C)^{n+1}$  manda  $x \in C^{p, n-p}$  in  $d_h^{p, n-p} x + (-1)^p d_v^{p, n-p} x$ .



# Tot(C)•



Dalla definizione abbiamo immediatamente *due* filtrazioni regolari di  $\text{Tot}(C)^\bullet$ :

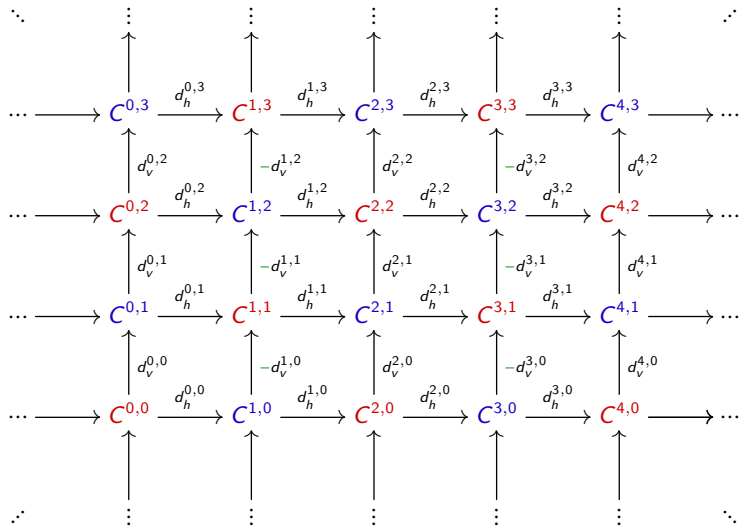
(i)  $'F^p \text{Tot}(C)^\bullet$  con  $'F^p \text{Tot}(C)^n = \bigoplus_{i \geq p} C^{i, n-i}$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ ;

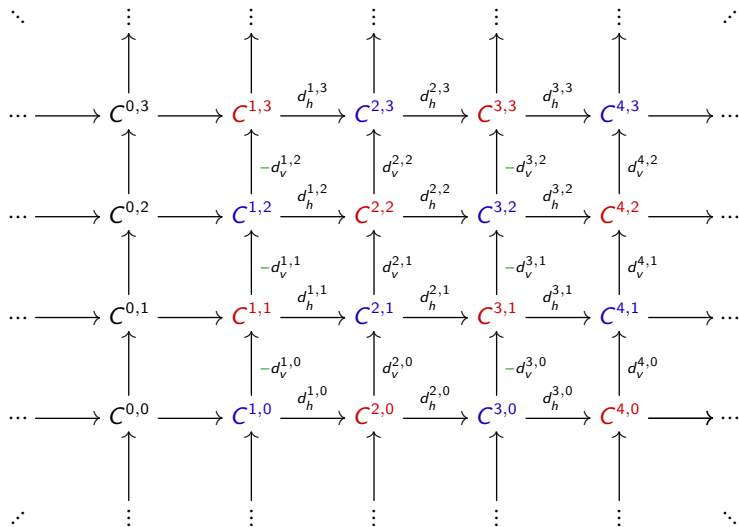
(ii)  $''F^q \text{Tot}(C)^\bullet$  con  $''F^q \text{Tot}(C)^n = \bigoplus_{j \geq q} C^{n-j, j}$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

Come visto, dunque queste filtrazioni danno luogo a due sequenze spettrali, rispettivamente  $({}'E_r^{p,q})$  e  $({}''E_r^{p,q})$ , *entrambe convergenti alla coomologia di  $\text{Tot}(C)^\bullet$* .

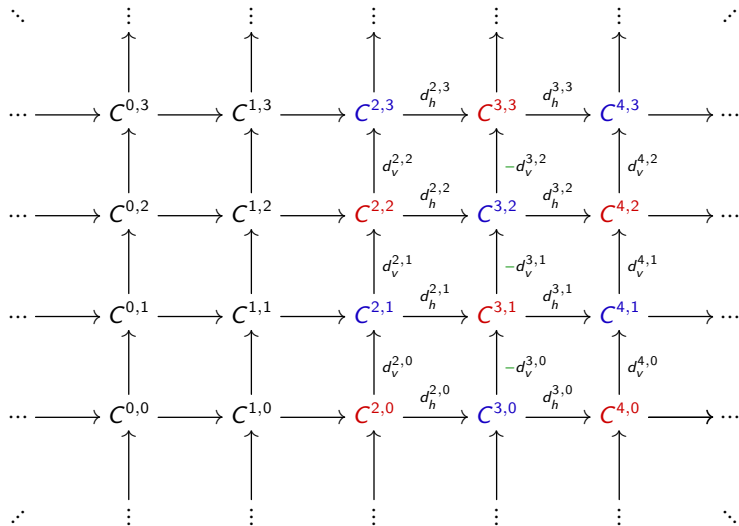
Il nostro scopo ora è quello di descrivere le *second*e pagine di tali sequenze spettrali in termini di  $C^{\bullet, \bullet}$ , ma prima diamo un'occhiata alle filtrazioni descritte sopra...

# $F^0 \text{Tot}(C)^\bullet$

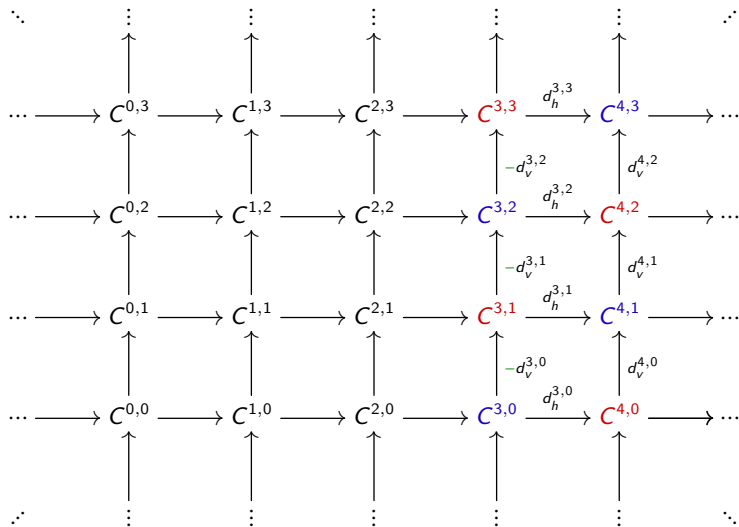


$F^1 \text{Tot}(C) \bullet$ 

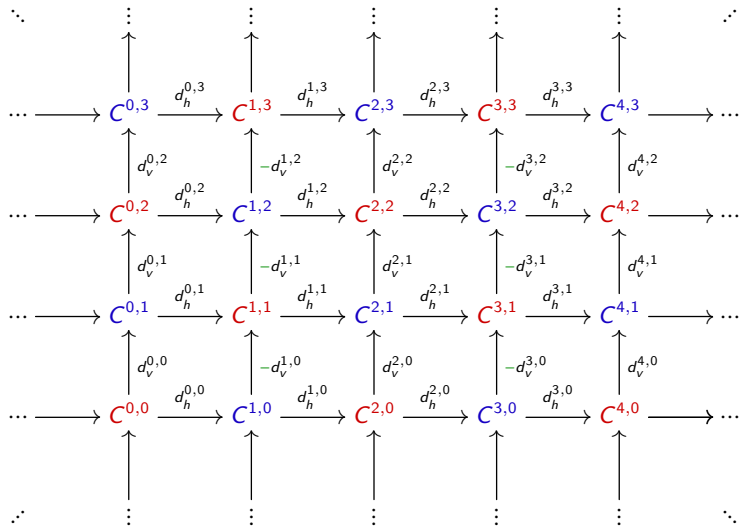
# $F^2 \text{Tot}(C)^\bullet$



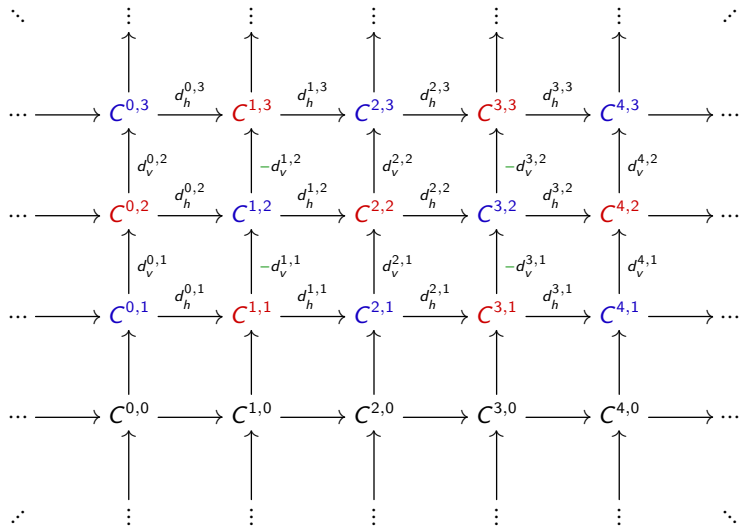


$\mathcal{F}^3 \text{Tot}(C) \bullet$ 


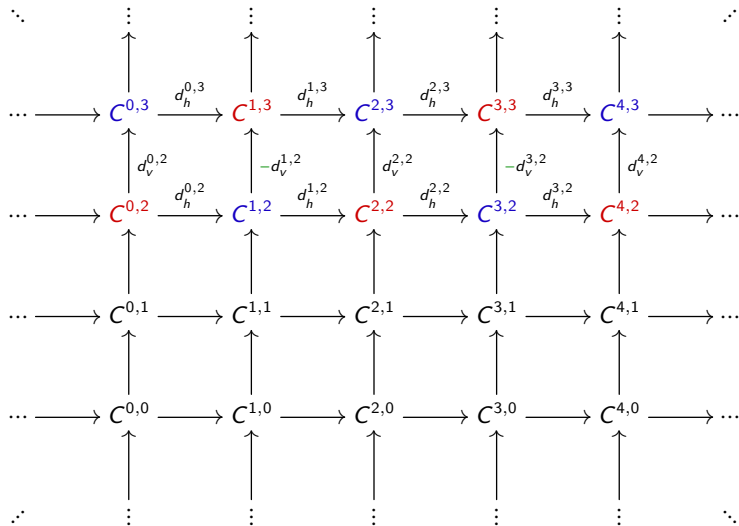
# "F<sup>0</sup> Tot(C)•



# "F<sup>1</sup> Tot(C)•



# "F<sup>2</sup> Tot(C)•



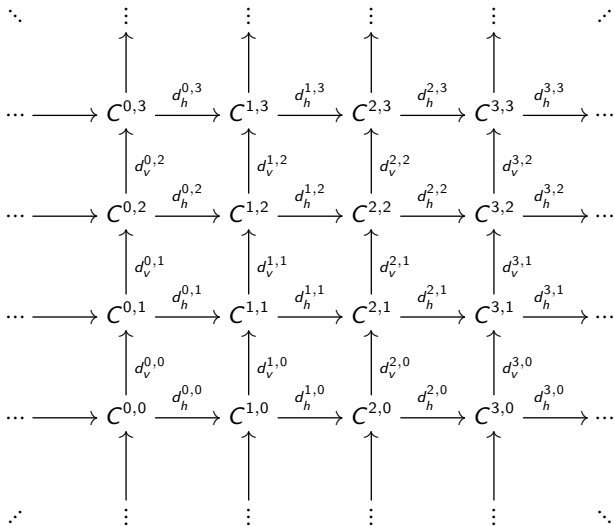
In un complesso doppio  $C^{\bullet, \bullet}$  possiamo vedere le mappe orizzontali come morfismi di complessi:

$$\dots \rightarrow C^{p-1, \bullet} \xrightarrow{d_h^{p-1, \bullet}} C^{p, \bullet} \xrightarrow{d_h^{p, \bullet}} C^{p+1, \bullet} \rightarrow \dots$$

e quelle verticali come morfismi di complessi:

$$\dots \rightarrow C^{\bullet, q-1} \xrightarrow{d_v^{\bullet, q-1}} C^{\bullet, q} \xrightarrow{d_v^{\bullet, q}} C^{\bullet, q+1} \rightarrow \dots$$

Dunque abbiamo mappe indotte sulle coomologie .....



# Coomologia verticale

$$\begin{array}{cccccc} \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ \dots & \longrightarrow & H_V^3(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,3}} & H_V^3(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,3}} & H_V^3(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,3}} & H_V^3(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & H_V^2(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,2}} & H_V^2(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,2}} & H_V^2(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,2}} & H_V^2(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & H_V^1(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,1}} & H_V^1(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,1}} & H_V^1(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,1}} & H_V^1(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & H_V^0(C^{0,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{0,0}} & H_V^0(C^{1,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{1,0}} & H_V^0(C^{2,\bullet}) & \xrightarrow{d_h^{2,0}} & H_V^0(C^{3,\bullet}) & \longrightarrow & \dots \\ \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

# Coomologia orizzontale della coomologia verticale

$$\begin{array}{cccccc} \diagdown & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \diagup \\ \dots & H_h^0 H_v^3(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^1 H_v^3(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^2 H_v^3(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^3 H_v^3(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \dots & H_h^0 H_v^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^1 H_v^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^2 H_v^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^3 H_v^2(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \dots & H_h^0 H_v^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^1 H_v^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^2 H_v^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^3 H_v^1(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \dots & H_v^0 H_h^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^1 H_v^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^2 H_v^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_h^3 H_v^0(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \diagup & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$



# Coomologia orizzontale

$$\begin{array}{ccccccc} \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots & & H_h^0(C^{\bullet,3}) & & H_h^1(C^{\bullet,3}) & & H_h^2(C^{\bullet,3}) & & H_h^3(C^{\bullet,3}) & & \dots \\ & & \uparrow d_v^{0,2} & & \uparrow d_v^{1,2} & & \uparrow d_v^{2,2} & & \uparrow d_v^{3,2} & & \\ \dots & & H_h^0(C^{\bullet,2}) & & H_h^1(C^{\bullet,2}) & & H_h^2(C^{\bullet,2}) & & H_h^3(C^{\bullet,2}) & & \dots \\ & & \uparrow d_v^{0,1} & & \uparrow d_v^{1,1} & & \uparrow d_v^{2,1} & & \uparrow d_v^{3,1} & & \\ \dots & & H_h^0(C^{\bullet,1}) & & H_h^1(C^{\bullet,1}) & & H_h^2(C^{\bullet,1}) & & H_h^3(C^{\bullet,1}) & & \dots \\ & & \uparrow d_v^{0,0} & & \uparrow d_v^{1,0} & & \uparrow d_v^{2,0} & & \uparrow d_v^{3,0} & & \\ \dots & & H_h^0(C^{\bullet,0}) & & H_h^1(C^{\bullet,0}) & & H_h^2(C^{\bullet,0}) & & H_h^3(C^{\bullet,0}) & & \dots \\ \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{array}$$

# Coomologia verticale della coomologia orizzontale

$$\begin{array}{cccccc} \diagdown & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \diagup \\ \dots & H_V^3 H_h^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^3 H_h^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^3 H_h^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^3 H_h^3(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \dots & H_V^2 H_h^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^2 H_h^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^2 H_h^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^2 H_h^3(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \dots & H_V^1 H_h^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^1 H_h^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^1 H_h^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^1 H_h^3(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \dots & H_V^0 H_h^0(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^0 H_h^1(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^0 H_h^2(C^{\bullet, \bullet}) & & H_V^0 H_h^3(C^{\bullet, \bullet}) & & \dots \\ \diagup & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

**TEOREMA:** Col le notazioni, introdotte si ha:

$$'E_2^{p,q} = H_h^p H_v^q(C^{\bullet,\bullet}) \quad \text{e} \quad ''E_2^{p,q} = H_v^p H_h^q(C^{\bullet,\bullet}).$$

In particolare,  $H_h^p H_v^q(C^{\bullet,\bullet}) \Rightarrow H^{p+q}(\text{Tot}(C)^{\bullet}) \Leftarrow H_v^p H_h^q(C^{\bullet,\bullet})$ .

**Dim.:** Chi è interessato alla dimostrazione può leggerla a pagina 209 di Gelfand-Manin, Proposizione 10.

Siano  $M$  ed  $N$  due  $A$ -moduli, e  $P_{\bullet} \rightarrow M \rightarrow 0$  e  $Q_{\bullet} \rightarrow N \rightarrow 0$  rispettive risoluzioni proiettive. Per essere coerenti con la notazione coomologica finora adottata, poniamo  $P^i := P_{-i}$  e  $Q^i := Q_{-i}$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$ . In questo modo, ad esempio, la risoluzione proiettiva di  $M$  è:

$$\dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Si consideri il complesso doppio  $T^{\bullet,\bullet}$  tale che, per ogni  $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ :

- ▶  $T^{i,j} = P^i \otimes_A Q^j$ ;
- ▶  $T^{\bullet,j} = P^{\bullet} \otimes_A Q^j$  e  $T^{i,\bullet} = P^i \otimes_A Q^{\bullet}$ .

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & 0 \\
 \ddots & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

# Coomologia verticale

$$\begin{array}{cccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A N & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A N & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A N & \longrightarrow & P^0 \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

# Coomologia orizzontale della coomologia verticale

		0	0	0
...	$(L_3(- \otimes_A N))(M)$	$(L_2(- \otimes_A N))(M)$	$(L_1(- \otimes_A N))(M)$	$(L_0(- \otimes_A N))(M)$
...	0	0	0	0
...	0	0	0	0
...	0	0	0	0
...	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^{-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^{-2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & P^{-3} \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & P^{-2} \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & P^{-1} \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & P^0 \otimes_A Q^{-3} & \longrightarrow & 0 \\
 \ddots & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & 
 \end{array}$$

# Coomologia orizzontale

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & \uparrow & \\ \dots & & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^0 & 0 \\ & & & & & \uparrow & \\ \dots & & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^{-1} & 0 \\ & & & & & \uparrow & \\ \dots & & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^{-2} & 0 \\ & & & & & \uparrow & \\ \dots & & 0 & 0 & 0 & M \otimes_A Q^{-3} & 0 \\ & & & & & \uparrow & \\ \dots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$



# Coomologia verticale della coomologia orizzontale

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & (L_0(M \otimes_A -))(N) & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & (L_1(M \otimes_A -))(N) & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & (L_2(M \otimes_A -))(N) & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & (L_3(M \otimes_A -))(N) & & 0 \\ & & & & & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Essendo ogni modulo proiettivo piatto, per ogni  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  si ha:

$$H^k(T^{i, \bullet}) = \begin{cases} P^i \otimes_A N & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{coomologia verticale})$$

$$H^k(T^{\bullet, j}) = \begin{cases} M \otimes_A Q^j & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{coomologia orizzontale})$$

Quindi la coomologia orizzontale della coomologia verticale:

$$'E_2^{i,j} = H_h^i H_v^j(T^{\bullet, \bullet}) = \begin{cases} (L_{-i}(- \otimes_A N))(M) & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la coomologia verticale della coomologia orizzontale sarà:

$$''E_2^{i,j} = H_v^i H_h^j(T^{\bullet, \bullet}) = \begin{cases} (L_{-i}(M \otimes_A -))(N) & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora  $'E_2^{i,j} = 'E_\infty^{i,j}$ , e  $''E_2^{i,j} = ''E_\infty^{i,j}$ . Ma poiché le due sequenze spettrali convergono alla stessa cosa, cioè a  $H^{i+j}(\text{Tot}(T)^\bullet)$ , devono essere uguali:

$$(L_i(- \otimes_A N))(M) \cong (L_i(M \otimes_A -))(N) \cong H^{-i}(\text{Tot}(T)^\bullet) =: \text{Tor}_i^A(M, N).$$

**ESERCIZIO:** 1. Dimostrare che  $\text{Tor}_i^A(M, N) \cong \text{Tor}_i^A(N, M)$ .

2. Usare lo stesso metodo per dimostrare che

$$(R^i(\text{Hom}_A(M, -)))(N) \cong (R^i(\text{Hom}_A(-, N)))(M) =: \text{Ext}_A^i(M, N).$$