TEORIA DEI GRAFI E
TEOREMA DEI QUATTRO COLORI

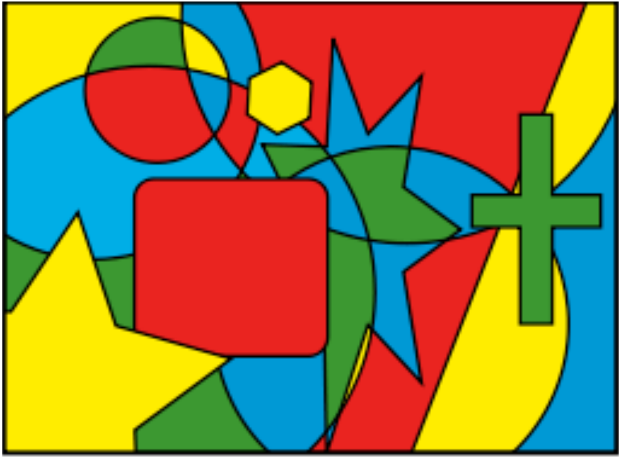
TEORIA DEI GRAFI E
TEOREMA DEI QUATTRO COLORI

Matteo Varbaro

Dipartimento di Matematica
Università di Genova

Quanti colori servono per colorare un qualunque disegno in modo che regioni adiacenti abbiano colori distinti?

Quanti colori servono per colorare un qualunque disegno in modo che regioni adiacenti abbiano colori distinti?



Quanti colori servono per colorare un qualunque disegno in modo che regioni adiacenti abbiano colori distinti?

Facendo un pò di prove, sembrerebbe che 4 colori siano sempre sufficienti

Quanti colori servono per colorare un qualunque disegno in modo che regioni adiacenti abbiano colori distinti?

Facendo un pò di prove, sembrerebbe che 4 colori siano sempre sufficienti, quindi la domanda è:

BASTANO SEMPRE 4 COLORI?

Quanti colori servono per colorare un qualunque disegno in modo che regioni adiacenti abbiano colori distinti?

Facendo un pò di prove, sembrerebbe che 4 colori siano sempre sufficienti, quindi la domanda è:

BASTANO SEMPRE 4 COLORI?

La risposta a questa semplice domanda è affermativa, ma incredibilmente difficile!

Un pò di storia

Un pò di storia

1852: Francis Guthrie (cartografo) pone la domanda a suo fratello Frederick (studente di Matematica)

Un pò di storia

1852: Francis Guthrie (cartografo) pone la domanda a suo fratello Frederick (studente di Matematica)

1878: il problema viene presentato ad un vasto pubblico di matematici da Cayley

Un pò di storia

1852: Francis Guthrie (cartografo) pone la domanda a suo fratello Frederick (studente di Matematica)

1878: il problema viene presentato ad un vasto pubblico di matematici da Cayley

1879: Kempe pubblica una “dimostrazione”, che però contiene un errore

Un pò di storia

1852: Francis Guthrie (cartografo) pone la domanda a suo fratello Frederick (studente di Matematica)

1878: il problema viene presentato ad un vasto pubblico di matematici da Cayley

1879: Kempe pubblica una “dimostrazione”, che però contiene un errore

1880: Tait annuncia ulteriori dimostrazioni, che però non vengono mai presentate

Un pò di storia

1852: Francis Guthrie (cartografo) pone la domanda a suo fratello Frederick (studente di Matematica)

1878: il problema viene presentato ad un vasto pubblico di matematici da Cayley

1879: Kempe pubblica una “dimostrazione”, che però contiene un errore

1880: Tait annuncia ulteriori dimostrazioni, che però non vengono mai presentate

1890: Heawood modifica la dimostrazione di Kempe, provando che senz’altro bastano 5 colori

Un pò di storia

1852: Francis Guthrie (cartografo) pone la domanda a suo fratello Frederick (studente di Matematica)

1878: il problema viene presentato ad un vasto pubblico di matematici da Cayley

1879: Kempe pubblica una “dimostrazione”, che però contiene un errore

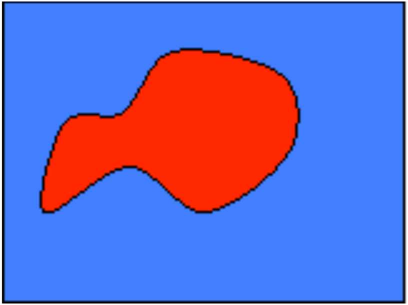
1880: Tait annuncia ulteriori dimostrazioni, che però non vengono mai presentate

1890: Heawood modifica la dimostrazione di Kempe, provando che senz’altro bastano 5 colori

1977: finalmente viene dimostrato il Teorema dei quattro colori, grazie ad una collaborazione di Appel e Haken

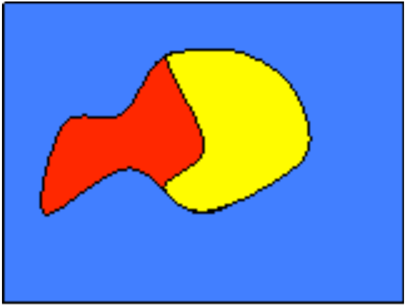
Senz'altro almeno 4 colori servono

Senz'altro almeno 4 colori servono



Le due regioni sono adiacenti, quindi vanno colorate con colori differenti

Senz'altro almeno 4 colori servono



Le tre regioni sono tutte adiacenti fra loro, quindi vanno colorate con colori differenti

Senz'altro almeno 4 colori servono

Le quattro regioni sono tutte adiacenti fra loro, quindi vanno colorate con colori differenti

Senz'altro almeno 4 colori servono

E perché non potremmo fare la stessa cosa per cinque regioni?

Senz'altro almeno 4 colori servono

E perché non potremmo fare la stessa cosa per cinque regioni?

Infatti, se riuscissimo a disegnare cinque regioni tutte adiacenti fra loro, chiaramente quattro colori non basterebbero.

Senz'altro almeno 4 colori servono

E perché non potremmo fare la stessa cosa per cinque regioni?

Infatti, se riuscissimo a disegnare cinque regioni tutte adiacenti fra loro, chiaramente quattro colori non basterebbero.

Naturalmente questo è impossibile, perché il teorema dei quattro colori è stato dimostrato, quindi è vero.

Senz'altro almeno 4 colori servono

E perché non potremmo fare la stessa cosa per cinque regioni?

Infatti, se riuscissimo a disegnare cinque regioni tutte adiacenti fra loro, chiaramente quattro colori non basterebbero.

Naturalmente questo è impossibile, perché il teorema dei quattro colori è stato dimostrato, quindi è vero.

Quello che ci proponiamo di fare in questo seminario è dimostrare l'impossibilità di fare il disegno descritto, indipendentemente dal teorema dei quattro colori

TEORIA DEI GRAFI

Cos'è un grafo?

Cos'è un grafo?

Un grafo è una coppia $G = (V, E)$, nella quale V è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati

Cos'è un grafo?

Un grafo è una coppia $G = (V, E)$, nella quale V è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati

ESEMPI

Cos'è un grafo?

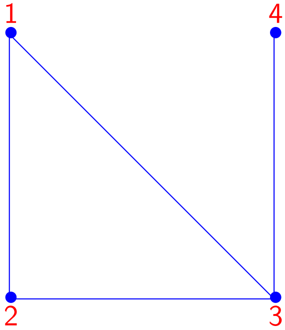
Un grafo è una coppia $G = (V, E)$, nella quale V è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati

ESEMPI

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\},$
$\{3, 4\}, \{1, 3\}\}$



Cos'è un grafo?

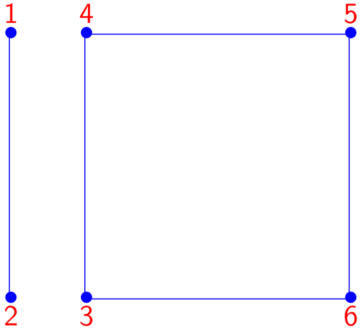
Un grafo è una coppia $G = (V, E)$, nella quale V è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati

ESEMPI

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{\{1, 2\}, \{3, 4\},$
$\{4, 5\}, \{5, 6\}, \{3, 6\}\}$



Cos'è un grafo?

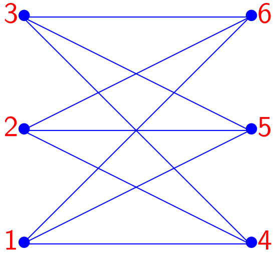
Un grafo è una coppia $G = (V, E)$, nella quale V è l'insieme dei vertici ed E è l'insieme dei lati

ESEMPI

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}\}$



Vari disegni di un grafo

Vari disegni di un grafo

Uno stesso grafo può essere disegnato in modi differenti:

Vari disegni di un grafo

Uno stesso grafo può essere disegnato in modi differenti:

ad esempio, consideriamo il grafo $G = (V, E)$ in cui

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

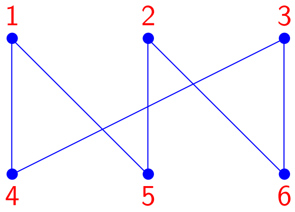
$$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 3\}, \{3, 4\}\}$$

Vari disegni di un grafo

Uno stesso grafo può essere disegnato in modi differenti:

ad esempio, consideriamo il grafo $G = (V, E)$ in cui

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 3\}, \{3, 4\}\}$$

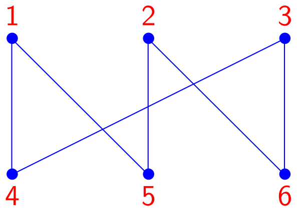


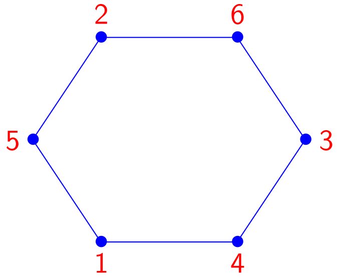
Vari disegni di un grafo

Uno stesso grafo può essere disegnato in modi differenti:

ad esempio, consideriamo il grafo $G = (V, E)$ in cui

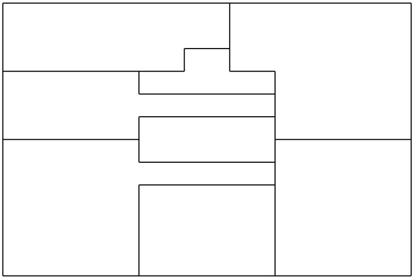
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$E = \{\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{2, 6\}, \{6, 3\}, \{3, 4\}\}$$



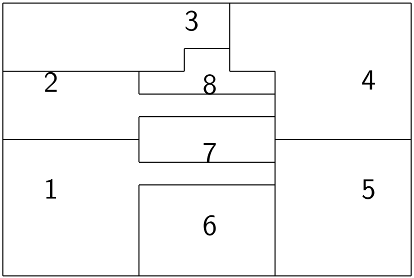


Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi

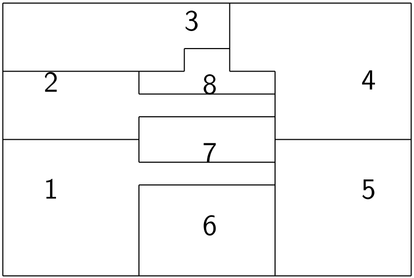
Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



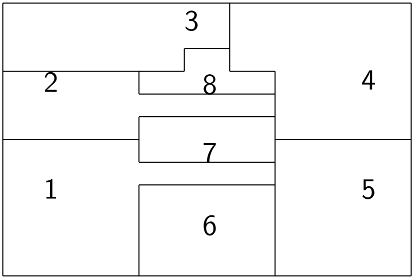
Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



Quindi le regioni di questo disegno si possono indicare con

$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



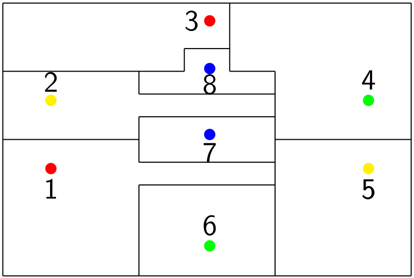
Quindi le regioni di questo disegno si possono indicare con

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

e possiamo descrivere le adiacenze cosí:

$$\{\{1,2\},\{1,7\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,8\},\{2,4\},$$
$$\{2,7\},\{3,4\},\{3,8\},\{4,5\},\{4,7\},\{4,8\},\{5,6\},\{5,7\}\}$$

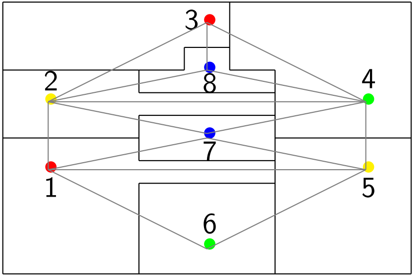
Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



Quindi possiamo associare al disegno iniziale un grafo $G = (V, E)$, dove

$$V=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

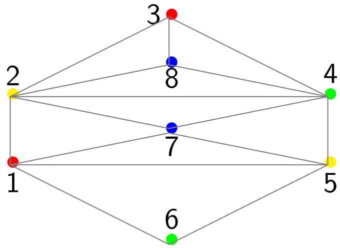
Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



Quindi possiamo associare al disegno iniziale un grafo $G = (V, E)$, dove

V={1,2,3,4,5,6,7,8}
E={{1,2},{1,7},{1,5},{1,6},{2,3},{2,8},{2,4},
{2,7},{3,4},{3,8},{4,5},{4,7},{4,8},{5,6},{5,7}}

Traduzione del problema dei quattro colori nella teoria dei grafi



Quindi possiamo associare al disegno iniziale un grafo $G = (V, E)$, dove

V={1,2,3,4,5,6,7,8}

E={{1,2},{1,7},{1,5},{1,6},{2,3},{2,8},{2,4},
{2,7},{3,4},{3,8},{4,5},{4,7},{4,8},{5,6},{5,7}}

Grafi planari

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

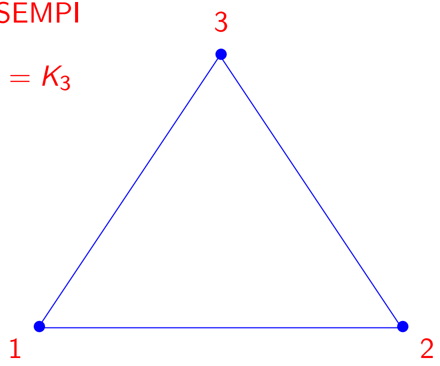
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_3$



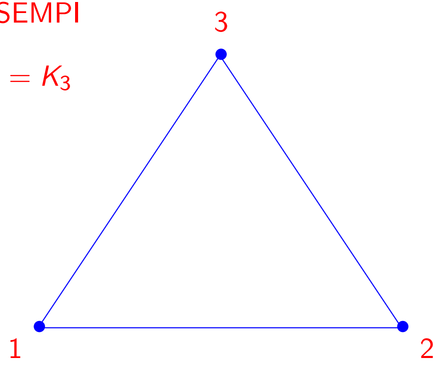
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_3$



K_3 è planare?

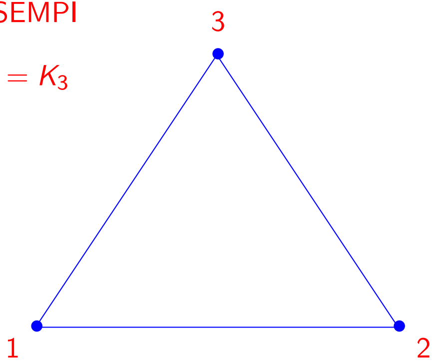
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_3$



K_3 è planare? SI

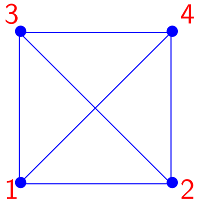
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_4$



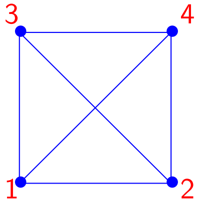
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_4$



K_4 è planare?

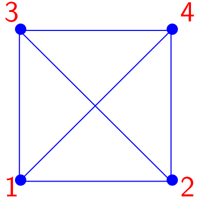
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_4$



K_4 è planare? SI,

infatti possiamo ridisegnarlo in modo planare

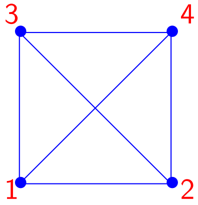
Grafi planari

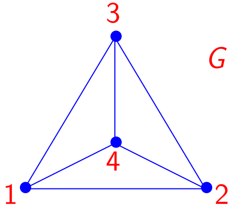
Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

$G = K_4$





$G = K_4$

K_4 è planare? SI,

infatti possiamo ridisegnarlo in modo planare

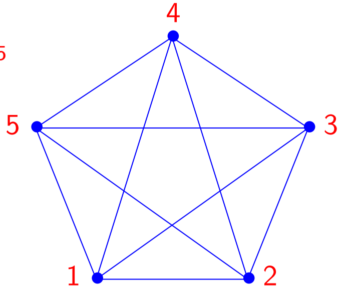
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

K_5



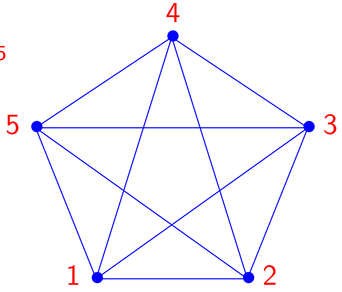
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

K_5



K_5 é planare?

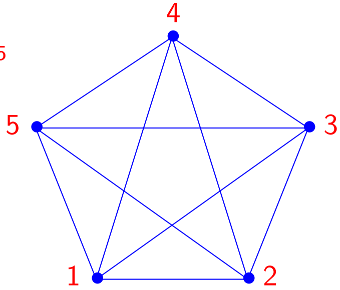
Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

ESEMPI

K_5



K_5 é planare?

NO, il nostro obiettivo per oggi è spiegare perché.

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

Osserviamo che dimostrare che K_5 non è planare significa rispondere alla domanda iniziale

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

Osserviamo che dimostrare che K_5 non è planare significa rispondere alla domanda iniziale, e dunque dimostrare che non è possibile disegnare 5 regioni tutte adiacenti fra loro:

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

Osserviamo che dimostrare che K_5 non è planare significa rispondere alla domanda iniziale, e dunque dimostrare che
non è possibile disegnare 5 regioni tutte adiacenti fra loro:

infatti se si potesse fare un tale disegno si potrebbe passare al grafo associato come poco fa

Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere disegnato in modo che i lati "non si incrocino mai".

I grafi ottenuti da un disegno nel modo descritto nella slide precedente sono planari!

Osserviamo che dimostrare che K_5 non è planare significa rispondere alla domanda iniziale, e dunque dimostrare che non è possibile disegnare 5 regioni tutte adiacenti fra loro:

infatti se si potesse fare un tale disegno si potrebbe passare al grafo associato come poco fa, e otterremo un disegno planare di K_5.

Ancora un pò di definizioni

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

Ancora un pò di definizioni

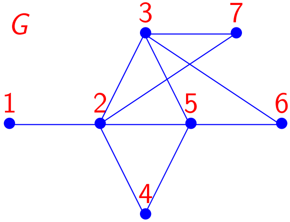
- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

ESEMPI

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

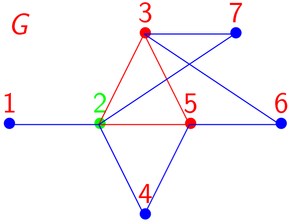
ESEMPI



Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

ESEMPI



Il cammino 2,3,5,2

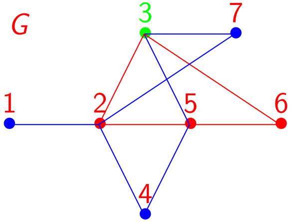
è chiuso, perché

inizia con 2 e temina con 2

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

ESEMPI



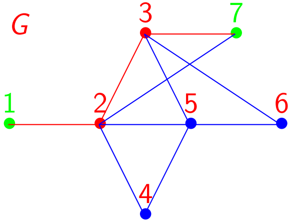
Analogamente il cammino

3,6,5,2,3 è chiuso

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

ESEMPI



Il cammino 1,2,3,7

non è chiuso

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

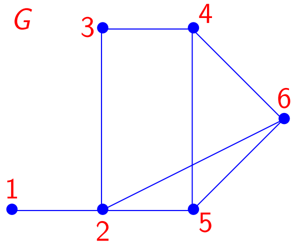
ESEMPI

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

ESEMPI

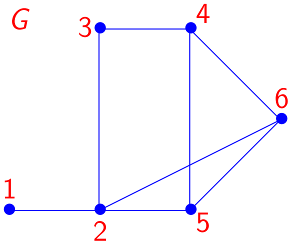


Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

ESEMPI



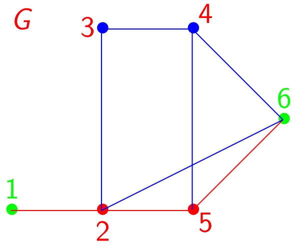
G è connesso, infatti presi due vertici c'è sempre un cammino che li collega

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

ESEMPI



G è connesso, infatti presi due vertici c'è sempre un cammino che li collega.

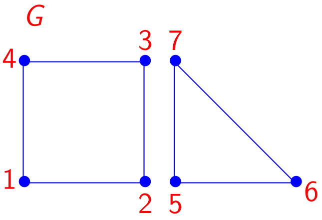
Ad esempio, 1 e 6 sono collegati dal cammino 1,2,5,6

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

ESEMPI

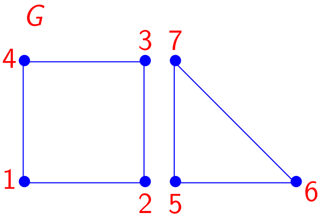


Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

ESEMPI



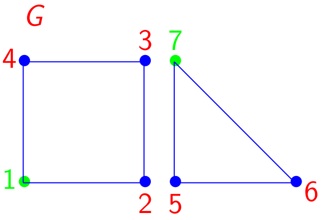
G non è connesso

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

ESEMPI



G non è connesso, ad esempio

nessun cammino collega 1 con 7

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

ESEMPIO

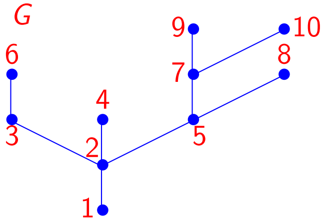
Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

ESEMPIO



G è un albero

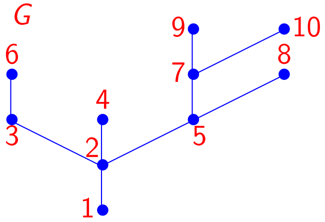
Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

ESEMPIO



G è un albero. Le foglie di G sono i vertici da cui parte un solo lato

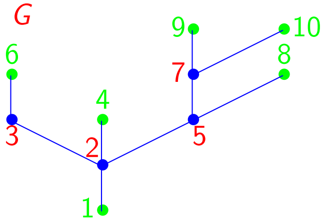
Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

ESEMPIO



G è un albero. Le foglie di G

sono i vertici da cui parte un solo lato.

In questo esempio le foglie sono

1,4,6,8,9,10

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

- Le facce di un grafo planare sono la aree delimitate dai lati

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

- Le facce di un grafo planare sono la aree delimitate dai lati

ESEMPIO

Ancora un pò di definizioni

- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

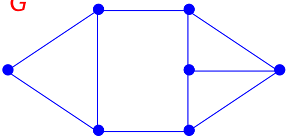
- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

- Le facce di un grafo planare sono la aree delimitate dai lati

ESEMPIO

G



Ancora un pò di definizioni

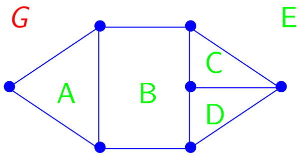
- Un ciclo in un grafo è un cammino chiuso

- Un grafo si dice connesso se ogni coppia di vertici è collegata da un cammino

- Un grafo è un albero se è connesso e senza cicli

- Le facce di un grafo planare sono la aree delimitate dai lati

ESEMPIO



Le facce di G sono

A,B,C,D,E

VERSO LA DIMOSTRAZIONE DEL FATTO CHE

K_5 NON È PLANARE

Formula di Eulero

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici,

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati,

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n \; = \; n^o$ di vertici, $\quad m \; = \; n^o$ di lati, $\quad f \; = \; n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra $n, \; m, \; f$?

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

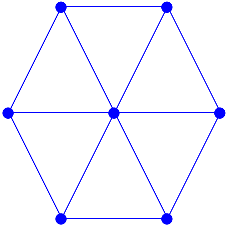
ESEMPI

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI

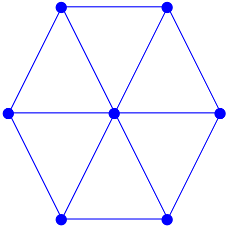


Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
n = n^o di vertici, m = n^o di lati, f = n^o di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



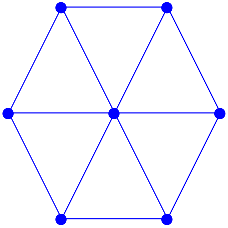
$n = 7$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
n = n^o di vertici, m = n^o di lati, f = n^o di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 7$

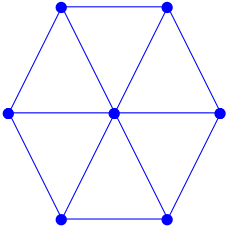
$m = 12$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n \;=\; n^o$ di vertici, $\quad m \;=\; n^o$ di lati, $\quad f \;=\; n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n \;=\; 7$

$m \;=\; 12$

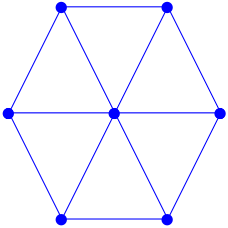
$f \;=\; 7$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
n = n^o di vertici, m = n^o di lati, f = n^o di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 7$

$m = 12$

$f = 7$

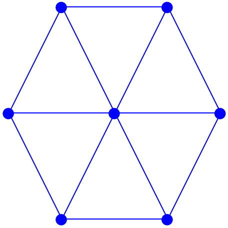
$n - m + f =$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n \;=\; n^o$ di vertici, $\quad m \;=\; n^o$ di lati, $\quad f \;=\; n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra $n,\ m,\ f$?

ESEMPI



$n \;=\; 7$

$m \;=\; 12$

$f \;=\; 7$

$n \;-\; m \;+\; f \;=$

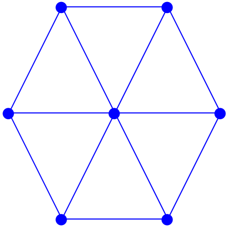
$= \;7 \;-12 \;+\; 7 \;=$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 7$

$m = 12$

$f = 7$

$n - m + f =$

$= 7 - 12 + 7 =$

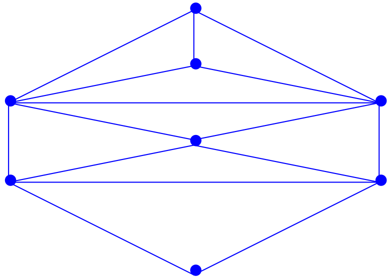
$= 2$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
n = n^o di vertici, m = n^o di lati, f = n^o di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI

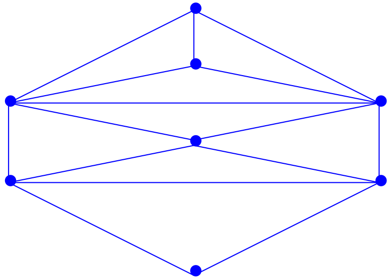


Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



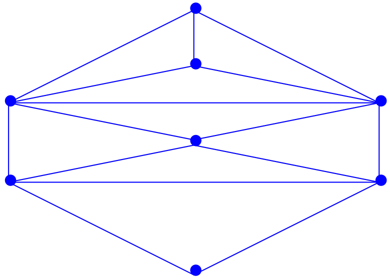
$n = 8$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
n = n^o di vertici, m = n^o di lati, f = n^o di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 8$

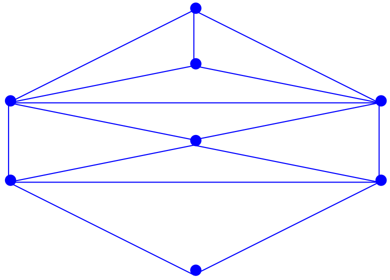
$m = 15$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 8$

$m = 15$

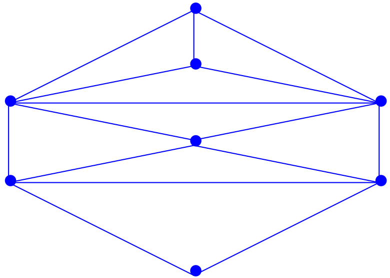
$f = 9$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 8$

$m = 15$

$f = 9$

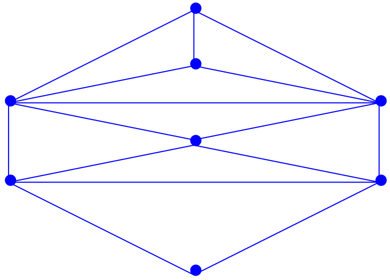
$n - m + f$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n \;=\; n^o$ di vertici, $\quad m \;=\; n^o$ di lati, $\quad f \;=\; n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra $n,\; m,\; f$?

ESEMPI



$n \;=\; 8$

$m \;=\; 15$

$f \;=\; 9$

$n \;-\; m \;+\; f \;=$

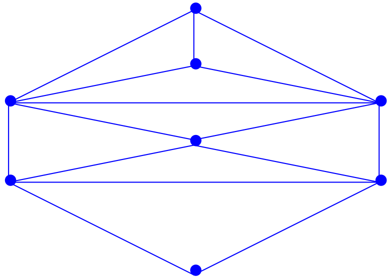
$= \;8 \;- 15 \;+\; 9$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 8$

$m = 15$

$f = 9$

$n - m + f =$

$= 8 - 15 + 9 =$

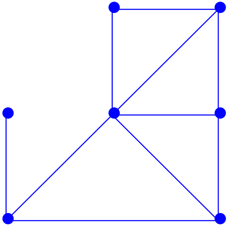
$= 2$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI

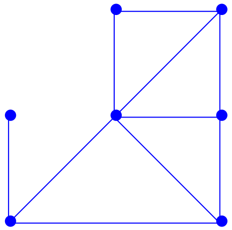


Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 7$

$m = 10$

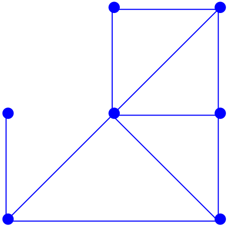
$f = 5$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

ESEMPI



$n = 7$

$m = 10$

$f = 5$

$n - m + f =$

$= 7 - 10 + 5 = 2$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

Teorema di Eulero:

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n \ = \ n^o$ di vertici, $\quad m \ = \ n^o$ di lati, $\quad f \ = \ n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

Teorema di Eulero:

Per ogni grafo connesso planare si ha la seguente formula:

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra n, m, f?

Teorema di Eulero:

Per ogni grafo connesso planare si ha la seguente formula:

$$\boxed{n - m + f = 2}$$

Formula di Eulero

Dato un grafo connesso planare, indichiamo con:
$n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

C'è quache relazione fra $n,\ m,\ f$?

Teorema di Eulero:

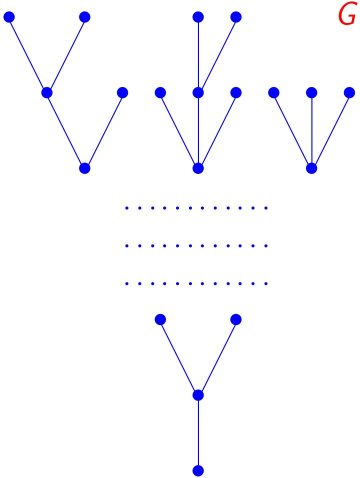
Per ogni grafo connesso planare si ha la seguente formula:

$$\boxed{n - m + f = 2}$$

Quindi $f = m - n + 2$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

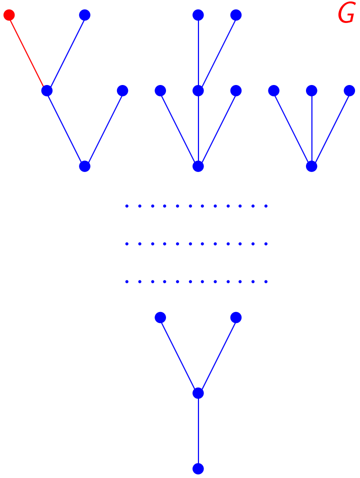


$n = n(G) =$n.ro di vertici di G

$m = m(G) =$n.ro di lati di G

$f = f(G) =$n.ro di facce di $G = 1$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi



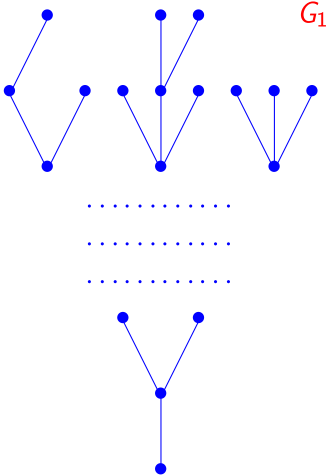
$n = n(G) =$n.ro di vertici di G

$m = m(G) =$n.ro di lati di G

$f = f(G) =$n.ro di facce di $G = 1$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

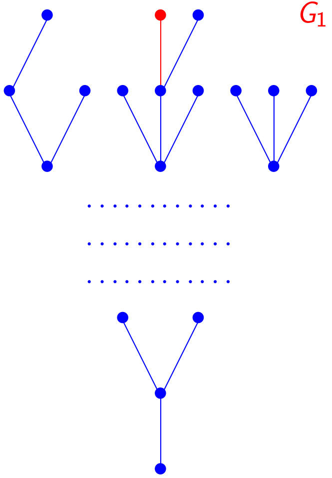
G_1



$n(G_1) = n - 1$

$m(G_1) = m - 1$

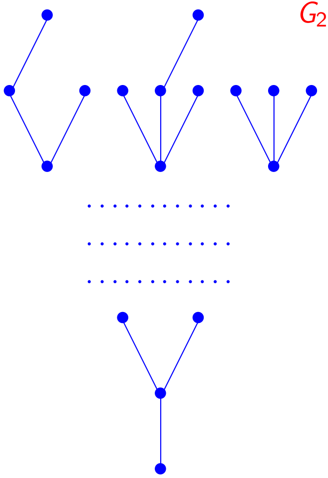
Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi



$n(G_1) = n - 1$

$m(G_1) = m - 1$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

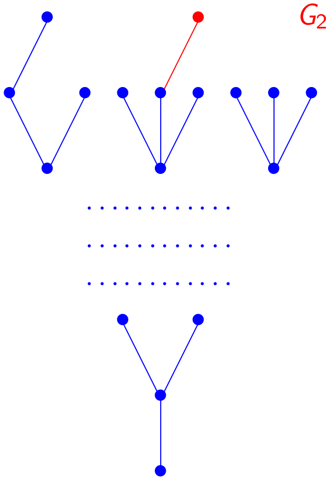


G_2

$n(G_2) = n - 2$

$m(G_2) = m - 2$

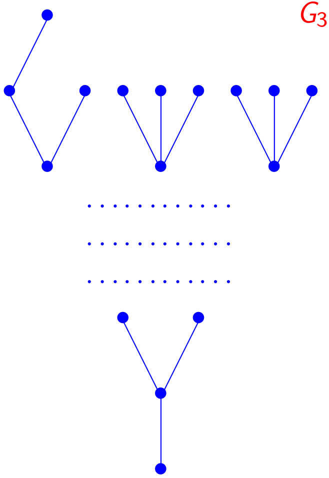
Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi



$n(G_2) = n - 2$

$m(G_2) = m - 2$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

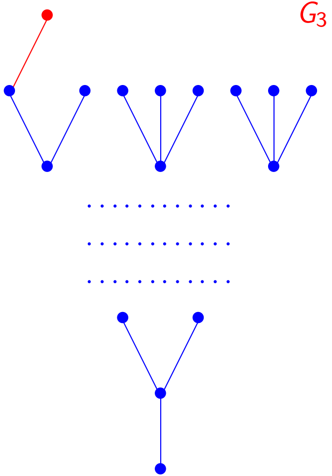


G_3

$$n(G_3) = n - 3$$

$$m(G_3) = m - 3$$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

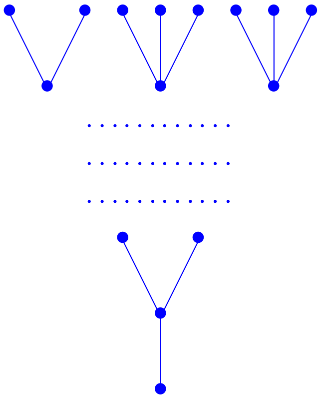


$n(G_3) = n - 3$

$m(G_3) = m - 3$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

G_4



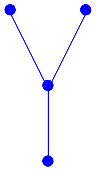
$n(G_4) = n - 4$

$m(G_4) = m - 4$

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-4}) = n - (n-4) = 4$

$m(G_{n-4}) = m - (n-4) = m - n + 4$

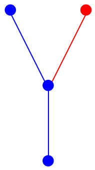


G_{n-4}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-4}) = n - (n-4) = 4$

$m(G_{n-4}) = m - (n-4) = m - n + 4$

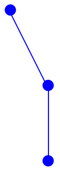


G_{n-4}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-3}) = n - (n-3) = 3$

$m(G_{n-3}) = m - (n-3) = m - n + 3$

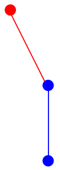


G_{n-3}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$$n(G_{n-3}) = n - (n-3) = 3$$

$$m(G_{n-3}) = m - (n-3) = m - n + 3$$



G_{n-3}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-2}) = n - (n-2) = 2$

$m(G_{n-2}) = m - (n-2) = m - n + 2$

G_{n-2}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$$n(G_{n-2}) = n - (n-2) = 2$$

$$m(G_{n-2}) = m - (n-2) = m - n + 2$$

G_{n-2}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$.

In particolare, per un albero,
$n - m + f =$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$.

In particolare, per un albero,
$n - m + f = n -$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$.

In particolare, per un albero,
$n - m + f = n - (n-1) +$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$.

In particolare, per un albero,
$n - m + f = n - (n-1) + 1$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$.

In particolare, per un albero,
$n - m + f = n - (n-1) + 1 = n - n + 1 + 1$

G_{n-1}

Dimostrazione della formula di Eulero nel caso di alberi

$n(G_{n-1}) = n - (n-1) = 1$

$m(G_{n-1}) = m - (n-1) = m - n + 1$

Abbiamo tolto $n-1$ vertici e $n-1$ lati a G,
e non é rimasto nessun lato.
Questo significa che $m = n - 1$.

In particolare, per un albero,
$n - m + f = n - (n-1) + 1 = n - n + 1 + 1 = 2$

G_{n-1}

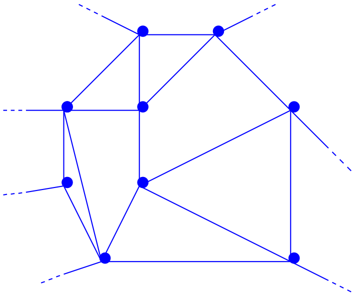
Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



G

$n = n^o$ vertici di G

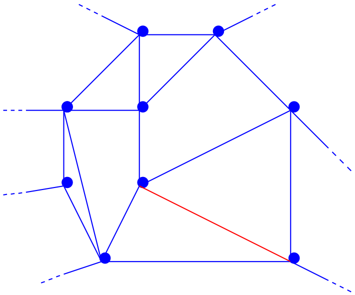
$m = n^o$ lati di G

$f = n^o$ facce di G

$n - m + f =$?????

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



G

$n \;=\; n^o$ vertici di G

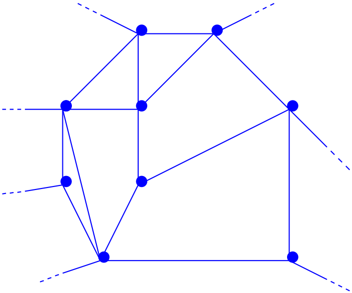
$m \;=\; n^o$ lati di G

$f \;=\; n^o$ facce di G

$n \;-\; m \;+\; f \;=\;$?????

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



G_1

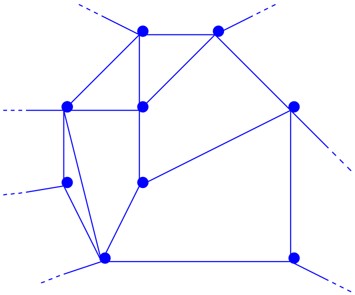
$n \;=\; n^o$ vertici di G
$m \;=\; n^o$ lati di G
$f \;=\; n^o$ facce di G

$n \;-\; m \;+\; f \;=$?????

Osserviamo che $n(G_1) = n(G) = n$,
$m(G_1) = m(G) - 1 = m - 1$ e
$f(G_1) = f(G) - 1 = f - 1$, quindi

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



G_1

$n \ = \ n^o$ vertici di G

$m \ = \ n^o$ lati di G

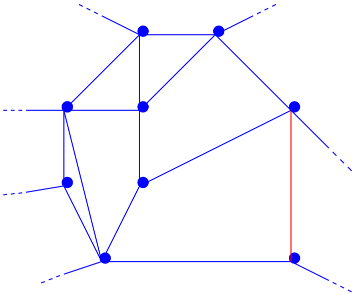
$f \ = \ n^o$ facce di G

$n \ - \ m \ + \ f \ =$

$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) = ?$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



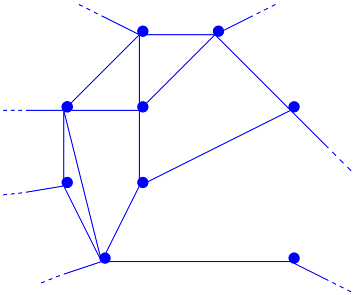
G_1

$n \;=\; n^o$ vertici di G
$m \;=\; n^o$ lati di G
$f \;=\; n^o$ facce di G

$n \;-\; m \;+\; f \;=$
$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) = ?$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



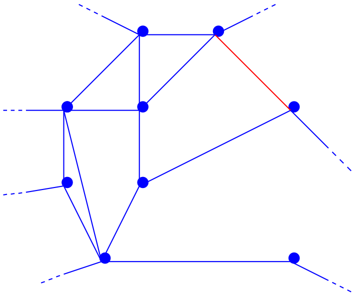
G_2

n = n^o vertici di G
m = n^o lati di G
f = n^o facce di G

$n - m + f =$
$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) =$
$= n(G_2) - m(G_2) + f(G_2) = ?$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



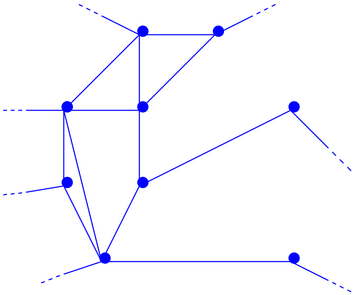
G_2

$n \; = \; n^o$ vertici di G
$m \; = \; n^o$ lati di G
$f \; = \; n^o$ facce di G

$$n \; - \; m \; + \; f \; =$$
$$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) =$$
$$= n(G_2) - m(G_2) + f(G_2) = ?$$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



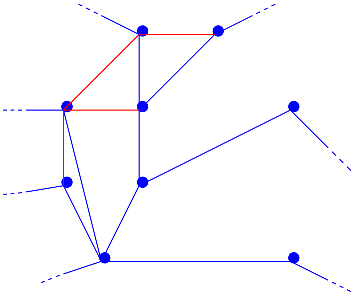
G_3

$n \;=\; n^o$ vertici di G
$m \;=\; n^o$ lati di G
$f \;=\; n^o$ facce di G

$$n \;-\; m \;+\; f \;=$$
$$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) =$$
$$= n(G_2) - m(G_2) + f(G_2) =$$
$$= n(G_3) - m(G_3) + f(G_3) =?$$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



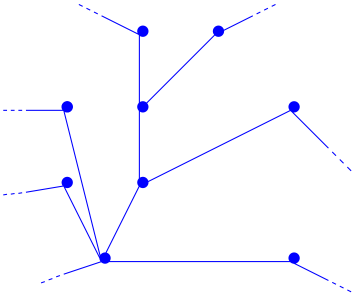
G_3

$n \; = \; n^o$ vertici di G
$m \; = \; n^o$ lati di G
$f \; = \; n^o$ facce di G

$$n \; - \; m \; + \; f \; =$$
$$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) =$$
$$= n(G_2) - m(G_2) + f(G_2) =$$
$$= n(G_3) - m(G_3) + f(G_3) = ?$$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



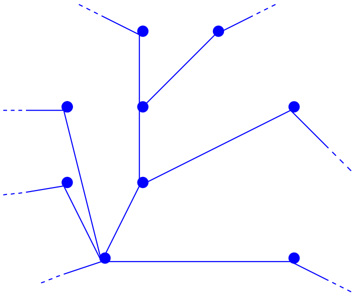
G_7

$n \ = \ n^o$ vertici di G
$m \ = \ n^o$ lati di G
$f \ = \ n^o$ facce di G

$n \ - \ m \ + \ f \ =$
$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) =$
$= n(G_2) - m(G_2) + f(G_2) =$
$= n(G_3) - m(G_3) + f(G_3) =$
$\ldots = n(G_7) - m(G_7) + f(G_7) = ?$

Dimostrazione della formula di Eulero in generale

Consideriamo un grafo connesso planare



G_7

$n \;=\; n^o$ vertici di G

$m \;=\; n^o$ lati di G

$f \;=\; n^o$ facce di G

$n \;-\; m \;+\; f \;=$

$= n(G_1) - m(G_1) + f(G_1) =$

$= n(G_2) - m(G_2) + f(G_2) =$

$= n(G_3) - m(G_3) + f(G_3) =$

$\ldots = n(G_7) - m(G_7) + f(G_7) =$

$\ldots = 2$

Facce e lati

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

Facce e lati

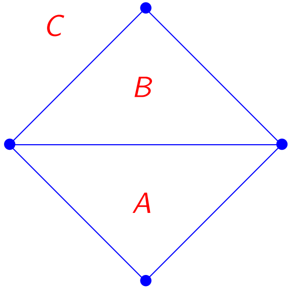
In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

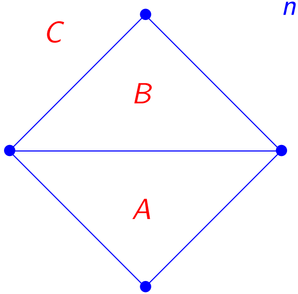
ESEMPI



Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI

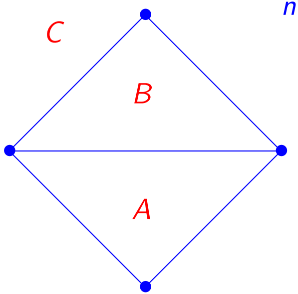


n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



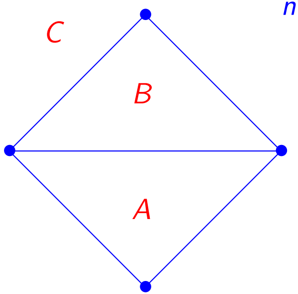
n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

$= 3 + 3 + 4$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



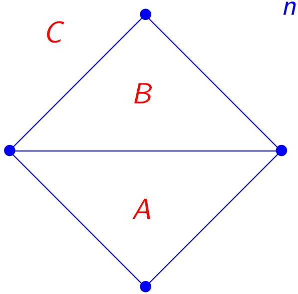
n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

$$= 3 + 3 + 4 = 10$$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

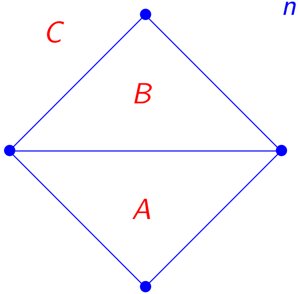
$$= 3 + 3 + 4 = 10$$

$m = n^o$ lati del grafo $= 5$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

$= 3 + 3 + 4 = 10$

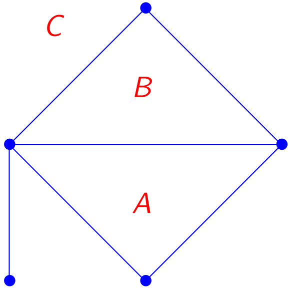
$m = n^o$ lati del grafo $= 5$

e $10 = 2 \cdot 5$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

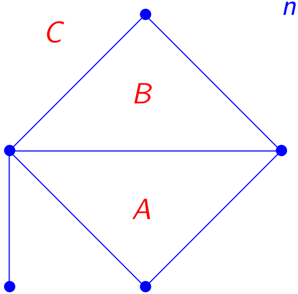
ESEMPI



Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI

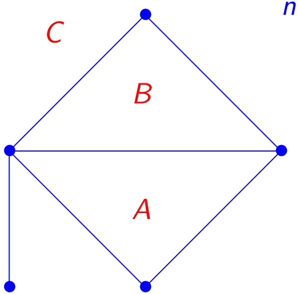


n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



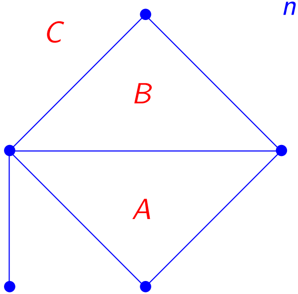
$$n^o \text{ lati in } A + n^o \text{ lati in } B + n^o \text{ lati in } C =$$

$$= \; 3 \; + \; 3 \; + \; 5 \; = \; 11$$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

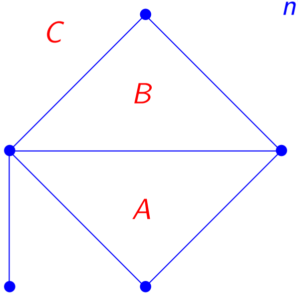
$$= 3 + 3 + 5 = 11$$

$$m = n^o \text{ lati del grafo} = 6.$$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

ESEMPI



n^o lati in A + n^o lati in B + n^o lati in C =

$= 3 + 3 + 5 = 11$

$m = n^o$ lati del grafo $= 6$.

Questa volta $11 < 2 \cdot 6$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare*

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Inoltre, poiché ogni faccia è delimitata da almeno tre lati

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Inoltre, poiché ogni faccia è delimitata da almeno tre lati, la suddetta somma è senz'altro maggiore o uguale al triplo del numero delle facce.

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Inoltre, poiché ogni faccia è delimitata da almeno tre lati, la suddetta somma è senz'altro maggiore o uguale al triplo del numero delle facce.

Indicando con f il numero di facce e con m il numero di lati di un grafo planare, quindi possiamo scrivere in formule

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Inoltre, poiché ogni faccia è delimitata da almeno tre lati, la suddetta somma è senz'altro maggiore o uguale al triplo del numero delle facce.

Indicando con f il numero di facce e con m il numero di lati di un grafo planare, quindi possiamo scrivere in formule

$$\boxed{3 \cdot f \leq \text{SOMMA SULLE FACCE}}$$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Inoltre, poiché ogni faccia è delimitata da almeno tre lati, la suddetta somma è senz'altro maggiore o uguale al triplo del numero delle facce.

Indicando con f il numero di facce e con m il numero di lati di un grafo planare, quindi possiamo scrivere in formule

$$\boxed{3 \cdot f \leq \text{SOMMA SULLE FACCE} \leq 2 \cdot m}$$

Facce e lati

In un grafo planare il numero di facce è "vincolato" dal numero di lati, non solo per la formula di Eulero

In generale possiamo affermare che in qualunque grafo *planare* la somma, fatta sulle facce, del numero dei lati che delimitano ogni ogni faccia, è al piú il doppio del numero dei lati.

Inoltre, poiché ogni faccia è delimitata da almeno tre lati, la suddetta somma è senz'altro maggiore o uguale al triplo del numero delle facce.

Indicando con f il numero di facce e con m il numero di lati di un grafo planare, quindi possiamo scrivere in formule

$$\boxed{3 \cdot f \leq 2 \cdot m}$$

Vertici e lati

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Come sempre, dato un grafo *planare* e connesso, denotiamo con $n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Come sempre, dato un grafo *planare* e connesso, denotiamo con $n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Ricordando la formula della slide precedente $2 \cdot m \geq 3 \cdot f$.

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Come sempre, dato un grafo *planare* e connesso, denotiamo con $n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Ricordando la formula della slide precedente $2 \cdot m \geq 3 \cdot f$.

Ma dalla formula di Eulero sappiamo che $f = m - n + 2$

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Come sempre, dato un grafo *planare* e connesso, denotiamo con $n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Ricordando la formula della slide precedente $2 \cdot m \geq 3 \cdot f$.

Ma dalla formula di Eulero sappiamo che $f = m - n + 2$, quindi

$$2 \cdot m \geq 3 \cdot f$$

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Come sempre, dato un grafo *planare* e connesso, denotiamo con $n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Ricordando la formula della slide precedente $2 \cdot m \geq 3 \cdot f$.

Ma dalla formula di Eulero sappiamo che $f = m - n + 2$, quindi

$$2 \cdot m \geq 3 \cdot f = 3 \cdot (m - n + 2)$$

Quindi $2 \cdot m \geq 3 \cdot (m - n + 2)$, da cui

Vertici e lati

In un grafo planare e connesso, è intuitivo pensare che, fissato il numero dei vertici, non ci possano esser più di TOT lati.

Ora dimostreremo quest'affermazione, rendendola più precisa.

Come sempre, dato un grafo *planare* e connesso, denotiamo con $n = n^o$ di vertici, $m = n^o$ di lati, $f = n^o$ di facce.

Ricordando la formula della slide precedente $2 \cdot m \geq 3 \cdot f$.

Ma dalla formula di Eulero sappiamo che $f = m - n + 2$, quindi

$$2 \cdot m \geq 3 \cdot f = 3 \cdot (m - n + 2)$$

Quindi $2 \cdot m \geq 3 \cdot (m - n + 2)$, da cui

$$\boxed{m \leq 3n - 6}$$

K_5 non è planare

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati "si incrocino"

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati "si incrocino"

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati “si incrocino”

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso).

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati “si incrocino”

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

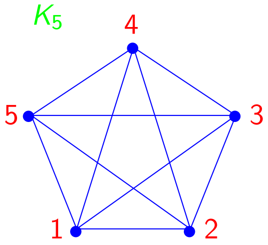
Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati "si incrocino"

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece

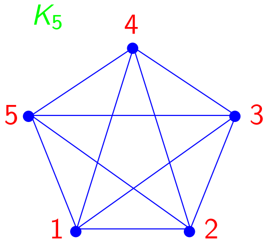


K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati "si incrocino"

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece



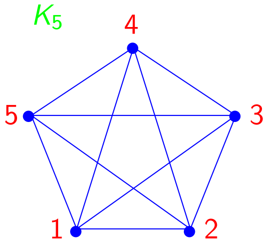
$n = 5$

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati “si incrocino”

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece



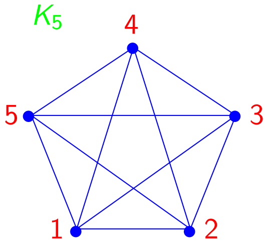
$$n = 5, \quad m = 10$$

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati "si incrocino"

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece



$$n = 5, \quad m = 10$$

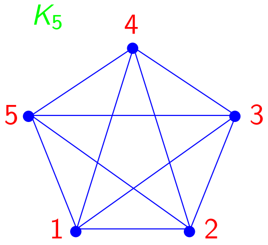
$$3n - 6 \ = \ 9$$

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati “si incrocino”

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece



$n = 5, \quad m = 10$

$3n - 6 \; = \; 9$

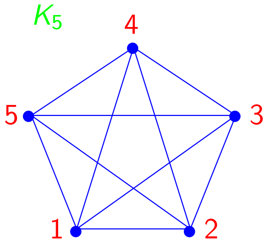
In questo caso, quindi, $m > 3n - 6$

K_5 non è planare

Finalmente possiamo spiegare perché K_5 non è planare, cioè perché non è possibile disegnarlo senza che i lati "si incrocino"

Da quanto detto nella slide precedente, in un grafo planare e connesso, deve valere la diseguaglianza $m \leq 3n - 6$ (dove m è il numero dei lati e n è il numero dei vertici).

Quindi se K_5 fosse planare, allora dovrebbe rispettare questa formula (poiché esso è ovviamente connesso). Invece



$$n = 5, \quad m = 10$$

$$3n - 6 \; = \; 9$$

In questo caso, quindi, $m > 3n - 6$

Questo significa che K_5 non è planare!

Ritorno al problema iniziale

Ritorno al problema iniziale

Quindi abbiamo dimostrato che:

NON È POSSIBILE DISEGNARE 5 REGIONI TUTTE ADIACENTI FRA DI LORO.

Ritorno al problema iniziale

Quindi abbiamo dimostrato che:

NON È POSSIBILE DISEGNARE 5 REGIONI TUTTE ADIACENTI FRA DI LORO.

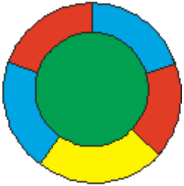
Comunque questo è ben lungi dal dimostrare il teorema dei quattro colori, infatti

Ritorno al problema iniziale

Quindi abbiamo dimostrato che:

NON È POSSIBILE DISEGNARE 5 REGIONI TUTTE ADIACENTI FRA DI LORO.

Comunque questo è ben lungi dal dimostrare il teorema dei quattro colori, infatti

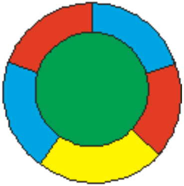


Ritorno al problema iniziale

Quindi abbiamo dimostrato che:

NON È POSSIBILE DISEGNARE 5 REGIONI TUTTE ADIACENTI FRA DI LORO.

Comunque questo è ben lungi dal dimostrare il teorema dei quattro colori, infatti



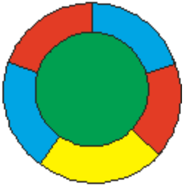
In questo disegno non ci sono quattro regioni tutte adiacenti fra di loro, eppure quattro colori sono necessari.

Ritorno al problema iniziale

Quindi abbiamo dimostrato che:

NON È POSSIBILE DISEGNARE 5 REGIONI TUTTE ADIACENTI FRA DI LORO.

Comunque questo è ben lungi dal dimostrare il teorema dei quattro colori, infatti



In questo disegno non ci sono quattro regioni tutte adiacenti fra di loro, eppure quattro colori sono necessari.

Questo problema non è locale, questo lo rende così difficile!