Algebra Commutativa a Genova

Matteo Varbaro

Workshop di presentazione Dottorato

Parte del gruppo di Algebra Commutativa

Figure : Aldo Conca

Figure : Emanuela De Negri

Figure : Maria Evelina Rossi

Postdocs:

- Dang Hop Nguyen

- Ramakrishna Nanduri

- Oscar Fernandez Ramos

Dottorandi:

- Neeraj Kumar

- Davide Bolognini

Cosa studiamo?

Entrerò nel dettaglio solo su due problemi, altri argomenti di ricerca da noi attualmente trattati sono:

(i) Funzioni di Hilbert di algebre graduate standard e di anelli locali.

(ii) Risoluzioni libere graduate e locali.

(iii) Algebre di Koszul.

(iv) Oggetti determinantali, con conseguente interesse verso la teoria delle rappresentazioni.

(v) Proprietà delle potenze di ideali attraverso lo studio di algebre di blow up.

(vi) Studio di molteplicità di vario tipo, quali j-molteplicità, ϵ-molteplicità e molteplicità di Hilbert-Kunz.

Luoghi di zeri di polinomi

È chiara fin da subito la parentela fra algebra e geometria. Fin dalla scuola superiore, infatti, vengono studiati i sottoinsiemi di punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che, per esempio:

(i) $x^2 + y^2 = 1$ (Circonferenza).

(ii) $xy = 1$ (Iperbole).

(iii) $y = x^2$ (Parabola).

Ma questi sono luoghi di zeri di polinomi in $\mathbb{R}[x, y]$!

Questa situazione però è troppo semplice, noi vogliamo studiare i luoghi di zeri di più polinomi in più variabili.

Allora fissiamo $S = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, e prendiamo un insieme $\mathcal{H}$ di polinomi omogenei di S. Ci interessa studiare il sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$:

$$\mathcal{Z}_+(\mathcal{H}) = \{P \in \mathbb{P}^n : f(P) = 0 \ \ \forall f \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathbb{P}^n.$$

I sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n$ di questa forma, cioè luoghi di zeri di un po' di polinomi omogenei, si chiamano insieme algebrici proiettivi. Una domanda che viene da porsi, e che vorrei analizzare oggi, è:

Domanda: Dato $\mathcal{H}$, qual'è la cardinalità minima di un sottoinsieme $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ tale che $\mathcal{Z}_+(\mathcal{H}') = \mathcal{Z}_+(\mathcal{H})$?

È immediato verificare che il luogo degli zeri di $\mathcal{H}$ è uguale al luogo degli zeri di un sistema di generatori dell'ideale di S generato da $\mathcal{H}$. Dal teorema della base di Hilbert sappiamo che S è Noetheriano, perciò il minimo che stiamo cercando esiste finito.

(Eisenbud-Evans ('73)): Ogni sottoinsieme algebrico di $\mathbb{P}^n$ è il luogo degli zeri di al più n polinomi omogenei.

Non si può andare sotto ad n: un punto $P = [P_0, \ldots, P_n]$ è

$$\mathcal{Z}_+(P_{i-1}x_i - P_i x_{i-1} : i = 1, \ldots, n),$$

ma si può vedere (rigorosamente segue da Nullstellensatz + Hauptidealsatz) che non si possono usare meno di n polinomi.

Più difficile da vedere, è che anche alcuni insiemi algebrici di dimensione positiva (un punto ha dimensione 0) non possono essere definiti da meno di n equazioni:

Teorema: Se un sottoinsieme algebrico di $\mathbb{P}^n$ è il luogo degli zeri di meno di n polinomi omogenei, allora è connesso.

Questo ha dato luogo ad una congettura, che è tuttora aperta:

Congettura: Ogni sottoinsieme algebrico connesso di $\mathbb{P}^n$ può essere espresso come luogo degli zeri di meno di n polinomi omogenei.

Aperta anche per $n = 3$!!! Ad esempio, non si sa se la curva

$$\{[s^4, s^3t, st^3, t^4] : [s, t] \in \mathbb{P}^1\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$

è il luogo degli zeri di 2 polinomi omogenei.

Come si fa a dire che un insieme algebrico non può essere il luogo degli zeri di "pochi" polinomi? Un modo è usare la coomologia locale. Per spiegare come, osserviamo che per un sottoinsieme $\mathcal{H} \subseteq S$, grazie al Nullstellensatz, le seguenti sono equivalenti:

(i) $\mathcal{Z}_+(\mathcal{H})$ si può esprimere come il luogo degli zeri di r polinomi.

(ii) esistono $f_1, \ldots, f_r \in S$ tali che:

$$\sqrt{(\mathcal{H})} = \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}$$

Rango aritmetico e coomologia locale

DEF.: Il rango aritmetico di un ideale I di un anello Noetheriano A è definito come:

$$\mathrm{ara}(I) := \min\{r \mid \exists\ a_1, \ldots, a_r \in A : \sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_r)}\}$$

L'Hauptidealsatz implica che $\mathrm{ara}(I) \geq \mathrm{ht}(I)$. Ma se vogliamo dire qualcos'altro sul rango aritmetico, è evidente che bisogna studiare qualche altra quantità che sia invariante a meno di radicale.

DEF.: Con le precedenti notazioni, l' i-esimo funtore di coomologia locale a supporto in I è l'i-esimo funtore derivato destro del funtore (esatto a sinistra) che ad un A-modulo M associa:

$$\Gamma_I(M) := \{m \in M \mid I^N m = 0 \text{ per qualche } N \gg 0\}.$$

Tale funtore di coomologia locale viene denotato con $H_I^i(-)$.

Poiché $\Gamma_I(-)$ è un invariante a meno di radicale, anche $H_I^i(-)$ lo è, e non è tanto difficile vedere che:

$$H_I^i(M) = 0 \ \ \forall\ i > \mathrm{ara}(I) \ \text{ e } \ \forall\ A\text{-modulo } M$$

Quindi è interessante vedere qual'è il massimo i tale che:

$$H_I^i(M) \neq 0 \quad \text{per qualche } A\text{-modulo } M,$$

ed è proprio considerando questo numero che si dimostra:

(Grothendieck ('62)): Se $(A, \mathfrak{m})$ è un dominio locale completo e $\mathrm{ara}(I) \leq \dim A - 2$,

$$\mathrm{Spec}(A/I) \setminus \{\mathfrak{m}\}$$

è connesso.

Tornando a considerare insiemi algebrici proiettivi, calcolare la coomologia locale di un ideale $I \subseteq S$ è come calcolare certe coomologie di fascio, nella topologia di Zariski, di

$$\mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}_+(I).$$

Ma su $\mathbb{P}^n$ ci sono anche altre topologie, quindi potremmo provare a calcolare i moduli di coomologia corrispondenti:

La topologia più naturale da considerare è quella euclidea, ma si può vedere che il lower bound per il rango aritmetico fornito dalla coomologia singolare è peggiore di quello dato dalla coomologia locale.

Un'altra scelta possibile è la topologia étale:

Congettura (Lyubeznik ('02)): Il lower bound per il numero di equazioni necessario per definire un insieme algebrico $X \subseteq \mathbb{P}^n$ fornito dalla coomologia étale è migliore di quello dato dalla coomologia locale.

(V): La congettura è vera se X è una varietà liscia.

Il caso singolare è ancora completamente aperto .....

Matroidi

Prendiamo un campo K (es. $K = \mathbb{R}$) e n vettori

$$v_1, \dots, v_n \in K^d.$$

La matroide $\mathcal{M}$ di questa configurazione di vettori è la collezione dei sottoinsiemi $F \subseteq \{1, \dots, n\}$ tali che:

$$\dim_K \langle v_i : i \in F \rangle = |F|.$$

Per ogni $i = 0, \dots, d$, chiamiamo

$$f_{i-1} = |\{F \in \mathcal{M} : |F| = i\}|.$$

È estremamente interessante studiare la struttura delle sequenze:

$$f_{\mathcal{M}} = (f_{-1}, \dots, f_{d-1})$$

Ad esempio, $f_{\mathcal{M}}$ è sempre unimodale? Cioè, esiste i tale che:

$$f_{-1} \leq f_0 \leq \ldots f_{i-1} \leq f_i \geq f_{i+1} \geq \ldots \geq f_{d-1}$$

La risposta a questa domanda è si, l'ha dimostrato recentemente June Huh usando della matematica estremamente profonda.

L' oggetto $\mathcal{M}$ che abbiamo introdotto ha due proprietà fondamentali:

(i) $G \in \mathcal{M},\ F \subseteq G\ \Rightarrow F \in \mathcal{M}$.

(ii) $F, G \in \mathcal{M},\ |F| < |G|\ \Rightarrow\ \exists\ v \in G\ :\ F \cup \{v\} \in \mathcal{M}$.

La proprietà (i) definisce i complessi simpliciali, mentre la (ii) è la definizione generale di matroide, che quindi è un particolare complesso simpliciale.

Non tutte le matroidi vengono da configurazioni di vettori nello spazio, ma l' f-vettore può essere definito nello stesso modo. In questo contesto più generale l' unimodalità è ancora aperta:

Congettura (Welsh ('69)): L' f-vettore di una matroide è unimodale.

La congettura di Welsh sarebbe implicata dalla seguente:

Congettura (Mason ('73)): L' f-vettore di una matroide è strettamente log-concavo, cioè:

$$f_{i-1} f_{i+1} < f_i^2.$$

Collegato all' f-vettore è l' h-vettore di un complesso simpliciale Δ su n vertici: associamo a Δ l'ideale di Stanley-Reisner:

$$I_\Delta = (x_{i_1} \cdots x_{i_m} : \{i_1, \dots, i_m\} \notin \Delta) \subseteq K[x_1, \dots, x_n] = S.$$

Se Δ è $(d-1)$-dimensionale, la serie di Hilbert di S/I_Δ è:

$$\mathrm{HS}_{S/I_\Delta} = \frac{h(t)}{(1-t)^d},$$

dove $h(t)$ è un polinomio in $\mathbb{Z}[t]$ tale che $h(1) \neq 0$:

$$h(t) = h_0 + h_1 t + \ldots + h_d t^d.$$

L' h-vettore di Δ è il vettore $h_\Delta = (h_0, h_1, \dots, h_d)$. È facile vedere che f- ed h- vettore sono legati dalle seguenti equazioni:

$$h_j = \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i} \binom{d-i}{j-i} f_{i-1} \quad \text{e} \quad f_{j-1} = \sum_{i=0}^{j} \binom{d-i}{j-i} h_i$$

Dalle equazioni precedenti, si può vedere che la log-concavità di h_Δ implica la log-concavità stretta di f_Δ, quindi la seguente implica tutte le congetture precedenti:

Congettura (Dawson ('84)): L' h-vettore di una matroide è log-concavo:

$$h_{i-1}h_{i+1} \leq h_i^2.$$

Quindi, per studiare il problema dell'unimodalità di f-vettori di matroidi, si possono usare tecniche puramente algebriche per capire le funzioni di Hilbert di anelli di Stanley-Reisner di matroidi. Potrebbe rivelarsi utile la seguente caratterizzazione algebrica:

(V, Minh-Trung): Un complesso simpliciale Δ è una matroide se e solo se $S/I_\Delta^{(m)}$ è Cohen-Macaulay per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Siccome l' h-polinomio di un anello Cohen-Macaulay graduato ha coefficienti positivi, il teorema precedente implica che una qualche relazione fra le funzioni di Hilbert delle potenze simboliche di un ideale (monomiale) potrebbe fornire diseguaglianze interessanti sull' h-vettore di una matroide.

Oltre che per la congettura di Welsh, lo studio delle funzioni di Hilbert di anelli di SR di matroidi è interessante per la seguente:

Congettura (Stanley ('77)): L' h-vettore di una matroide è una O-sequenza pura.

Vediamo cos' è una O-sequenza pura.

Un multicomplesso Γ è un insieme di monomi in $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ che sia chiuso rispetto alla divisione:

$$v \in \Gamma, \; u|v \; \Rightarrow u \in \Gamma.$$

L' f-vettore di Γ è la sequenza di numeri $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definita da:

$$f_i = |\{\text{monomi di grado } i \text{ di } \Gamma\}|.$$

Una sequenza $(e_0, \ldots, e_d)$ di interi si dice O-sequenza pura se è l'f-vettore di un multicomplesso finito i cui elementi massimali $(u \leq v \Leftrightarrow u|v)$ hanno tutti lo stesso grado.

La congettura di Stanley è totalmente aperta, e poiché è vera nei seguenti casi fare esempi computazionali potrebbe essere stimolante:

(i) $(h_0, 2, h_2, \ldots, h_d)$ (folklore).

(ii) (h_0, h_1, h_2, h_3) (Hà-Stokes-Zanello).

(iii) $(h_0, h_1, h_2, \ldots, h_d)$ con $h_d \leq 5$ (Constantinescu-Kahle-V).