IDEALI TEST, MOLTIPLICATORI E INVARIANTI

Matteo Varbaro

Università degli Studi di Genova

Ideali moltiplicatori

Ideali moltiplicatori

Dato un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ che si annulla in un punto z, il suo log-canonical threshold è definito come:

$$\mathrm{lct}_z(f) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \exists \text{ un intorno } B \text{ di } z \text{ t.c. } \int_B \frac{1}{|f|^{2\lambda}} < \infty\}$$

Ideali moltiplicatori

Dato un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ che si annulla in un punto z, il suo log-canonical threshold è definito come:

$$\mathrm{lct}_z(f) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \exists \text{ un intorno } B \text{ di } z \text{ t.c. } \int_B \frac{1}{|f|^{2\lambda}} < \infty\}$$

ESEMPIO: $\mathrm{lct}_0(x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}) = \min_i\{1/a_i\}$.

Ideali moltiplicatori

Dato un polinomio $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ che si annulla in un punto z, il suo log-canonical threshold è definito come:

$$\mathrm{lct}_z(f) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} : \exists \text{ un intorno } B \text{ di } z \text{ t.c. } \int_B \frac{1}{|f|^{2\lambda}} < \infty\}$$

ESEMPIO: $\mathrm{lct}_0(x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}) = \min_i\{1/a_i\}$.

Partendo da questa nozione, dato un ideale $I = (f_1, \dots, f_r)$ in $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, si definisce l'ideale moltiplicatore (con coefficiente λ) come:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I) = \left\{ g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N] : \frac{|g|^2}{(\sum_{i=1}^r |f_i|^2)^\lambda} \in L^1_{\mathrm{loc}} \right\}$$

Ideali moltiplicatori

Ideali moltiplicatori

Alternativamente, se $I \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_N]$ (con K campo di caratteristica 0) e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, l'ideale moltiplicatore (con coefficiente λ) è:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I) = \pi_* \mathcal{O}_X(K_{X/\operatorname{Spec}(S)} - \lfloor \lambda \cdot F \rfloor),$$

Ideali moltiplicatori

Alternativamente, se $I \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_N]$ (con K campo di caratteristica 0) e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, l'ideale moltiplicatore (con coefficiente λ) è:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I) = \pi_* \mathcal{O}_X(K_{X/\operatorname{Spec}(S)} - \lfloor \lambda \cdot F \rfloor),$$

dove

(i) $\pi : X \to \operatorname{Spec}(S)$ è una log-risoluzione di I;

(ii) $I \cdot \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-F)$;

(iii) $K_{X/\operatorname{Spec}(S)}$ è il divisore canonico relativo a π.

Notazioni

Notazioni

Dati interi positivi $t \leq m \leq n$, si consideri la matrice $m \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

le cui entrate sono variabili su un campo K.

Notazioni

Dati interi positivi $t \leq m \leq n$, si consideri la matrice $m \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

le cui entrate sono variabili su un campo K. Sia $K[X]$ l'anello di polinomi generato dalle entrate di X, e $I_t \subseteq K[X]$ l'ideale primo di definizione del luogo delle matrici in $\mathbb{A}^{mn}$ di rango $< t$.

Notazioni

Dati interi positivi $t \leq m \leq n$, si consideri la matrice $m \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

le cui entrate sono variabili su un campo K. Sia $K[X]$ l'anello di polinomi generato dalle entrate di X, e $I_t \subseteq K[X]$ l'ideale primo di definizione del luogo delle matrici in $\mathbb{A}^{mn}$ di rango $< t$. È ben noto che l'ideale I_t è generato dai t-minori di X.

Notazioni

Dati interi positivi $t \leq m \leq n$, si consideri la matrice $m \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

le cui entrate sono variabili su un campo K. Sia $K[X]$ l'anello di polinomi generato dalle entrate di X, e $I_t \subseteq K[X]$ l'ideale primo di definizione del luogo delle matrici in $\mathbb{A}^{mn}$ di rango $< t$. È ben noto che l'ideale I_t è generato dai t-minori di X.

Fissiamo inoltre due K-spazi vettoriali V e W di dimensioni, rispettivamente, m ed n,

Notazioni

Dati interi positivi $t \leq m \leq n$, si consideri la matrice $m \times n$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

le cui entrate sono variabili su un campo K. Sia $K[X]$ l'anello di polinomi generato dalle entrate di X, e $I_t \subseteq K[X]$ l'ideale primo di definizione del luogo delle matrici in $\mathbb{A}^{mn}$ di rango $< t$. È ben noto che l'ideale I_t è generato dai t-minori di X.

Fissiamo inoltre due K-spazi vettoriali V e W di dimensioni, rispettivamente, m ed n, ed il gruppo $G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$.

L'azione di G su $K[X]$

L'azione di G su $K[X]$

Fissate delle basi di V e W, il gruppo G agisce su $K[X]$ estendendo la seguente azione sulle forme lineari:

$$(A, B) \cdot X = AXB^{-1} \quad \forall\, (A, B) \in G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W).$$

L'azione di G su $K[X]$

Fissate delle basi di V e W, il gruppo G agisce su $K[X]$ estendendo la seguente azione sulle forme lineari:

$$(A, B) \cdot X = AXB^{-1} \quad \forall\, (A, B) \in G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W).$$

Si noti che, rispetto a tale azione, l'ideale I_t è invariante.

L'azione di G su $K[X]$

Fissate delle basi di V e W, il gruppo G agisce su $K[X]$ estendendo la seguente azione sulle forme lineari:

$$(A, B) \cdot X = AXB^{-1} \quad \forall\, (A, B) \in G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W).$$

Si noti che, rispetto a tale azione, l'ideale I_t è invariante. In caratteristica 0, De Concini, Eisenbud e Procesi hanno descritto e studiato tutti gli ideali invarianti di $K[X]$.

La formula di Cauchy

La formula di Cauchy

Considerando la naturale azione diagonale di G su $V \otimes W^*$, il seguente isomorfismo di anelli è G-equivariante:

$$K[X] \cong \mathrm{Sym}(V \otimes W^*) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(V \otimes W^*)$$

La formula di Cauchy

Considerando la naturale azione diagonale di G su $V \otimes W^*$, il seguente isomorfismo di anelli è G-equivariante:

$$K[X] \cong \mathrm{Sym}(V \otimes W^*) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(V \otimes W^*)$$

Se $\mathrm{char}(K) = 0$, la formula di Cauchy fornisce la decomposizione di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ in G-moduli irriducibili:

La formula di Cauchy

Considerando la naturale azione diagonale di G su $V \otimes W^*$, il seguente isomorfismo di anelli è G-equivariante:

$$K[X] \cong \mathrm{Sym}(V \otimes W^*) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(V \otimes W^*)$$

Se $\mathrm{char}(K) = 0$, la formula di Cauchy fornisce la decomposizione di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ in G-moduli irriducibili:

$$\mathrm{Sym}(V \otimes W^*) \cong \bigoplus_{\sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*,$$

La formula di Cauchy

Considerando la naturale azione diagonale di G su $V \otimes W^*$, il seguente isomorfismo di anelli è G-equivariante:

$$K[X] \cong \mathrm{Sym}(V \otimes W^*) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(V \otimes W^*)$$

Se $\mathrm{char}(K) = 0$, la formula di Cauchy fornisce la decomposizione di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ in G-moduli irriducibili:

$$\mathrm{Sym}(V \otimes W^*) \cong \bigoplus_{\sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*,$$

dove σ varia tra i diagrammi di Young (cioè $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \mathbb{N}^k$ con $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_k$) con $\sigma_1 \leq m$ e S_σ sono i funtori di Schur:

La formula di Cauchy

Considerando la naturale azione diagonale di G su $V \otimes W^*$, il seguente isomorfismo di anelli è G-equivariante:

$$K[X] \cong \mathrm{Sym}(V \otimes W^*) = \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(V \otimes W^*)$$

Se $\mathrm{char}(K) = 0$, la formula di Cauchy fornisce la decomposizione di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ in G-moduli irriducibili:

$$\mathrm{Sym}(V \otimes W^*) \cong \bigoplus_{\sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*,$$

dove σ varia tra i diagrammi di Young (cioè $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \mathbb{N}^k$ con $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_k$) con $\sigma_1 \leq m$ e S_σ sono i funtori di Schur: ad esempio, $S_{(d)} V = \bigwedge^d V$ e $S_{(1^d)} V = \mathrm{Sym}^d V$.

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Quindi i sottospazi vettoriali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono a sottoinsiemi Σ di diagrammi di Young:

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Quindi i sottospazi vettoriali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono a sottoinsiemi Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*.$$

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Quindi i sottospazi vettoriali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono a sottoinsiemi Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*.$$

Dal lavoro di DEP un tale spazio vettoriale è un ideale se e solo se:

$$\sigma \in \Sigma,\ \tau \supset \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma.$$

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Quindi i sottospazi vettoriali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono a sottoinsiemi Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*.$$

Dal lavoro di DEP un tale spazio vettoriale è un ideale se e solo se:

$$\sigma \in \Sigma,\ \tau \supset \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma.$$

Inoltre, l'ideale I_σ generato da $S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*$ si decompone come:

$$I_\sigma = \bigoplus_{\tau \supseteq \sigma} S_\tau V \otimes S_\tau W^*$$

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Quindi i sottospazi vettoriali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono a sottoinsiemi Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*.$$

Dal lavoro di DEP un tale spazio vettoriale è un ideale se e solo se:

$$\sigma \in \Sigma,\ \tau \supset \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma.$$

Inoltre, l'ideale I_σ generato da $S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*$ si decompone come:

$$I_\sigma = \bigoplus_{\tau \supseteq \sigma} S_\tau V \otimes S_\tau W^*$$

Si noti che l'ideale determinantale I_t corrisponde ad $I_{(t)}$.

Gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$.

Quindi i sottospazi vettoriali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono a sottoinsiemi Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto \bigoplus_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*.$$

Dal lavoro di DEP un tale spazio vettoriale è un ideale se e solo se:

$$\sigma \in \Sigma,\ \tau \supset \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma.$$

Inoltre, l'ideale I_σ generato da $S_\sigma V \otimes S_\sigma W^*$ si decompone come:

$$I_\sigma = \bigoplus_{\tau \supseteq \sigma} S_\tau V \otimes S_\tau W^*$$

Si noti che l'ideale determinantale I_t corrisponde ad $I_{(t)}$. Dato un insieme (finito) Σ di diagrammi di Young denoteremo con:

$$I(\Sigma) = \sum_{\sigma \in \Sigma} I_\sigma.$$

Le funzioni γ

Le funzioni γ

Dunque, in caratteristica 0, gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono ad insiemi finiti Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto I(\Sigma).$$

Le funzioni γ

Dunque, in caratteristica 0, gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono ad insiemi finiti Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto I(\Sigma).$$

Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$, consideriamo la seguente funzione γ_i definita sui diagrammi di Young:

$$\gamma_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \max\{0, \sigma_j - i + 1\}, \quad \text{dove} \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$

Le funzioni γ

Dunque, in caratteristica 0, gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono ad insiemi finiti Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto I(\Sigma).$$

Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$, consideriamo la seguente funzione γ_i definita sui diagrammi di Young:

$$\gamma_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \max\{0, \sigma_j - i + 1\}, \quad \text{dove} \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$

Dato un insieme finito Σ di diagrammi, si consideri il politopo $P_\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ ottenuto come l'involucro convesso dei punti $\{(\gamma_1(\sigma), \ldots, \gamma_m(\sigma)) : \sigma \in \Sigma\}$.

Le funzioni γ

Dunque, in caratteristica 0, gli ideali G-invarianti di $\mathrm{Sym}(V \otimes W^*)$ corrispondono ad insiemi finiti Σ di diagrammi di Young:

$$\Sigma \mapsto I(\Sigma).$$

Per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$, consideriamo la seguente funzione γ_i definita sui diagrammi di Young:

$$\gamma_i(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \max\{0, \sigma_j - i + 1\}, \quad \text{dove} \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$

Dato un insieme finito Σ di diagrammi, si consideri il politopo $P_\Sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ ottenuto come l'involucro convesso dei punti $\{(\gamma_1(\sigma), \ldots, \gamma_m(\sigma)) : \sigma \in \Sigma\}$.

Con Ines Henriques, abbiamo dato una descrizione esplicita degli ideali moltiplicatori di $I(\Sigma)$ in termini del politopo P_Σ.

Lo scopo del resto del seminario sarà descrivere gli ideali moltiplicatori nel caso in cui $\Sigma = \{\sigma\}$;

Lo scopo del resto del seminario sarà descrivere gli ideali moltiplicatori nel caso in cui $\Sigma = \{\sigma\}$; In altre parole, descriveremo gli ideali moltiplicatori (e di conseguenza il log-canonical threshold) di I_σ per ogni diagramma di Young σ.

Lo scopo del resto del seminario sarà descrivere gli ideali moltiplicatori nel caso in cui $\Sigma = \{\sigma\}$; In altre parole, descriveremo gli ideali moltiplicatori (e di conseguenza il log-canonical threshold) di I_σ per ogni diagramma di Young σ.

Nel caso di ideali determinantali I_t ($\sigma = (t)$), gli ideali moltiplicatori erano stati calcolati da Johnson nel 2003 usando le note log-risoluzioni delle varietà determinantali.

Lo scopo del resto del seminario sarà descrivere gli ideali moltiplicatori nel caso in cui $\Sigma = \{\sigma\}$; In altre parole, descriveremo gli ideali moltiplicatori (e di conseguenza il log-canonical threshold) di I_σ per ogni diagramma di Young σ.

Nel caso di ideali determinantali I_t ($\sigma = (t)$), gli ideali moltiplicatori erano stati calcolati da Johnson nel 2003 usando le note log-risoluzioni delle varietà determinantali. Recentemente Docampo ha ritrovato la formula per il log-canonical threshold di I_t studiando gli schemi jet associati a varietà determinantali.

Lo scopo del resto del seminario sarà descrivere gli ideali moltiplicatori nel caso in cui $\Sigma = \{\sigma\}$; In altre parole, descriveremo gli ideali moltiplicatori (e di conseguenza il log-canonical threshold) di I_σ per ogni diagramma di Young σ.

Nel caso di ideali determinantali I_t ($\sigma = (t)$), gli ideali moltiplicatori erano stati calcolati da Johnson nel 2003 usando le note log-risoluzioni delle varietà determinantali. Recentemente Docampo ha ritrovato la formula per il log-canonical threshold di I_t studiando gli schemi jet associati a varietà determinantali.

Dato un prodotto di minori $\Delta = \delta_1 \cdots \delta_k \in K[X]$, dove δ_i è un α_i-minore di X, ci riferiremo a $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ come alla taglia di Δ.

Lo scopo del resto del seminario sarà descrivere gli ideali moltiplicatori nel caso in cui $\Sigma = \{\sigma\}$; In altre parole, descriveremo gli ideali moltiplicatori (e di conseguenza il log-canonical threshold) di I_σ per ogni diagramma di Young σ.

Nel caso di ideali determinantali I_t ($\sigma = (t)$), gli ideali moltiplicatori erano stati calcolati da Johnson nel 2003 usando le note log-risoluzioni delle varietà determinantali. Recentemente Docampo ha ritrovato la formula per il log-canonical threshold di I_t studiando gli schemi jet associati a varietà determinantali.

Dato un prodotto di minori $\Delta = \delta_1 \cdots \delta_k \in K[X]$, dove δ_i è un α_i-minore di X, ci riferiremo a $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ come alla taglia di Δ. Come vedremo, gli ideali moltiplicatori di I_σ sono generati da prodotti di minori, la cui appartenenza o meno all'ideale dipende solo dalla taglia.

TEOREMA (Henriques, -): Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma)$ è generato dai prodotti di minori la cui taglia α soddisfa:

TEOREMA (Henriques, -): Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma)$ è generato dai prodotti di minori la cui taglia α soddisfa:

$$\gamma_i(\alpha) \geq \lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1) \quad \forall\ i = 1, \ldots, m.$$

TEOREMA (Henriques, -): Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma)$ è generato dai prodotti di minori la cui taglia α soddisfa:

$$\gamma_i(\alpha) \geq \lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m - i + 1)(n - i + 1) \;\; \forall\; i = 1, \ldots, m.$$

Grazie ad un risultato in DEP, equivalentemente:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma) = \bigcap_{i=1}^{m} I_i^{(\lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1))}$$

TEOREMA (Henriques, -): Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma)$ è generato dai prodotti di minori la cui taglia α soddisfa:

$$\gamma_i(\alpha) \geq \lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m - i + 1)(n - i + 1) \quad \forall\ i = 1, \ldots, m.$$

Grazie ad un risultato in DEP, equivalentemente:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma) = \bigcap_{i=1}^{m} I_i^{(\lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1))}$$

In particolare, il log-canonical threshold di I_σ è:

$$\mathrm{lct}(I_\sigma) = \min_i \left\{ \frac{(m - i + 1)(n - i + 1)}{\gamma_i(\sigma)} \right\}.$$

Strategia dimostrativa

Strategia dimostrativa

La nostra strategia è stata quella di sviluppare una teoria che permetta di calcolare ideali test (e dunque F-pure thresholds) di ideali con proprietà (estremamente) buone di un anello di polinomi S su un campo K di caratteristica positiva.

Strategia dimostrativa

La nostra strategia è stata quella di sviluppare una teoria che permetta di calcolare ideali test (e dunque F-pure thresholds) di ideali con proprietà (estremamente) buone di un anello di polinomi S su un campo K di caratteristica positiva.

Da qui gli ideali moltiplicatori verranno dedotti via un risultato di Hara e Yoshida che, rozzamente parlando, dice che se la caratteristica p di K è grande abbastanza:

Strategia dimostrativa

La nostra strategia è stata quella di sviluppare una teoria che permetta di calcolare ideali test (e dunque F-pure thresholds) di ideali con proprietà (estremamente) buone di un anello di polinomi S su un campo K di caratteristica positiva.

Da qui gli ideali moltiplicatori verranno dedotti via un risultato di Hara e Yoshida che, rozzamente parlando, dice che se la caratteristica p di K è grande abbastanza:

$$\begin{array}{c}\text{ideali test della}\\ \text{riduzione a caratteristica } p\end{array} = \begin{array}{c}\text{riduzione a caratteristica } p\\ \text{degli ideali moltiplicatori}\end{array}$$

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Una caratterizzazione degli ideali G-invarianti di $K[X]$, se K è un campo di caratteristica positiva, non c'è.

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Una caratterizzazione degli ideali G-invarianti di $K[X]$, se K è un campo di caratteristica positiva, non c'è. Né è chiaro, a priori, come definire gli ideali I_σ in caratteristica positiva.

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Una caratterizzazione degli ideali G-invarianti di $K[X]$, se K è un campo di caratteristica positiva, non c'è. Né è chiaro, a priori, come definire gli ideali I_σ in caratteristica positiva. Però, sappiamo comunque avere a che fare con "abbastanza" ideali G-invarianti anche in caratteristica positiva, almeno per i nostri scopi!

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Una caratterizzazione degli ideali G-invarianti di $K[X]$, se K è un campo di caratteristica positiva, non c'è. Né è chiaro, a priori, come definire gli ideali I_σ in caratteristica positiva. Però, sappiamo comunque avere a che fare con "abbastanza" ideali G-invarianti anche in caratteristica positiva, almeno per i nostri scopi!

Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, denoteremo con

$$D_\sigma = I_{\sigma_1} \cdots I_{\sigma_k} \subseteq K[X].$$

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Una caratterizzazione degli ideali G-invarianti di $K[X]$, se K è un campo di caratteristica positiva, non c'è. Né è chiaro, a priori, come definire gli ideali I_σ in caratteristica positiva. Però, sappiamo comunque avere a che fare con "abbastanza" ideali G-invarianti anche in caratteristica positiva, almeno per i nostri scopi!

Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, denoteremo con

$$D_\sigma = I_{\sigma_1} \cdots I_{\sigma_k} \subseteq K[X].$$

TEOREMA (DEP): Se $\mathrm{char}(K) = 0$, allora $\overline{I_\sigma} = D_\sigma$.

Ideali G-invarianti in caratteristica positiva

Una caratterizzazione degli ideali G-invarianti di $K[X]$, se K è un campo di caratteristica positiva, non c'è. Né è chiaro, a priori, come definire gli ideali I_σ in caratteristica positiva. Però, sappiamo comunque avere a che fare con "abbastanza" ideali G-invarianti anche in caratteristica positiva, almeno per i nostri scopi!

Dato un diagramma di Young $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ con $\sigma_1 \leq m$, denoteremo con

$$D_\sigma = I_{\sigma_1} \cdots I_{\sigma_k} \subseteq K[X].$$

TEOREMA (DEP): Se $\mathrm{char}(K) = 0$, allora $\overline{I_\sigma} = D_\sigma$.

COROLLARIO: Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathcal{J}(\lambda \bullet I_\sigma) = \mathcal{J}(\lambda \bullet D_\sigma)$.

Ideali test

Ideali test

Sia $S = K[x_1, \ldots, x_N]$ un anello di polinomi su un campo K di caratteristica $p > 0$.

Ideali test

Sia $S = K[x_1, \dots, x_N]$ un anello di polinomi su un campo K di caratteristica $p > 0$. Dato un ideale $I = (f_1, \dots, f_r) \subseteq S$ e una potenza $q = p^e$, ricordiamo la notazione:

$$I^{[q]} = (f_1^q, \dots, f_r^q) \subseteq S.$$

Ideali test

Sia $S = K[x_1, \ldots, x_N]$ un anello di polinomi su un campo K di caratteristica $p > 0$. Dato un ideale $I = (f_1, \ldots, f_r) \subseteq S$ e una potenza $q = p^e$, ricordiamo la notazione:

$$I^{[q]} = (f_1^q, \ldots, f_r^q) \subseteq S.$$

Inoltre con $I^{[1/q]}$ denoteremo il più piccolo ($\exists!$) ideale $J \subseteq S$ tale che $I \subseteq J^{[q]}$.

DEFINIZIONE: Dato $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, l'ideale test di I (con coefficiente λ) è:

$$\tau(\lambda \bullet I) = \bigcup_{e>0} \left(I^{\lceil \lambda p^e \rceil} \right)^{[1/p^e]}$$

TEOREMA (HY): Dati $I \subseteq P = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_N]$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un numero primo $p \gg 0$ tale che:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \tau(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

TEOREMA (HY): Dati $I \subseteq P = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N]$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un numero primo $p \gg 0$ tale che:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \tau(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Con Henriques abbiamo calcolato gli ideali test (e di conseguenza gli F-pure thresholds) di ogni ideale del tipo D_σ.

TEOREMA (HY): Dati $I \subseteq P = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_N]$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un numero primo $p \gg 0$ tale che:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \tau(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Con Henriques abbiamo calcolato gli ideali test (e di conseguenza gli F-pure thresholds) di ogni ideale del tipo D_σ. Un' osservazione interessante è che essi sono "gli stessi" in ogni caratteristica.

TEOREMA (HY): Dati $I \subseteq P = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_N]$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un numero primo $p \gg 0$ tale che:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \tau(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Con Henriques abbiamo calcolato gli ideali test (e di conseguenza gli F-pure thresholds) di ogni ideale del tipo D_σ. Un' osservazione interessante è che essi sono "gli stessi" in ogni caratteristica.

Ricordiamo che l'F-pure threshold degli ideali determinantali ($\sigma = (t)$) era già stato calcolato da Miller, Singh, - ,

TEOREMA (HY): Dati $I \subseteq P = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_N]$ e $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, esiste un numero primo $p \gg 0$ tale che:

$$\mathcal{J}(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \tau(\lambda \bullet I \cdot P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Con Henriques abbiamo calcolato gli ideali test (e di conseguenza gli F-pure thresholds) di ogni ideale del tipo D_σ. Un' osservazione interessante è che essi sono "gli stessi" in ogni caratteristica.

Ricordiamo che l'F-pure threshold degli ideali determinantali ($\sigma = (t)$) era già stato calcolato da Miller, Singh, - , mentre gli ideali test dell'ideale generato dai minori massimali ($\sigma = (m)$) da Henriques.

Ideali test grandi

Ideali test grandi

Dato un ideale $I \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_N]$ e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$, si consideri la funzione $f_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ definita come:

Ideali test grandi

Dato un ideale $I \subseteq S = K[x_1, \dots, x_N]$ e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$, si consideri la funzione $f_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ definita come:

$$f_{I;\mathfrak{p}}(s) = \max\{\ell : I^s \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

Ideali test grandi

Dato un ideale $I \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_N]$ e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$, si consideri la funzione $f_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ definita come:

$$f_{I;\mathfrak{p}}(s) = \max\{\ell : I^s \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

Non è difficile vedere che la funzione $f_{I;\mathfrak{p}}$ è lineare, dunque l'unico valore importante è il primo:

$$e_{\mathfrak{p}}(I) = f_{I;\mathfrak{p}}(1) = \max\{\ell : I \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

Ideali test grandi

Dato un ideale $I \subseteq S = K[x_1, \ldots, x_N]$ e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$, si consideri la funzione $f_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ definita come:

$$f_{I;\mathfrak{p}}(s) = \max\{\ell : I^s \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

Non è difficile vedere che la funzione $f_{I;\mathfrak{p}}$ è lineare, dunque l'unico valore importante è il primo:

$$e_{\mathfrak{p}}(I) = f_{I;\mathfrak{p}}(1) = \max\{\ell : I \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

PROPOSIZIONE: Se K ha caratteristica positiva, allora:

$$\tau(\lambda \bullet I) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(\lfloor \lambda e_{\mathfrak{p}}(I) \rfloor + 1 - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}))} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \qquad (1)$$

Ideali test grandi

Dato un ideale $I \subseteq S = K[x_1, \dots, x_N]$ e $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$, si consideri la funzione $f_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ definita come:

$$f_{I;\mathfrak{p}}(s) = \max\{\ell : I^s \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

Non è difficile vedere che la funzione $f_{I;\mathfrak{p}}$ è lineare, dunque l'unico valore importante è il primo:

$$e_{\mathfrak{p}}(I) = f_{I;\mathfrak{p}}(1) = \max\{\ell : I \subseteq \mathfrak{p}^{(\ell)}\}.$$

PROPOSIZIONE: Se K ha caratteristica positiva, allora:

$$\tau(\lambda \bullet I) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(\lfloor \lambda e_{\mathfrak{p}}(I) \rfloor + 1 - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}))} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \qquad (1)$$

Diremo che un ideale $I \subseteq S$ ha ideali test grandi se vale l'uguaglianza in (1) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

Condizione ($\diamond$)

Condizione ($\diamond$)

Naturalmente, per ogni $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, si ha:

$$I^s \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(e_{\mathfrak{p}}(I)s)}.$$

Condizione ($\diamond$)

Naturalmente, per ogni $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, si ha:

$$I^s \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(e_{\mathfrak{p}}(I)s)}.$$

Per ottimizzare l'inclusione precedente introduciamo la seguente:

Condizione ($\diamond$)

Naturalmente, per ogni $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, si ha:

$$I^s \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(e_{\mathfrak{p}}(I)s)}.$$

Per ottimizzare l'inclusione precedente introduciamo la seguente:

DEFINIZIONE: Un ideale $I \subseteq S$ soddisfa la condizione ($\diamond$) se per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$ esiste una funzione $g_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tale che:

$$\overline{I^s} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(g_{I;\mathfrak{p}}(s))} \quad \forall\, s \gg 0. \tag{2}$$

Condizione $(\diamond)$

Naturalmente, per ogni $s \in \mathbb{Z}_{>0}$, si ha:

$$I^s \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(e_{\mathfrak{p}}(I)s)}.$$

Per ottimizzare l'inclusione precedente introduciamo la seguente:

DEFINIZIONE: Un ideale $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond)$ se per ogni $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)$ esiste una funzione $g_{I;\mathfrak{p}} : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tale che:

$$\overline{I^s} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(g_{I;\mathfrak{p}}(s))} \quad \forall\ s \gg 0. \tag{2}$$

Non è difficile vedere che esiste una costante $c \in \mathbb{N}$ per cui

$$e_{\mathfrak{p}}(I)s - c \leq g_{I;\mathfrak{p}}(s) \leq e_{\mathfrak{p}}(I)s.$$

Condizione ($\diamond +$)

Condizione $(\diamond +)$

Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond)$ grazie a un risultato di Bruns.

Condizione $(\diamond +)$

Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond)$ grazie a un risultato di Bruns. Precisamente:

$$\overline{D_\sigma^s} = \bigcap_{i=1}^{m} I_i^{(\gamma_i(\sigma)s)}$$

Condizione $(\diamond+)$

Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond)$ grazie a un risultato di Bruns. Precisamente:

$$\overline{D_\sigma^s} = \bigcap_{i=1}^{m} I_i^{(\gamma_i(\sigma)s)}$$

DEFINIZIONE: Un ideale $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond+)$ se soddisfa la conndizione $(\diamond)$ e esistono un term ordering $\prec$ su S e un polinomio $F \in S$ tale che:

(i) $\mathrm{in}_\prec(F)$ è un monomio square-free;

(ii) $F \in \mathfrak{p}^{(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}))}$ per ogni $\mathfrak{p} \in \bigcup_{s\in\mathbb{Z}_{>0}} \mathrm{Ass}\left(\overline{I^s}\right)$.

PROPOSIZIONE: Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond+)$.

PROPOSIZIONE: Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond+)$.

TEOREMA (Henriques, -): Se $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond+)$, allora ha ideali test grandi.

PROPOSIZIONE: Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond+)$.

TEOREMA (Henriques, -): Se $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond+)$, allora ha ideali test grandi. Cioè:

$$\tau(\lambda \bullet I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(\lfloor \lambda e_{\mathfrak{p}}(I) \rfloor + 1 - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}))} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{3}$$

PROPOSIZIONE: Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond+)$.

TEOREMA (Henriques, -): Se $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond+)$, allora ha ideali test grandi. Cioè:

$$\tau(\lambda \bullet I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(\lfloor \lambda e_{\mathfrak{p}}(I) \rfloor + 1 - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}))} \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \qquad (3)$$

COROLLARIO: $\tau(\lambda \bullet D_\sigma) = \bigcap_{i=1}^{m} I_i^{(\lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1))}$.

PROPOSIZIONE: Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond+)$.

TEOREMA (Henriques, -): Se $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond+)$, allora ha ideali test grandi. Cioè:

$$\tau(\lambda \bullet I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(\lfloor \lambda e_{\mathfrak{p}}(I) \rfloor + 1 - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}))} \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \qquad (3)$$

COROLLARIO: $\tau(\lambda \bullet D_\sigma) = \bigcap_{i=1}^{m} I_i^{(\lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1))}$.
Equivalentemente, $\tau(\lambda \bullet D_\sigma)$ è generato dai prodotti di minori la cui taglia α soddisfa:

$$\gamma_i(\alpha) \geq \lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1) \ \ \forall \ i = 1, \ldots, m.$$

PROPOSIZIONE: Per ogni diagramma di Young σ, l'ideale D_σ soddisfa la condizione $(\diamond+)$.

TEOREMA (Henriques, -): Se $I \subseteq S$ soddisfa la condizione $(\diamond+)$, allora ha ideali test grandi. Cioè:

$$\tau(\lambda \bullet I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(S)} \mathfrak{p}^{(\lfloor \lambda e_{\mathfrak{p}}(I) \rfloor + 1 - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}))} \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{3}$$

COROLLARIO: $\tau(\lambda \bullet D_\sigma) = \bigcap_{i=1}^m I_i^{(\lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1))}$.
Equivalentemente, $\tau(\lambda \bullet D_\sigma)$ è generato dai prodotti di minori la cui taglia α soddisfa:

$$\gamma_i(\alpha) \geq \lfloor \lambda \gamma_i(\sigma) \rfloor + 1 - (m-i+1)(n-i+1) \ \ \forall\ i = 1, \ldots, m.$$

In particolare, l'F-pure threshold di D_σ è:

$$\mathrm{fpt}(D_\sigma) = \min_i \left\{ \frac{(m-i+1)(n-i+1)}{\gamma_i(\sigma)} \right\}.$$