Introduzione alla coomologia locale

MOTIVAZIONI - RANGO ARITMETICO

Lo studio della coomologia locale permette di dimostrare risultati sorprendenti, come il seguente:

Teorema (Fulton-Hansen, Annals of Math. 1979): Sia $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo su un campo algebricamente chiuso, e X e Y due sottovarietà irriducibili proiettive di $\mathbb{P}^n$. Se $\dim X + \dim Y > n$, allora $X \cap Y$ è connesso.

Purtroppo non arriveremo a dimostrare Fulton-Hansen: ci porremo un altro obiettivo. Consideriamo l'ideale dell'anello di polinomi:

$$J = (xu,\ xv,\ yu,\ yv) \subseteq \mathbb{k}[x, y, u, v]$$

Problema: Quanti polinomi servono per definire J a meno di radicale???

Definizione: Il *rango aritmetico* di un ideale I di un anello A (unitario, commutativo, Noetheriano) è:

$$\mathrm{ara}(I) := \min\{r \in \mathbb{N} :\ \exists\ a_1, \dots, a_r \in A : \sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \dots, a_r)}\}.$$

Se A è graduato e I è omogeneo, possiamo anche definire il *rango aritmetico omogeneo* di I come:

$$\mathrm{ara}_h(I) := \min\{r \in \mathbb{N} :\ \exists\ a_1, \dots, a_r \in A \text{ omogenei } : \sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \dots, a_r)}\}.$$

Esercizio: Dimostrare che $\mathrm{ara}(I) \geq \mathrm{ht}(I)$.

Tornando alla nostra discussione, quindi ci stiamo chiedendo quale sia il rango aritmetico di $J = (xu, xv, yu, yv) \subseteq \Bbbk[x, y, u, v]$. Quando $\Bbbk$ è algebricamente chiuso, grazie al Nullstellensatz, ciò è equivalente a chiedersi quante ipersuperfici di $\mathbb{A}^4$ serva intersecare per ottenere il luogo degli zeri $\mathcal{Z}(J)$. Notiamo che $J = (xu, xv, yu, yv) = (x, y) \cap (u, v)$. Questo significa che $\mathcal{Z}(J)$ è l'unione dei due piani di $\mathbb{A}^4$ di equazioni $x = y = 0$ e $u = v = 0$. Poiché $\mathrm{ht}(J) = 2$, sappiamo che $2 \leq \mathrm{ara}(J) \leq 4$. Consideriamo il seguente ideale:

$$J' := (xu,\ xv + yu,\ yv) \subseteq J.$$

Siccome $(xv)^2 = (xv + yu)xv - xuyv$ e $(yu)^2 = (xv + yu)yu - xuyv$, abbiamo che $J \subseteq \sqrt{J'}$. In effetti si ha $\sqrt{J} = J = \sqrt{J'}$, da cui

$$2 \leq \mathrm{ara}(J) \leq \mathrm{ara}_h(J) \leq 3.$$

Come conseguenza dei risultati di queste lezioni proveremo che non si possono usare soltanto due equazioni per definire J a meno di radicale. In altre parole proveremo che $\mathrm{ara}(J) = \mathrm{ara}_h(J) = 3$.

A titolo informativo, in generale vale il seguente upper-bound:

Teorema (Eisenbud-Evans, Inventiones Math. 1972): Dato un qualunque ideale $J \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, si ha $\mathrm{ara}(J) \leq n$. Se J è omogeneo e tale che $\mathrm{ht}(J) < n$, allora $\mathrm{ara}_h(J) \leq n - 1$.

Teorema: Sia A un anello di dimensione n e I un suo ideale. Allora

$$\text{ara}(I) \leq n+1.$$

Dim.: $\text{Spec}(A) := \{\text{ideali primi di } A\}$, $\mathcal{V}(I) := \{\wp \in \text{Spec}(A) : I \subseteq \wp\}$, $\mathrm{Min}(I) := \{\wp \in \mathcal{V}(I) \text{ minimali}\}$. Dato un secondo ideale $J \subseteq A$,

$$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J} \iff \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(I) \iff \mathrm{Min}(J) \subseteq \mathcal{V}(I).$$

Se $\sqrt{I} = \sqrt{(0)}$ non c'è niente da dimostrare. Quindi possiamo supporre che $\sqrt{(0)} \subsetneq \sqrt{I}$, cioè che $M_0 := \mathrm{Min}((0)) \setminus \mathcal{V}(I) \neq \emptyset$. Siccome M_0 è finito, il prime avoidance lemma implica che esiste $x \in I$ tale che $x \notin \wp \ \forall \ \wp \in M_0$.

Supponiamo di aver trovato, per induzione, $x_1, \ldots, x_k \in I$ tali che:

$$\mathcal{V}(J_k) \cap \{\wp \in \text{Spec}(A) : \text{ht}(\wp) \leq k-1\} \subseteq \mathcal{V}(I), \ \ J_k := (x_1, \ldots, x_k) \subseteq I.$$

Sia $M_k := \{\wp \in \mathcal{V}(J_k) \setminus \mathcal{V}(I) : \text{ht}(\wp) = k\} \setminus \mathcal{V}(I)$. Si ha $M_k \subseteq \mathrm{Min}(J_k)$. Se $M_k = \emptyset$, l'Hauptidealsatz implica che $\mathrm{Min}(J_k) \subseteq \mathcal{V}(I)$. Quindi, in tal caso, $\sqrt{I} = \sqrt{J_k}$ e $\text{ara}(I) \leq k$. Altrimenti, poiché $|M_k| < \infty$, possiamo scegliere $x_{k+1} \in I$ che non appartenga ad alcun primo di M_k. Questo procedimento avrà comunque termine quando $k = n+1$, poiché $M_{n+1} = \emptyset$. $\square$

Esercizio: Sia A un anello di dimensione $n \geq 1$ e I un suo ideale. Modificando appena la dimostrazione della slide precedente, dimostrare che:

- Se A è locale, allora $\mathrm{ara}(I) \leq n$.
- Se $A = \oplus_{d\in\mathbb{N}} A_d$ è graduato e $I \subseteq \oplus_{d>0} A_d$ è omogeneo, $\mathrm{ara}_h(I) \leq n$.

Esercizio*: Sia $J \subseteq \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ un ideale monomiale square-free. Sia d il minimo fra i gradi di un monomio in J. Dimostrare che $\mathrm{ara}_h(J) \leq n - d + 1$.

I FUNTORI DI COOMOLOGIA LOCALE

Sia A un anello unitario, commutativo e Noetheriano, e $I \subseteq A$ un ideale.

Definizione: Dato un A-modulo M, il suo *sottomodulo di I-torsione* è:

$$\Gamma_I(M) := \{m \in M \ : \ \forall\, x \in I \ \exists\, k \in \mathbb{N} : x^k m = 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (0 :_M I^k).$$

Se $f : M \to N$ è una mappa di A-moduli, allora $f(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(N)$. Quindi possiamo definire $\Gamma_I(f) : \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(N)$ come la restrizione di f. In questo modo Γ_I diventa un funtore covariante dalla categoria degli A-moduli, $\mathrm{Mod}(A)$, in se stessa. Chiameremo Γ_I il *funtore di I-torsione*.

Esercizio: Dimostrare che:

- se $J \subseteq A$ è un ideale tale che $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, allora $\Gamma_I = \Gamma_J$.
- Γ_I è A-lineare, cioè la mappa $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(\Gamma_I(M), \Gamma_I(N))$ è un omomorfismo di A-moduli.
- Γ_I è esatto a sinistra.

Dunque $\Gamma_I : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ è un funtore covariante e esatto a sinistra, come il funtore $\mathrm{Hom}_A(M, -)$, dove M è un A-modulo fissato. Di un tale funtore si possono considerare i *funtori derivati*: preso un A-modulo M, se ne considera una risoluzione iniettiva

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to E^2 \to \dots$$

Che una tale risoluzione esista dipende dal fatto che $\mathrm{Mod}(A)$ è una categoria con *abbastanza* oggetti iniettivi (fatto visto in AlgS2). Dopodiché si applica Γ_I alla sequenza esatta precedente, ottenendo il seguente complesso:

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} \Gamma_I(E^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma_I(E^1) \xrightarrow{d^1} \Gamma_I(E^2) \to \dots$$

Al variare di $i \in \mathbb{N}$, si può dimostrare che il modulo $H_I^i(M) := \dfrac{\mathrm{Ker}(d^i)}{\mathrm{Im}(d^{i-1})}$ non dipende dalla risoluzione iniettiva scelta. Inoltre, ogni mappa di A-moduli $M \xrightarrow{f} N$ induce un unica mappa di A-moduli $H_I^i(M) \xrightarrow{H_I^i(f)} H_I^i(N)$.

Definizione: Ci riferiremo al funtore H_I^i come all'i-esimo funtore di coomologia locale a supporto in I. Inoltre, chiameremo $H_I^i(M)$ l'i-esimo modulo di coomologia locale a supporto in I di M.

SUCCESSIONI CONNESSE DI FUNTORI

Sia $\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funtori covarianti e additivi dalla categoria degli A-moduli in se stessa. Una tale successione si dice *connessa* se ogni sequenza esatta corta

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

ne induce una lunga (gli omomorfismi $T^n(P) \to T^{n+1}(M)$ sono detti *connettori*):

$$0 \to T^0(M) \xrightarrow{T^0(f)} T^0(N) \xrightarrow{T^0(g)} T^0(P) \to T^1(M) \xrightarrow{T^1(f)} T^1(N) \xrightarrow{T^1(g)} T^1(P) \to T^2(M) \to \dots$$

Inoltre, dato un diagramma commutativo a righe esatte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ne viene indotto un altro (sempre a righe esatte):

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & T^n(M) \arrow[r] \arrow[d] & T^n(N) \arrow[r] \arrow[d] & T^n(P) \arrow[r] \arrow[d] & T^{n+1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & T^n(M') \arrow[r] & T^n(N') \arrow[r] & T^n(P') \arrow[r] & T^{n+1}(M') \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Quando diciamo che due funtori (covarianti) $F : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ e $G : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ sono *isomorfi* intendiamo dire che per ogni A-modulo M c'è un isomorfismo $\phi_M : F(M) \to G(M)$ tale che, dato un omomorfismo $f : M \to N$, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(M) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(N) \arrow[r, "\phi_N"'] & G(N) \end{tikzcd}$$

A volte ci si riferisce a tale proprietà dicendo che l'isomorfismo $F(M) \cong G(M)$ è *naturale*.

Proposizione: I funtori Γ_I e H_I^0 sono isomorfi e $\{H_I^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione connessa di funtori.

Esercizio: Dimostrare che:

- se $J \subseteq A$ è un ideale tale che $\sqrt{J} = \sqrt{I}$, allora $H_I^i = H_J^i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.
- H_I^i è A-lineare per ogni $i \in \mathbb{N}$.
- se A è un PID, allora $H_I^i(M) = 0$ per ogni $i > 1$.

LIMITI DIRETTI IN $\mathrm{Mod}(A)$

Definizione: Dato un insieme parzialmente ordinato Λ, *un sistema diretto (in $\mathrm{Mod}(A)$)* è una collezione di A-moduli M_λ, $\lambda \in \Lambda$, tale che per ogni $\lambda \leq \mu$ c'è un omomorfismo di A-moduli $f_{\lambda\mu} : M_\lambda \to M_\mu$ con le seguenti proprietà:

- $f_{\lambda\lambda} = 1_{M_\lambda}$.
- se $\lambda \leq \mu \leq \nu$, allora $f_{\mu\nu} \circ f_{\lambda\mu} = f_{\lambda\nu}$.

Se $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ e $\mathcal{G} = \{N_\lambda, g_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ sono sistemi diretti su Λ, per mappa $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si intende una collezione di omomorfismi di A-moduli $\phi_\lambda : M_\lambda \to N_\lambda$ tali che tutti i quadrati

$$\begin{tikzcd} M_\lambda \arrow[r, "f_{\lambda\mu}"] \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & M_\mu \arrow[d, "\phi_\mu"] \\ N_\lambda \arrow[r, "g_{\lambda\mu}"'] & N_\mu \end{tikzcd}$$

commutano. Dato un A-modulo P, gli si pu associare un sistema diretto $\widetilde{P} = \{P_\lambda, h_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ dove $P_\lambda = P$ e $h_{\lambda\mu} = 1_P$. Per una mappa da $\mathcal{F}$ a P, quindi, intenderemo una mappa da $\mathcal{F}$ a $\widetilde{P}$.

Definizione: Sia un sistema diretto $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$. Un A-modulo M si dice il limite diretto di $\mathcal{F}$ se:

- esiste una mappa $\phi : \mathcal{F} \to M$.
- per ogni A-modulo N e ogni mappa $\psi : \mathcal{F} \to N$, $\exists!$ omomorfismo di A-moduli $g : M \to N$ tale che $\psi_\lambda = g \circ \phi_\lambda \ \forall \ \lambda \in \Lambda$.

Denoteremo un limite diretto di $\mathcal{F}$ con $\varinjlim M_\lambda$. Inoltre, dato $m \in M_\lambda$, denoteremo con $\varinjlim m$ la sua immagine in $\varinjlim M_\lambda$.

Esercizi: dimostrare che, se un sistema diretto di A-moduli ammette un limite, allora esso è unico a meno di isomorfismo.

- Dato un insieme Λ, consideriamo su di esso l'ordine banale: cioè $\lambda \leq \mu \iff \lambda = \mu$. Dimostrare che, data un sistema diretto di A-moduli M_λ con $\lambda \in \Lambda$, si ha $\varinjlim M_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.
- Sia M un A-modulo e $\{M_\lambda\}_\Lambda$ la famiglia di tutti i suoi sottomoduli finitamente generati. Poniamo $\lambda \leq \mu \iff M_\lambda \subseteq M_\mu$ e $f_{\lambda\mu}$ la semplice inclusione $M_\lambda \subseteq M_\mu$. Dimostrare che $\varinjlim M_\lambda \cong M$.
- Sia $S \subseteq A$ un sottoinsieme e $\Lambda = \{\lambda : S \to \mathbb{N} : |\lambda^{-1}(\mathbb{N} \setminus \{0\})| < \infty\}$. Diamo a Λ l'ordine puntuale e definiamo $M_\lambda = M \ \forall \ \lambda$. Se $\lambda \leq \mu$ l'omomorfismo è quello dato dalla moltiplicazione per $\prod_{s \in S} s^{\lambda(s)-\mu(s)} \in A$. Se $\overline{S}$ è la chiusura moltiplicativa di S, dimostrare che $\varinjlim M_\lambda \cong \overline{S}^{-1} M$.

Teorema: Dato un sistema diretto $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$, esiste un unico limite diretto $\varinjlim M_\lambda$.

Dim.: L'unicità è già stata dimostrata, quindi concentriamoci sull'esistenza. Sia $M' := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e $\iota_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M'$ l'immersione naturale per ogni $\lambda \in \Lambda$. Consideriamo il sottomodulo $M'' \subseteq M'$ generato da:

$$\iota_\lambda(m) - \iota_\mu(f_{\lambda\mu}(m)) \ \ \forall\ \lambda \in \Lambda,\ \ \mu \geq \lambda,\ \ m \in M_\lambda.$$

Vogliamo dimostrare che $\varinjlim M_\lambda \cong M := M'/M''$. Gli omomorfismi di A-moduli $\phi_\lambda : M_\lambda \to M$ dati da $\phi_\lambda(m) := \overline{\iota_\lambda(m)}$ soddisfano $\phi_\lambda = \phi_\mu \circ f_{\lambda\mu}$ per la definizione di M'', dunque la collezione $\phi = \{\phi_\lambda\}_\Lambda$ definisce una mappa da $\mathcal{F}$ a M. Il fatto che la coppia (M, ϕ) soddisfi la seconda proprietà della definizione di limite diretto è lasciato come esercizio. $\square$

Teorema: I limiti diretti commutano con il prodotto tensore. Cioè dato un sistema diretto $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ e un A-modulo N, si ha l'isomorfismo:

$$(\varinjlim M_\lambda) \otimes_A N \cong \varinjlim (M_\lambda \otimes_A N).$$

Una mappa $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ fra due sistemi diretti $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ e $\mathcal{G} = \{N_\lambda, g_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ induce in modo naturale un omomorfismo di A-moduli fra i rispettivi limiti diretti: $\varinjlim \phi_\lambda : \varinjlim M_\lambda \to \varinjlim N_\lambda$.

Definizione: Un insieme parzialmente ordinato Λ si dice *diretto* se $\forall\ \lambda, \mu \in \Lambda\ \exists\ \nu \in \Lambda : \lambda \leq \nu$ e $\mu \leq \nu$.

Teorema: Siano $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$, $\mathcal{G} = \{N_\lambda, g_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ e $\mathcal{H} = \{P_\lambda, h_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ sistemi diretti su un insieme diretto Λ. Supponiamo che siano date mappe $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ tali che

$$M_\lambda \xrightarrow{\phi_\lambda} N_\lambda \xrightarrow{\psi_\lambda} P_\lambda$$

è una successione esatta di A-moduli per ogni $\lambda \in \Lambda$. Allora

$$\varinjlim M_\lambda \xrightarrow{\varinjlim \phi_\lambda} \varinjlim N_\lambda \xrightarrow{\varinjlim \psi_\lambda} \varinjlim P_\lambda$$

è una successione esatta di A-moduli.

Dim.: $\mathrm{Im}(\varinjlim \phi_\lambda) \subseteq \mathrm{Ker}(\varinjlim \psi_\lambda)$ è chiaro.

$\mathrm{Ker}(\varinjlim \psi_\lambda) \subseteq \mathrm{Im}(\varinjlim \phi_\lambda)$: Sia $y \in \varinjlim N_\lambda$ tale che $(\varinjlim \psi_\lambda)(y) = 0$. Poiché Λ è diretto, $\exists\ \lambda \in \Lambda, n \in N_\lambda : \varinjlim n = y$. Dunque, $\varinjlim(\psi_\lambda(n)) = (\varinjlim \psi_\lambda)(\varinjlim n) = 0$. Ancora poiché Λ è diretto, esiste $\mu \geq \lambda$ tale che $h_{\lambda\mu}(\psi_\lambda(n)) = 0$. Quindi $g_{\lambda\mu}(n) \in \mathrm{Ker}(\psi_\mu) = \mathrm{Im}(\phi_\mu)$, cioè esiste $m \in M_\mu$ tale che $\phi_\mu(m) = g_{\lambda\mu}(n)$. Abbiamo finito, in quanto:

$$(\varinjlim \phi_\lambda)(\varinjlim m) = \varinjlim(\phi_\mu(m)) = \varinjlim(g_{\lambda\mu}(n)) = \varinjlim n = y.$$

$\square$

Esercizio: Siano $\mathcal{F} = \{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$, $\mathcal{G} = \{N_\lambda, g_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ e $\mathcal{H} = \{P_\lambda, h_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ sistemi diretti su un insieme diretto Λ. Supponiamo che siano date mappe $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ tali che

$$M_\lambda \xrightarrow{\phi_\lambda} N_\lambda \xrightarrow{\psi_\lambda} P_\lambda$$

è un complesso di A-moduli per ogni $\lambda \in \Lambda$. Dopo essersi assicurati del fatto che $\{\mathrm{Ker}(\psi_\lambda)\}_\Lambda$, $\{\mathrm{Im}(\phi_\lambda)\}_\Lambda$ e $\{\mathrm{Ker}(\psi_\lambda)/\,\mathrm{Im}(\phi_\lambda)\}_\Lambda$ ereditano la struttura di sistemi diretti, dimostrare che:

$$\frac{\mathrm{Ker}(\varinjlim \psi_\lambda)}{\mathrm{Im}(\varinjlim \phi_\lambda)} \cong \varinjlim \left(\frac{\mathrm{Ker}(\psi_\lambda)}{\mathrm{Im}(\phi_\lambda)} \right)$$

Esercizio: Usare il teorema della slide precedente per dimostrare che la localizzazione è un funtore esatto.

LIMITI INVERSI IN $\mathrm{Mod}(A)$

A titolo informativo, esiste una nozione "duale" dei limiti diretti: dato un insieme parzialmente ordinato Λ, *un sistema inverso (in* $\mathrm{Mod}(A)$*)* è una collezione di A-moduli M_λ, $\lambda \in \Lambda$, tale che per ogni $\lambda \geq \mu$ c'è un omomorfismo di A-moduli $f_{\lambda\mu} : M_\lambda \to M_\mu$ con le proprietà analoghe a quelle dei sistemi diretti. Come nel caso dei limiti diretti, si può definire il *limite inverso*, che si denota con $\varprojlim M_\lambda$ (questa volta la mappa che fa coppia col limite sarà dal limite al sistema). Anche in questo caso si può dimostrare che il limite inverso esiste ed è unico a meno d'isomorfismo.

Esempio: Dato un ideale $I \subseteq A$ e un A-modulo M, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $m \geq n$ è ben definito l'omomorfismo di A-moduli:

$$M/I^m M \longrightarrow M/I^n M.$$

Tali omomorfismi danno luogo ad un sistema inverso relativamente alla collezione di A-moduli $\{M/I^n M\}_{\mathbb{N}}$. Il limite inverso di tale sistema viene detto il *completamento I-adico di M* e denotato con $\widehat{M^I}$. Un caso molto importante è quando A è un anello locale e I è il suo unico ideale massimale. In tal caso il limite inverso è semplicemente detto il completamento di M e denotato con $\widehat{M}$.

COOMOLOGIA LOCALE: SECONDA DEFINIZIONE

Def.: Diremo che due successioni connesse di funtori $\{T^n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{S^n\}_{\mathbb{N}}$ sono isomorfe fra loro se:

- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ c'è un isomorfismo di funtori $\phi^n : T^n \to S^n$.
- Per ogni sequenza esatta corta $0 \to M \to N \to P \to 0$ in $\mathrm{Mod}(A)$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & T^n(M) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^n_M"'] & T^n(N) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^n_N"'] & T^n(P) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^n_P"'] & T^{n+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{n+1}_M"'] & \dots \\ \dots \arrow[r] & S^n(M) \arrow[r] & S^n(N) \arrow[r] & S^n(P) \arrow[r] & S^{n+1}(M) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Teorema: Siano $\{T^n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{S^n\}_{\mathbb{N}}$ due successioni connesse di funtori. Se T^0 è isomorfo a S^0 e $T^n(E) = S^n(E) = 0$ per ogni A-modulo iniettivo E e per ogni $n \geq 1$, allora $\{T^n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{S^n\}_{\mathbb{N}}$ sono successioni connesse di funtori isomorfe.

Dim.: Sia M un A-modulo. Possiamo formare una sequenza esatta corta del tipo: $0 \to M \to E \to N \to 0$, dove E è iniettivo. Dalle ipotesi abbiamo un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^0(M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & T^0(E) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & T^0(N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & T^1(M) \arrow[r] & T^1(E)0 \\
0 \arrow[r] & S^0(M) \arrow[r] & S^0(E) \arrow[r] & S^0(N) \arrow[r] & S^1(M) \arrow[r] & S^1(E)0
\end{tikzcd}$$

In quanto conuclei di mappe isomorfe, $T^1(M) \cong S^1(M)$. Possiamo supporre di aver provato per induzione $T^i(P) \cong S^i(P)$ per ogni A-modulo P e per ogni $i \leq n$, dove $n \geq 1$. La sequenza esatta corta che abbiamo considerato per M induce anche sequenze esatte:

$$\begin{tikzcd}
T^n(E)0 \arrow[r] & T^n(N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & T^{n+1}(M) \arrow[r] & T^{n+1}(E)0 \\
S^n(E)0 \arrow[r] & S^n(N) \arrow[r] & S^{n+1}(M) \arrow[r] & S^{n+1}(E)0
\end{tikzcd}$$

Dunque $T^{n+1}(M) \cong T^n(N) \cong S^n(N) \cong S^{n+1}(M)$. $\square$

Def.: Una famiglia di ideali $\{I_n\}_{\mathbb{N}}$ di A si dice *inversa* se $I_m \subseteq I_n$ ogni qual volta $m \geq n$. Due famiglie inverse di ideali $\{I_n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{J_n\}_{\mathbb{N}}$ si dicono *cofinali* se:

$$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \exists\ m, k \in \mathbb{N}\ :\ J_m \subseteq I_n\ \text{ e }\ I_k \subseteq J_n.$$

Esempio: Dato un ideale $I = (a_1, \dots, a_r) \subseteq A$, la sua n-esima potenza bugiarda di Frobenius è l'ideale:

$$I^{[n]} := (a_1^n, \dots, a_r^n).$$

Si verifica facilmente che le famiglie inverse $\{I^n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{I^{[n]}\}_{\mathbb{N}}$ sono cofinali.

Una famiglia inversa di ideali di A è un sistema inverso di A-moduli (il poset Λ è $\mathbb{N}$). Consideriamo un sistema inverso di A-moduli $\{M_\lambda\}_\Lambda$ su un poset Λ. Per ogni A-modulo N, otteniamo un sistema diretto di A-moduli $\{\mathrm{Ext}^i_A(M_\lambda, N)\}_\Lambda$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Dunque possiamo associare a N l'A-modulo $\varinjlim \mathrm{Ext}^i_A(M_\lambda, N)$, e in effetti è immediato verificare che quest' associazione dà luogo ad un funtore. Se Λ è diretto, poiché $\{\mathrm{Ext}^i_A(M_\lambda, -)\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono successioni connesse di funtori per ogni $\lambda \in \Lambda$ e poiché il passaggio al limite diretto preserva l'esattezza, anche $\{\varinjlim \mathrm{Ext}^i_A(M_\lambda, -)\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una successione connessa di funtori.

Teorema: Sia $I \subseteq A$ un ideale. Se $\{I_n\}_{\mathbb{N}}$ è una famiglia inversa di ideali di A cofinale con $\{I^n\}_{\mathbb{N}}$, allora le due successioni connesse $\{H_I^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{\varinjlim \operatorname{Ext}_A^i(A/I_n, -)\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono isomorfe.

Dim.: Ovviamente $H_I^i(E) = \varinjlim \operatorname{Ext}_A^i(A/I_n, E) = 0$ per ogni E iniettivo e $i \geq 1$.

Quindi rimane da provare che Γ_I e $\varinjlim \operatorname{Hom}_A(A/I_n, -)$ sono funtori isomorfi. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha un isomorfismo di A-moduli $\operatorname{Hom}_A(A/I_n, M) \cong 0 :_M I_n$, dato da $\phi \mapsto \phi(\overline{1})$. È immediato vedere che questi isomorfismi sono naturali, rispetto a M, per ogni n. Inoltre anche $\{0 :_M I_n\}_{\mathbb{N}}$ è un sistema diretto (con le inclusioni come mappe) e gli isomorfismi $\{\operatorname{Hom}_A(A/I_n, M) \cong 0 :_M I_n\}_{\mathbb{N}}$ forniscono un isomorfismo fra i sistemi diretti $\{\operatorname{Hom}_A(A/I_n, M)\}_{\mathbb{N}}$ e $\{0 :_M I_n\}_{\mathbb{N}}$. Tale isomorfismo ne induce uno di A-moduli a livello dei limiti, cioè $\varinjlim \operatorname{Hom}_A(A/I_n, M) \cong \varinjlim(0 :_M I_n)$. Il quale è naturale rispetto a M, poiché gli isomorfismi $\operatorname{Hom}_A(A/I_n, M) \cong 0 :_M I_n$ lo sono per ogni n. È facile rendersi conto che $\varinjlim(0 :_M I_n) \cong \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(0 :_M I_n)$ (naturalmente rispetto a M). Finalmente, poiché $\{I_n\}_{\mathbb{N}}$ è cofinale con $\{I^n\}_{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(0 :_- I_n)$ è lo stesso funtore di $\Gamma_I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(0 :_- I^n)$. $\square$

Esercizio: Sia M un A-modulo e $a_1, \ldots, a_t \in A$ una sequenza M-regolare. Dati interi positivi $n_1, \ldots, n_t$, dimostrare che $a_1^{n_1}, \ldots, a_t^{n_t}$ è una sequenza M-regolare.

COOMOLOGIA LOCALE E GRADO

Teorema: Sia $I \subseteq A$ un ideale e M un A-modulo finitamente generato tale che $IM \neq M$. Allora

$$\mathrm{grado}(I, M) = \min\{i \in \mathbb{N} \ : \ H_I^i(M) \neq 0\}.$$

Dim.: Sia $g := \mathrm{grado}(I, M)$. Quindi c'è una sequenza M-regolare $a_1, \ldots, a_g$ di elementi di I. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la sequenza $a_1^n, \ldots, a_g^n$ è M-regolare e sta in I^n, dunque $\mathrm{grado}(I^n, M) \geq g$ e cioè $\mathrm{Ext}_A^i(A/I^n, M) = 0 \ \forall \ i < g$. Quindi

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim \mathrm{Ext}_A^i(A/I^n, M) = 0 \quad \forall \ i < g.$$

Per dimostrare che $H_I^g(M) \neq 0$ procediamo per induzione su g. Se $g = 0$ allora $I \subseteq \bigcup_{\wp \in \mathrm{Ass}(M)} \wp$. Quindi esiste $\wp \in \mathrm{Ass}(M)$ tale che $I \subseteq \wp$. Sia $0 \neq m \in M$ tale che $\wp = 0 :_M m$. Allora $m \in \Gamma_I(M)$, cioè $H_I^0(M) \neq 0$.
Se $g \geq 1$, sia $a \in I$ un elemento M-regolare. La successione esatta corta:

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot a} M \to M/aM \to 0$$

induce:

$$H_I^{g-1}(M) \to H_I^{g-1}(M/aM) \to H_I^g(M)$$

Sappiamo che $H_I^{g-1}(M) = 0$. Inoltre, poiché $\mathrm{grado}(I, M/aM) = g - 1$, per induzione $H_I^{g-1}(M/aM) \neq 0$. Quindi $H_I^g(M)$ è forzato a non essere 0. $\square$

Corollario: Se $(A, \mathfrak{m})$ è locale e $M \neq 0$ è finitamente generato, allora

$$\mathrm{depth}(M) = \min\{i \in \mathbb{N} \ : \ H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0\}.$$

In particolare M è Cohen-Macaulay se e solo se $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0 \ \ \forall \ i < \dim M$.

Corollario: Se A è Cohen-Macaulay e $I \subseteq A$ un ideale di altezza h, allora

$$H^h_I(A) \neq 0.$$

Dim.: Poiché A è Cohen-Macaulay, $h = \mathrm{grado}(I, A)$. $\square$

SEQUENZA DI MAYER-VIETORIS

Lemma: Sia $F : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ un funtore additivo. Dati due A-moduli M e N, $F(M \oplus N) \cong F(M) \oplus F(N)$.

Dim.: Basta osservare che per A-moduli P, P_1 e P_2 si ha che $P \cong P_1 \oplus P_2$ se e solo se esistono omomorfismi di A-moduli $\iota_i : P_i \to P$ e $\pi_i : P \to P_i$ tali che:

$$\pi_1\iota_1 = 1_{P_1}, \quad \pi_2\iota_2 = 1_{P_2}, \quad \pi_1\iota_2 = 0 = \pi_2\iota_1, \quad \iota_1\pi_1 + \iota_2\pi_2 = 1_P. \quad \square$$

Esercizio: Siano $\{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ e $\{N_\lambda, g_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ sistemi diretti su un insieme parzialmente ordinato Λ. Dimostrare che $\{M_\lambda \oplus N_\lambda, f_{\lambda\mu} \oplus g_{\lambda\mu}\}_\Lambda$ è un sistema diretto su Λ e che $\varinjlim(M_\lambda \oplus N_\lambda) \cong \varinjlim M_\lambda \oplus \varinjlim N_\lambda$.

Lemma: Siano I e J due ideali di A. La famiglia inversa $\{I^n + J^n\}_\mathbb{N}$ è cofinale con $\{(I+J)^n\}_\mathbb{N}$, mentre $\{I^n \cap J^n\}_\mathbb{N}$ è cofinale con $\{(I \cap J)^n\}_\mathbb{N}$.

Dim.: Vedere che $\{I^n + J^n\}_\mathbb{N}$ è cofinale con $\{(I+J)^n\}_\mathbb{N}$ è semplice, quindi dimostriamo che $\{I^n \cap J^n\}_\mathbb{N}$ è cofinale con $\{(I \cap J)^n\}_\mathbb{N}$. Ovviamente $(I \cap J)^n \subseteq I^n \cap J^n$ per ogni n. Dall'altra parte, fissato n, il lemma di Artin-Rees ci assicura che esiste $c > 0$ tale che $I^m \cap J^n = I^{m-c}(I^c \cap J^n)\ \forall\ m \geq c$. Allora

$$I^{n+c} \cap J^{n+c} \subseteq I^{n+c} \cap J^n = I^n(I^c \cap J^n) \subseteq I^n J^n \subseteq I^n \cap J^n. \quad \square$$

Teorema (Sequenza di Mayer-Vietoris): Dati due ideali $I, J \in A$ e un A-modulo M, vi è una sequenza esatta lunga

$$0 \to H^0_{I+J}(M) \to H^0_I(M) \oplus H^0_J(M) \to H^0_{I\cap J}(M) \to H^1_{I+J}(M) \to H^1_I(M) \oplus H^1_J(M) \to H^1_{I\cap J}(M) \to \dots$$

Inoltre, se $M \xrightarrow{f} N$ è un omomorfismo di A-moduli, il seguente:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H^i_{I+J}(M) \arrow[r] \arrow[d, "H^i_{I+J}(f)"'] & H^i_I(M) \oplus H^i_J(M) \arrow[r] \arrow[d, "H^i_I(f)\oplus H^i_J(f)"'] & H^i_{I\cap J}(M) \arrow[r] \arrow[d, "H_{I\cap J}(f)"'] & H^{i+1}_{I+J}(M) \arrow[r] \arrow[d, "H^{i+1}_{I+J}(f)"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H^i_{I+J}(N) \arrow[r] & H^i_I(N) \oplus H^i_J(N) \arrow[r] & H^i_{I\cap J}(N) \arrow[r] & H^{i+1}_{I+J}(N) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

è un morfismo di complessi.

Dim.: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo una sequenza esatta corta:

$$0 \to A/(I^n \cap J^n) \to A/I^n \oplus A/J^n \to A/(I^n + J^n) \to 0$$

che induce una sequenza esatta lunga:

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_A(A/(I^n + J^n), M) \to \mathrm{Ext}^0_A(A/I^n, M) \oplus \mathrm{Ext}^0_A(A/J^n, M) \to \mathrm{Ext}^0_A(A/(I^n \cap J^n), M) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(A/(I^n + J^n), M) \to \mathrm{Ext}^1_A(A/I^n, M) \oplus \mathrm{Ext}^1_A(A/J^n, M) \to \mathrm{Ext}^1_A(A/(I^n \cap J^n), M) \to \dots$$

Inoltre un omomorfismo di A-moduli $M \xrightarrow{f} N$ induce un morfismo di complessi con la analoga sequenza esatta lunga dove M è rimpiazzato da N.

Se si fa variare $n \in \mathbb{N}$, la sequenza esatta lunga della slide precedente induce anche una "sequenza esatta lunga" a livello di sistemi diretti (su $\mathbb{N}$). Inoltre abbiamo visto che il passaggio al limite diretto preserva l'esattezza ($\mathbb{N}$ è diretto). Quindi otteniamo una sequenza esatta lunga anche a livello dei limiti:

$$0 \to \varinjlim \mathrm{Ext}^0_A(A/(I^n + J^n), M) \to \varinjlim \mathrm{Ext}^0_A(A/I^n, M) \oplus \varinjlim \mathrm{Ext}^0_A(A/J^n, M)) \to \varinjlim \mathrm{Ext}^0_A(A/(I^n \cap J^n), M) \to$$

$$\varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(A/(I^n + J^n), M) \to \varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(A/I^n, M) \oplus \varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(A/J^n, M)) \to \varinjlim \mathrm{Ext}^1_A(A/(I^n \cap J^n), M) \to \ldots$$

Inoltre un omomorfismo di A-moduli $M \xrightarrow{f} N$ induce un morfismo di complessi con la analoga sequenza esatta lunga dove M è rimpiazzato da N, poiché $\varinjlim$ è un funtore dalla categoria dei sistemi diretti di A-moduli a $\mathrm{Mod}(A)$. A questo punto il teorema segue dall'interpretazione dei funtori di coomologia locale come limiti diretti di Ext e dal fatto che $\{I^n + J^n\}_{\mathbb{N}}$ è cofinale con $\{(I + J)^n\}_{\mathbb{N}}$ e $\{I^n \cap J^n\}_{\mathbb{N}}$ è cofinale con $\{(I \cap J)^n\}_{\mathbb{N}}$. $\square$

SPAZI TOPOLOGICI LEGATI AGLI ANELLI

Dato un anello A, il suo *spettro* è l'insieme

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\wp \subseteq A \ : \ \wp \text{ è un ideale primo}\}.$$

Possiamo dare a $\mathrm{Spec}(A)$ una struttura di spazio topologico, definendo i chiusi come i sottoinsiemi $C \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ tali che esiste un ideale $I \subseteq A$ tale che:

$$C = \mathcal{V}(I) := \{\wp \in \mathrm{Spec}(A) \ : \ \wp \supseteq I\}.$$

Questa topologia è detta di *Zariski*.

Esercizio: Siano I, J e I_λ, al variare di $\lambda \in \Lambda$, ideali di A. Dimostrare che:

- $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$.
- $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$.
- $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}(I_\lambda) = \mathcal{V}(\sum_\lambda I_\lambda)$.

Dedurne che la topologia di Zariski è effettivamente una topologia. Dimostrare che $\mathrm{Spec}(A/I)$ è omeomorfo a $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$. Se $A = \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n]$ è l'anello di polinomi su un campo algebricamente chiuso, dimostrare che $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ è omeomorfo al sottospazio topologico dei punti chiusi di $\mathrm{Spec}(A/I)$, cioè all'insieme degli ideali massimali di A/I con la topologia indotta da quella di $\mathrm{Spec}(A/I)$.

Se A è graduato, il suo *spettro proiettivo* è l'insieme

$$\mathrm{Proj}(A) := \{\wp \not\supseteq \bigoplus_{d>0} A_d \;\; : \;\; \wp \text{ è un ideale omogeneo primo}\}.$$

Analogamente a prima possiamo dare a $\mathrm{Proj}(A)$ una struttura di spazio topologico, definendo i chiusi come i sottoinsiemi $C \subseteq \mathrm{Proj}(A)$ tali che esiste un ideale omogeneo $I \subseteq A$ tale che:

$$C = \mathcal{V}_+(I) := \{\wp \in \mathrm{Proj}(A) \;\; : \;\; \wp \supseteq I\}.$$

Esercizio: Analogamente a quanto fatto per $\mathrm{Spec}(A)$, dimostrare che quella che abbiamo definito su $\mathrm{Proj}(A)$ è effettivamente una topologia, che $\mathcal{V}_+(I) = \mathcal{V}_+(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$ e che c'è un omeomorfismo fra $\mathrm{Proj}(S/I)$ e $\mathcal{V}_+(I) \subseteq \mathrm{Proj}(S)$. Se $A = \mathbb{k}[x_0, \dots, x_n]$ è l'anello di polinomi su un campo algebricamente chiuso e I è un ideale omogeneo, dimostrare che $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ è omeomorfo al sottospazio topologico dei punti chiusi di $\mathrm{Proj}(A/I)$, cioè all'insieme degli ideali omogenei primi di A/I di altezza $\dim A/I - 1$ con la topologia indotta da quella di $\mathrm{Proj}(A/I)$.

Quando $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale, spesso si considera lo *spettro bucato di A*, ovvero il sottospazio topologico $\mathrm{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\} \subseteq \mathrm{Spec}(A)$.

CONNESSIONE

$X = \mathrm{Spec}(A)$ non è connesso se e solo se esistono due chiusi $C, K \subseteq X$ tali che:

- $C \neq X \neq K$.
- $C \cup K = X$.
- $C \cap K = \emptyset$.

Siano I, J ideali di A tali che $C = \mathcal{V}(I)$ e $K = \mathcal{V}(J)$. Le condizioni precedenti sono equivalenti a:

- $\sqrt{I} \neq \sqrt{(0)} \neq \sqrt{J}$.
- $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{(0)}$.
- $I + J = A$.

Esercizi: Dimostrare che se A è locale allora $\mathrm{Spec}(A)$ è connesso. Sia $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ e $I \subseteq S$. Dimostrare che (per i primi due punti $\Bbbk$ deve essere algebricamente chiuso):

- $\mathrm{Spec}(S/I)$ è connesso se e solo se lo è $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{A}^n$.
- Se I è omogeneo, $\mathrm{Proj}(S/I)$ è connesso se e solo se lo è $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$.
- Se I è omogeneo, $A = S/I$ e lo spettro bucato di $A_{\mathfrak{m}}$, dove $\mathfrak{m} = (\overline{x_0}, \ldots, \overline{x_n})$, è connesso, allora anche $\mathrm{Proj}(A)$ è connesso.

Teorema (Hartshorne, 1962): Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale tale che $\operatorname{depth}(A) \geq 2$. Allora $\operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ è connesso.

Dim.: Per assurdo $\operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ non è connesso. Ciò significa che esistono ideali I e J di A tali che:

- $\sqrt{I} \neq \sqrt{(0)} \neq \sqrt{J}$.
- $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{(0)}$.
- $\sqrt{I + J} = \mathfrak{m}$.

Consideriamo il pezzo di sequenza di Mayer-Vietoris:

$$0 \to \Gamma_{\mathfrak{m}}(A) \to \Gamma_I(A) \oplus \Gamma_J(A) \to \Gamma_{(0)}(A) \to H^1_{\mathfrak{m}}(A)$$

$$0 \to \Gamma_I(A) \oplus \Gamma_J(A) \to A \to 0$$

Poiché $\sqrt{I} \neq \sqrt{(0)} \neq \sqrt{J}$, A è la somma di due A-sottomoduli strettamente contenuti in A, ma ciò non può succedere in un anello locale. $\square$

Corollario: Sia $S = \Bbbk[x_0, \dots, x_n]$ e $I \subseteq S$ un ideale omogeneo tale che $\mathrm{ara}_h(I) = \mathrm{ht}(I) \leq n - 1$. Allora $\mathrm{Proj}(S/I)$ è connesso. In particolare, se $\Bbbk$ è algebricamente chiuso, $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ è connesso.

Dim.: Sia $h = \mathrm{ht}(I)$, e $f_1, \dots, f_h \in S$ omogenei tali che, se $J = (f_1, \dots, f_h)$, allora $\sqrt{J} = \sqrt{I}$. Supponiamo per assurdo che $\mathrm{Proj}(S/J) \cong \mathrm{Proj}(S/I)$ non sia connesso. Allora, chiamando $A = S/J$, $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_n) \subseteq S$ e $\overline{\mathfrak{m}}$ l'immagine di $\mathfrak{m}$ in A, lo spettro bucato di $A_{\overline{\mathfrak{m}}}$ non è connesso. Siccome $A_{\overline{\mathfrak{m}}} \cong S_{\mathfrak{m}}/JS_{\mathfrak{m}}$ e $JS_{\mathfrak{m}}$ è un intersezione completa in un anello Cohen-Macaulay, $\mathrm{depth}(A_{\overline{\mathfrak{m}}}) = \dim(A_{\overline{\mathfrak{m}}})$. Infine $\mathrm{ht}(I) \leq n - 1 \implies \dim(A_{\overline{\mathfrak{m}}}) \geq 2$, che contraddice il teorema precedente. $\square$

Se $\Bbbk = \mathbb{C}$, su $\mathbb{P}^n$ abbiamo, oltre quella di Zariski, anche la classica topologia euclidea. Essendo quest'ultima più fine, ogni sottoinsieme di $\mathbb{P}^n$ che è connesso nella topologia euclidea lo è pure in quella di Zariski. Il viceversa è falso, basti pensare a $\mathbb{P}^1$ senza un punto. Sorprendentemente, si può dimostrare che un sottoinsieme del tipo $\mathcal{Z}(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ è connesso nella topologia euclidea se e solo se lo è in quella di Zariski!

Torniamo alla domanda postaci all'inizio del corso: dato l'ideale $J = (x, y) \cap (u, v) = (xu, xv, yu, yv)$ di $S = \Bbbk[x, y, u, v]$, c'eravamo chiesti quale fosse il rango aritmetico di J. Siccome $J = \sqrt{(xu,\ xv + yu,\ yv)}$ e $\mathrm{ht}(J) = 2$, avevamo ottenuto: $2 \leq \mathrm{ara}(J) \leq \mathrm{ara}_h(J) \leq 3$. Ora possiamo dire di più: infatti $\mathrm{Proj}(S/J)$ non è connesso, quindi per il corollario precedente $\mathrm{ara}_h(J) = 3$. Comunque il suddetto corollario ci dà solo un'ostruzione al fatto che una varietà sia insiemisticamente un'intersezione completa, ma ciò non è di grande aiuto nei casi in cui il rango aritmetico è più grande dell'altezza più uno. Ad esempio, consideriamo l'ideale $I = (x, y, z) \cap (u, v, t)$ di $S = \Bbbk[x, y, z, u, v, t]$. Si può dimostrare che $\mathrm{ara}_h(I) \leq 5$ (Esercizio!); inoltre, poiché $\mathrm{ht}(I) = 3$ e $\mathrm{Proj}(S/I)$ non è connesso, abbiamo che $4 \leq \mathrm{ara}_h(I) \leq 5$. Oggi daremo una terza interpretazione di coomologia locale, che ci permetterà di dimostrare che $\mathrm{ara}(I) = \mathrm{ara}_h(I) = 5$.

COOMOLOGIA LOCALE: TERZA DEFINIZIONE

Sia $x \in A$ e consideriamo il complesso di A-moduli:

$$C(x)^\bullet \ : \ 0 \longrightarrow C(x)^0 \longrightarrow C(x)^1 \longrightarrow 0,$$

dove $C(x)^0 = A$, $C(x)^1 = A_x$ e l'omomorfismo $A \to A_x$ è quello che a a associa $a/1$. Dati r elementi $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_r \in A$, definiamo:

$$C(\mathbf{x})^\bullet := C(x_1)^\bullet \otimes \ldots \otimes C(x_r)^\bullet.$$

Per ogni A-modulo M, il complesso $C(\mathbf{x}; M)^\bullet := C(\mathbf{x})^\bullet \otimes_A M$ è detto il *complesso di Čech di M rispetto a* $\mathbf{x}$. Vogliamo descriverlo più esplicitamente.

Esercizio: Dati due elementi $x, y \in A$ e un A-modulo M, trovare un isomorfismo di A-moduli $M_{xy} \xrightarrow{\cong} (M_x)_y$. Dedurne che $M_x \otimes_A A_y \cong M_{xy}$.

Per definizione di prodotto tensore di complessi, usando l'esercizio precedente:

$$C(\mathbf{x}; M)^p = \bigoplus_{1\le i_1<\ldots<i_p\le r} M_{x_{i_1}\cdots x_{i_p}} \quad \forall p = 1, \ldots, r.$$

Inoltre, per descrivere le mappe da $C(\mathbf{x}; M)^p \xrightarrow{d^p} C(\mathbf{x}; M)^{p+1}$, basta descrivere i "pezzi" $M_{x_{i_1}\cdots x_{i_p}} \longrightarrow M_{x_{j_1}\cdots x_{j_{p+1}}}$ al variare di $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le r$ e $1 \le j_1 < < \ldots < j_{p+1} \le r$. Essi sono 0 a parte quando $\{j_1, \ldots, j_{p+1}\} \setminus \{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_k\}$ per qualche $k = 1, \ldots, p+1$. In tal caso $M_{x_{j_1}\cdots x_{j_{p+1}}} \cong (M_{x_{i_1}\cdots x_{i_p}})_{x_{j_k}}$, e la mappa è quella ovvia da un modulo alla sua localizzazione moltiplicata per $(-1)^{k-1}$.

Esempio: Se $x, y, z \in A$, allora $C(x, y, z)^\bullet$ è:

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} A \xrightarrow{d^0} A_x \oplus A_y \oplus A_z \xrightarrow{d^1} A_{xy} \oplus A_{xz} \oplus A_{yz} \xrightarrow{d^2} A_{xyz} \xrightarrow{d^3} 0.$$

dove:

- $d^0(r) = (r/1, r/1, r/1)$.
- $d^1\left(\frac{r_1}{x^p}, \frac{r_2}{y^q}, \frac{r_3}{z^r}\right) = \left(\frac{x^q r_2}{(xy)^q} - \frac{y^p r_1}{(xy)^p}, \frac{x^r r_3}{(xz)^r} - \frac{z^p r_1}{(xz)^p}, \frac{y^r r_3}{(yz)^r} - \frac{z^q r_2}{(yz)^q}\right)$.
- $d^2\left(\frac{r_1}{(xy)^p}, \frac{r_2}{(xz)^q}, \frac{r_3}{(yz)^r}\right) = \frac{z^p r_1}{(xyz)^p} - \frac{y^q r_2}{(xyz)^q} + \frac{x^r r_3}{(xyz)^r}$.

Definizione: Data una sequenza $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_r \in A$ e $i = 0, \ldots, r$, l'*i-esimo funtore di coomologia di Čech rispetto a* $\mathbf{x}$ da $\mathrm{Mod}(A)$ in se stessa, associa ad un A-modulo M l'A-modulo $H^i(C(\mathbf{x}; M)^\bullet) := \mathrm{Ker}(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1})$.

Osserviamo che, data una sequenza esatta corta $0 \to M \to N \to P \to 0$ in $\mathrm{Mod}(A)$, siccome $S^{-1}A$ è un A-modulo piatto per ogni sistema moltiplicativo $S \subseteq A$, il complesso $0 \to C(\mathbf{x})^p \otimes_A M \to C(\mathbf{x})^p \otimes_A N \to C(\mathbf{x})^p \otimes_A P \to 0$ è esatto per ogni p. Quindi otteniamo una sequenza esatta corta di complessi $0 \to C(\mathbf{x}; M) \to C(\mathbf{x}; N) \to C(\mathbf{x}; P) \to 0$ che, grazie allo snake lemma induce una sequenza esatta lunga:

$$0 \to H^0(C(\mathbf{x}; M)^\bullet) \to H^0(C(\mathbf{x}; N)^\bullet) \to H^0(C(\mathbf{x}; P)^\bullet) \to H^1(C(\mathbf{x}; M)^\bullet) \to H^1(C(\mathbf{x}; N)^\bullet) \to \ldots$$

Dunque $\{H^i(C(\mathbf{x}; -)^\bullet)\}_{\mathbb{N}}$ è una successione connessa di funtori.

Vogliamo dimostrare che, se $I = (x_1, \ldots, x_r) \subseteq A$, allora $\{H^i(C(\mathbf{x}; -)^\bullet)\}_{\mathbb{N}}$ e $\{H^i_I\}_{\mathbb{N}}$ sono successioni connesse di funtori isomorfe.

Per dimostrare che $\{H^i(C(\mathbf{x}; -)^\bullet)\}_{\mathbb{N}}$ e $\{H^i_I\}_{\mathbb{N}}$ sono successioni connesse di funtori isomorfe ($I = (x_1, \dots, x_r)$), come abbiamo già fatto per interpretare la coomologia locale come limite diretto di Ext, è sufficiente dimostrare due fatti:

(i) $H^0(C(\mathbf{x}, -)^\bullet) \cong H^0_I$.

(ii) $H^i(C(\mathbf{x}, E)^\bullet) = 0$ per ogni A-modulo iniettivo E e $i \geq 1$.

Il punto (i) è facile: infatti $H^0(C(\mathbf{x}, M)^\bullet)$ è il nucleo della mappa:

$$M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r M_{x_i}$$

che manda $m \in M$ in $(m/1, \dots, m/1) \in \bigoplus_i M_{x_i}$. Tale elemento è 0 se e solo se $\forall\ i = 1, \dots, r\ \exists\ n_i \in \mathbb{N}$ tale che $x_i^{n_i} m = 0$ in M. Il che equivale al fatto che $m \in \Gamma_I(M)$. Quindi $H^0(C(\mathbf{x}, M)^\bullet) \cong H^0_I(M)$, ed è facile verificare la naturalezza dell'isomorfismo.

Dimostrare il punto (ii) è più complicato: per provarlo abbiamo bisogno di alcune proprietà dei moduli iniettivi e della coomologia di Čech, ma ce ne occuperemo la prossima volta.

COOMOLOGIA LOCALE E RANGO ARITMETICO

Per oggi diamo per buono che $\{H^i(C(\mathbf{x};-)^\bullet)\}_{\mathbb{N}}$ e $\{H^i_I\}_{\mathbb{N}}$ siano successioni connesse di funtori isomorfe, ricordando che ciò che manca per dimostrarlo è verificare che $H^i(C(\mathbf{x},E)^\bullet)=0$ per ogni A-modulo iniettivo E e $i\geq 1$.

Definizione: La *dimensione coomologica* di un ideale $I\subseteq A$ rispettivamente a un A-modulo M è il numero:

$$\mathrm{cd}(M,I):=\sup\{i\in\mathbb{N}\ :\ H^i_I(M)\neq 0\}.$$

L'interpretazione della coomologia locale come coomologia di Čech implica:

Teorema: Dato un ideale $I\subseteq A$, $\mathrm{ara}(I)\geq \mathrm{cd}(M,I)$ per ogni A-modulo M.

Dim.: Sia $r:=\mathrm{ara}(I)$, e $\mathbf{x}=x_1,\dots,x_r$ tali che $\sqrt{J}=\sqrt{I}$ dove $J=(x_1,\dots,x_r)$. Allora, per ogni A-modulo M, abbiamo:

$$H^i_I(M)=H^i_J(M)\cong H^i(C(\mathbf{x};M)^\bullet)=0 \quad \forall\ i>r.$$

□

Torniamo all'esempio di $I = (x, y, z) \cap (u, v, t) \subseteq S = \Bbbk[x, y, z, u, v, t]$. Avevamo detto che $4 \leq \text{ara}_h(I) \leq 5$. In particolare I non è intersezione completa insiemistica, poiché $\text{ht}(I) = 3$. Vogliamo dimostrare che $\text{ara}(I) = \text{ara}_h(I) = 5$. Consideriamo il pezzo della sequenza di Mayer-Vietories:

$$H_I^5(S) \longrightarrow H^6_{(x,y,z,u,v,t)}(S) \longrightarrow H^6_{(x,y,z)}(S) \oplus H^6_{(u,v,t)}(S).$$

Siccome $\text{ara}((x, y, z)) = \text{ara}((u, v, t)) = 3$, $H^6_{(x,y,z)}(S) = H^6_{(u,v,t)}(S) = 0$. Inoltre, siccome $\mathrm{grado}((x, y, z, u, v, t), S) = 6$, $H^6_{(x,y,z,u,v,t)}(S) \neq 0$. Allora c'è una mappa surgettiva da $H_I^5(S)$ in qualcosa di non nullo, il che implica che $H_I^5(S) \neq 0$. Quindi $\text{ara}(I) \geq \text{cd}(S, I) \geq 5$, dunque:

$$\text{ara}_h(I) = \text{ara}(I) = \text{cd}(S, I) = 5.$$

Nei pochi esempi in cui si riesce a calcolare la coomologia locale, la coomologia di Čech fornisce spesso il metodo migliore allo scopo.

Vogliamo descrivere la *coomologia locale dell'anello di polinomi* $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ *con supporto nel massimale irrilevante* $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$. Chiamiamo $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$. Poiché $H^i_{\mathfrak{m}}(S) \cong H^i(C(\mathbf{x})^\bullet)$, ne deduciamo che $H^i_{\mathfrak{m}}(S) = 0 \ \forall\ i > n$. D'altra parte, $\mathrm{grado}(\mathfrak{m}, S) = n \implies H^i_{\mathfrak{m}}(S) = 0 \ \forall\ i < n$. Dunque l'unico modulo non nullo è $H^n_{\mathfrak{m}}(S)$ che, essendo uguale a $H^n(C(\mathbf{x})^\bullet)$, sarà $S_{x_1 \cdots x_n}$ quozientato per l'immagine dell'omomorfismo:

$$\bigoplus_{k=1}^n S_{x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n} \longrightarrow S_{x_1 \cdots x_n}.$$

Se $u \in S$ è un monomio, $u/(x_1 \cdots x_n)^N$ sta nell'immagine se e solo se $\exists\ k \ : \ x_k^N | u$. Quindi $H^n(C(\mathbf{x})^\bullet) \cong H^n_{\mathfrak{m}}(S)$ è l'S-modulo generato da $1/(x_1 \cdots x_n)^N$ con $N \geq 1$, e tale che $u \cdot 1/(x_1 \cdots x_n)^N = 0 \iff \exists\ k \ : \ x_k^N | u$ (altrimenti è l'operazione usuale).

MODULI INIETTIVI

Definizione: Un'inclusione di A-moduli $\iota : M \hookrightarrow N$ si dice *estensione essenziale* di M se per ogni sottomodulo non nullo $P \subseteq N$, $P \cap \iota(M) \neq 0$.

Esempio: Supponiamo che A sia un dominio e chiamiamo K il suo campo delle frazioni. Allora $\iota : A \hookrightarrow K$ è un'estensione essenziale di A. Infatti, sia H un A-sottomodulo non nullo di K e sia $h \in H$ un elemento non nullo. Scrivendoci $h = f/g$ con f e g in A, chiaramente $gh = f/1 \in \iota(A) \cap H$.

Proposizione: Data un'inclusione di A-moduli $\alpha : M \hookrightarrow N$, esiste un A-sottomodulo $N_0 \subseteq N$ tale che $\iota : M \hookrightarrow N_0$ è massimale fra le estensioni essenziali di M contenute in N.

Dim: Fare per esercizio usando il *lemma di Zorn*. $\square$

L'estensione $M \hookrightarrow N_0$ si dice *estensione essenziale massimale di M dentro N*. Un'estensione essenziale $M \hookrightarrow N$ è un'*estensione essenziale massimale di M* (in senso assoluto) se ogni estensione essenziale $N \hookrightarrow N'$ è un isomorfismo.

Proposizione:

(i) Un A-modulo è iniettivo se e solo se non ha estensioni essenziali proprie.

(ii) Sia $M \hookrightarrow E$ un'inclusione di A-moduli con E iniettivo. Se $M \hookrightarrow N$ è un'estensione essenziale massimale di M dentro E, allora N è iniettivo. In particolare, N è un'estensione essenziale massimale di M.

(iii) Se $M \hookrightarrow E$ e $M \hookrightarrow E'$ sono estensioni essenziali massimali di M, allora $E \cong E'$ (non canonicamente).

Dim.: (i) Sia E un A-modulo iniettivo. Per ogni inclusione di A-moduli $\iota : E \hookrightarrow N$, abbiamo che E è un addendo diretto di N. Cioè c'è un A-sottomodulo $N' \subseteq N$ tale che $N = \iota(E) \oplus N'$. Poiché $N' \cap \iota(E) = 0$, se N fosse un'estensione essenziale di E, allora $N' = 0$, che sarebbe a dire $E \cong N$. Per il viceversa, immergiamo il nostro A-modulo M in un iniettivo E, diciamo $\iota : M \hookrightarrow E$. Per il *lemma di Zorn* possiamo scegliere un A-sottomodulo $N \subseteq E$ che sia massimale rispetto alla proprietà che $N \cap \iota(M) = 0$. Allora $\bar{\iota} : M \hookrightarrow E/N$ è un'estensione essenziale. Siccome M non ha estensioni essenziali proprie, $M \cong E/N$, quindi $E = \iota(M) + N$. Poiché $N \cap \iota(M) = 0$, in realtà $E = \iota(M) \oplus N$, da cui segue che M è iniettivo.

(ii) Sia $M \hookrightarrow E$ con E iniettivo e $M \hookrightarrow N$ un'estensione essenziale massimale dentro E. Dimostriamo che N non ha estensioni essenziali proprie in senso assoluto. Sia, per assurdo, $\beta : N \hookrightarrow Q$ un'estensione essenziale propria. Siccome E è iniettivo, l'inclusione $N \subseteq E$ si può estendere ad una mappa $\alpha : Q \to E$. Poiché $N \hookrightarrow Q$ è essenziale, α è iniettiva (altrimenti $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \beta(N) \neq 0$), quindi $\alpha(Q)$ sarebbe un'estensione essenziale di M dentro E più grande di N, una contraddizione. Dunque N è iniettivo grazie a (i).

(iii) Siano $M \hookrightarrow E$ e $\iota : M \hookrightarrow E'$ due estensioni essenziali massimali di M. Essendo E' iniettivo, la mappa $M \hookrightarrow E'$ si estende a una mappa $\phi : E \to E'$. Poiché $M \hookrightarrow E$ è essenziale, ϕ è iniettiva. Allora $E' = \phi(E) \oplus E''$, e siccome $\iota(M) \subseteq \phi(E)$ e $\iota : M \hookrightarrow E'$ è essenziale, allora $E'' = 0$. $\square$

Definizione: Dato un A-modulo M denoteremo con $E_A(M)$, solo $E(M)$ quando è chiaro chi è A, la sua estensione essenziale massimale (unica a meno d'isomorfismo non canonico). Chiameremo $E(M)$ l'*involucro iniettivo* di M.

Teorema: Se E è un A-modulo initettivo, allora E è isomorfo a una somma diretta di moduli del tipo $E_A(A/\wp)$ con $\wp \in \operatorname{Spec}(A)$.

Dim.: Prendiamo una famiglia $\{E_\lambda\}_\Lambda$ di sottomoduli di E che sia massimale rispetto alle proprietà:

(i) $E_\lambda \cong E_A(A/\wp_\lambda)$ per qualche $\wp_\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$.

(ii) $E_\lambda \cap E_\mu = 0$ se $\lambda \neq \mu$.

Che tale famiglia esista è assicurato dal *lemma di Zorn*. Sia $E' = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$, e $E'' \subseteq E$ tale che $E = E' \oplus E''$. Per assurdo $E'' \neq 0$: allora esiste $0 \neq x \in E''$. Sia $\wp$ un primo associato di Ax. Allora $A/\wp \subseteq Ax \subseteq E'' \implies E_A(A/\wp) \subseteq E''$. Ma allora potremmo aggiungere $E_A(A/\wp)$ a $\{E_\lambda\}_\Lambda$, contraddicendone la massimalità. $\square$

Esercizio*: Un A-modulo si dice *indecomponibile* se non può essere scritto come somma diretta di due suoi sottomoduli non nulli. Dimostrare che un A-modulo iniettivo E è indecomponibile se e solo se $E \cong E_A(A/\wp)$ per qualche $\wp \in \operatorname{Spec}(A)$.

Si può dimostrare che una decomposizione come quella del teorema è unica.

UN PÒ DI CULTURA SULLE RISOLUZIONI INIETTIVE

Dato un A-modulo $M = M_0$, lo possiamo immergere nel suo involucro iniettivo $\iota_0 : M_0 \hookrightarrow E(M_0)$. La stessa cosa possiamo fare per $M_1 = E(M_0)/\iota_0(M_0)$, ottenendo $\iota_1 : M_1 \hookrightarrow E(M_1)$. In questo modo otteniamo una risoluzione iniettiva $0 \to M \to E^\bullet$ dove, chiamando $E^i = E(M_i)$:

$$E^\bullet : E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \to \dots$$

Tale risoluzione iniettiva ha la proprietà che $E^i = E(\mathrm{Ker}(d^i)) \ \forall \ i \in \mathbb{N}$. Una risoluzione di M con questa proprietà si chiama *risoluzione iniettiva minimale di M*. È facile vedere che due risoluzioni iniettive minimali di M sono isomorfe come complessi. In particolare i numeri $\mu_i(\wp, M)$ di copie di $E(A/\wp)$ che compaiono nella decomposizione di E^i in indecomponibili sono invarianti di M, chiamati *numeri di Bass*. Si può provare che, se M è finitamente generato, $\mu_i(\wp, M) < \infty \ \forall \ i \in \mathbb{N}, \wp \in \mathrm{Spec}(A)$. Si può dimostrare che A è di Gorenstein se e solo se ammette una risoluzione iniettiva finita se e solo se $\mu_i(\wp, A) = \delta_{i,\mathrm{ht}(\wp)}$.

Proposizione: Sia $\wp \in \mathrm{Spec}(A)$. Ogni elemento di $E := E_A(A/\wp)$ è ucciso da una potenza di $\wp$. Se $x \in A \setminus \wp$, allora la moltiplicazione $\phi_x : E \to E$ per x è un isomorfismo. In particolare E ha una struttura naturale di $A_\wp$-modulo, data da $a/x \cdot e := a\phi_x^{-1}(e)$.

Dim.: Sia $0 \neq m \in E$ e $Am \subseteq E$. Basta provare che $\mathrm{Ass}(Am) = \{\wp\}$, siccome in tal caso $\sqrt{0 :_A m} = \wp$. Sia $\wp' \in \mathrm{Ass}(Am)$. Allora $A/\wp' \hookrightarrow Am \subseteq E$. Poiché E è essenziale per $A/\wp$, abbiamo $A/\wp \cap A/\wp' \neq 0$. Sia $0 \neq x \in A/\wp \cap A/\wp'$. Allora $\wp = 0 :_A x = \wp'$, dunque $\mathrm{Ass}(Am) \subseteq \{\wp\}$. L'uguaglianza segue dal fatto che un modulo non nullo ha almeno un primo associato.

Se $x \in A \setminus \wp$, abbiamo $\cdot x : A/\wp \hookrightarrow A/\wp \hookrightarrow E$. Possiamo estendere la moltiplicazione a tutto E, ottenendo $\phi_x : E \to E$. Poiché E è un'estensione essenziale di $R/\wp$, ϕ_x deve essere iniettiva. Dunque $\phi_x(E)$ è un sottomodulo di E, e quindi ne è un addendo diretto. Ma allora $\phi_x(E) = E$, perché E è indecomponibile. $\square$

CAMBI DI ANELLO

Sia R un altro anello e $\phi : A \to R$ un omomorfismo di anelli.

Definizione (restrizione degli scalari): Se N è un R-modulo, denotiamo con N^ϕ l'A-modulo ottenuto restringendo gli scalari: cioè $N^\phi = N$ come gruppo abeliano e $a \cdot n := \phi(a)n \;\; \forall\, a \in A, n \in N$.

Definizione (estensione degli scalari): Ad ogni A-modulo M possiamo associare il seguente R-modulo: $R^\phi \otimes_A M$, dove $r \cdot (r' \otimes m) := rr' \otimes m$ per ogni $r, r' \in R, m \in M$.

In realtà la restrizione degli scalari è un funtore covariante da $\mathrm{Mod}(R)$ in $\mathrm{Mod}(A)$, e l'estensione degli scalari è un funtore covariante nella direzione opposta.

Esercizio: Fare un esempio di due anelli A e R e di un R-modulo N tali che $E_R(N)^\phi \ncong E_A(N^\phi)$. Dimostrare che $E_A(A/\wp) \cong E_{A_\wp}(A_\wp/\wp A_\wp)^\phi$ per ogni primo $\wp$, dove ϕ è la mappa di localizzazione $A \to A_\wp$.

Lemma: Sia $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_r \in A$, $I = (x_1, \dots, x_r) \subseteq A$ e $p \in \{0, \dots, r\}$. Allora:

1. Per ogni A-modulo M, ogni elemento di $H^p(C(\mathbf{x}; M)^\bullet)$ è ucciso da $0 :_A M$ e da una potenza di I.
2. Se $A \xrightarrow{\phi} R$ è un omomorfismo di anelli e N è un R-modulo, allora $H^p(C(\mathbf{x}; N^\phi)^\bullet)$ e $H^p(C(\phi(\mathbf{x}); N)^\bullet)$ sono R-moduli isomorfi.
3. Se $\{M_\lambda\}_\Lambda$ è un sistema diretto di A-moduli su un insieme diretto Λ, allora $H^p(C(\mathbf{x}; \varinjlim M_\lambda)^\bullet) \cong \varinjlim(H^p(C(\mathbf{x}; M_\lambda)^\bullet))$.

Dim.: 1. Prima di tutto conviene scriversi:

$$C(\mathbf{x}; M)^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} C(\mathbf{x}; M)^p \xrightarrow{d^p} C(\mathbf{x}; M)^{p+1}$$

e ricordarsi che $H^p(C(\mathbf{x}; M)^\bullet) = \operatorname{Ker}(d^p)/\operatorname{Im}(d^{p-1})$. Ogni elemento di $C(\mathbf{x}; M)^p \cong \bigoplus M_{x_{i_1} \cdots x_{i_p}}$ è ucciso da $0 :_A M$, a maggior ragione lo è ogni elemento di $H^p(C(\mathbf{x}; M)^\bullet)$. Per dimostrare che ogni elemento di $H^p(C(\mathbf{x}; M)^\bullet)$ è ucciso da una potenza di I, consideriamo:

$$m = \sum \frac{m_{i_1 \dots i_p}}{(x_{i_1} \cdots x_{i_p})^{\alpha_{i_1 \dots i_p}}} \in \operatorname{Ker}(d^p)$$

Sia $j = 1, \dots, r$. Se $j \in \{i_1, \dots, i_p\}$, allora $x_j^{\alpha_{i_1 \dots i_p}} \dfrac{m_{i_1 \dots i_p}}{(x_{i_1} \cdots x_{i_p})^{\alpha_{i_1 \dots i_p}}} \in \operatorname{Im}(d^{p-1})$.

Se $j \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, siccome m deve essere 0 in $(M_{x_{i_1} \cdots x_{i_p}})_{x_j}$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_j^N m' = 0 \in C(\mathbf{x}; M)^p$, dove m' è la somma degli $\dfrac{m_{k_1 \dots k_p}}{(x_{k_1} \cdots x_{k_p})^{\alpha_{k_1 \dots k_p}}}$ con $\{k_1, \dots, k_p\} \subseteq \{i_1, \dots, i_p, j\}$. Se $N \gg 0$, l'unico termine della sommatoria di $x_j^N m'$ che a priori non sta in $\mathrm{Im}(d^{p-1})$ è $x_j^N \dfrac{m_{i_1 \dots i_p}}{(x_{i_1} \cdots x_{i_p})^{\alpha_{i_1 \dots i_p}}}$; essendo $x_j^N m' = 0$, a posteriori anche $x_j^N \dfrac{m_{i_1 \dots i_p}}{(x_{i_1} \cdots x_{i_p})^{\alpha_{i_1 \dots i_p}}} \in \mathrm{Im}(d^{p-1})$. Ne segue che m moltiplicato per una potenza abbastanza grande di I sta in $\mathrm{Im}(d^{p-1})$.

2. Notiamo che, a priori, $C(\mathbf{x}; N^{\phi})^{\bullet}$ è un complesso di A-moduli, e non di R-moduli. Però è evidente che ogni $C(\mathbf{x}; N^{\phi})^i$ eredita la struttura di R-modulo da quella di N. Inoltre con questa struttura $C(\mathbf{x}; N^{\phi})^{\bullet}$ e $C(\phi(\mathbf{x}); N)^{\bullet}$ sono complessi isomorfi di R-moduli, da cui la tesi.

3. Segue dal fatto che i limiti diretti commutano con il prodotto tensore, cosicché $C(\mathbf{x}; \varinjlim M_\lambda)^{\bullet} \cong \varinjlim C(\mathbf{x}; M_\lambda)^{\bullet}$, e con l'omologia, cosicché

$$H^p(\varinjlim C(\mathbf{x}; M_\lambda)^{\bullet}) = \frac{\mathrm{Ker}(\varinjlim d_\lambda^p)}{\mathrm{Im}(\varinjlim d_\lambda^{p-1})} \cong \varinjlim \frac{\mathrm{Ker}(d_\lambda^p)}{\mathrm{Im}(d_\lambda^{p-1})} = \varinjlim H^p(C(\mathbf{x}; M_\lambda)^{\bullet}).$$

$\square$

Lemma: Sia $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_r \in A$ e M un A-modulo di lunghezza finita. Allora $H^p(C(\mathbf{x}; M)^\bullet) = 0 \ \ \forall\ p > 0$.

Dim.: Sia $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k = M$ una serie di composizione massimale. Quindi $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{m}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$, dove $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A. Procediamo per induzione su i.

$i = 1$. Abbiamo $M_1 = A/\mathfrak{m}$ per qualche massimale. Sia $\Bbbk$ il campo $A/\mathfrak{m}$ e $A \xrightarrow{\phi} \Bbbk$ l'omomorfismo di anelli dato dalla proiezione. Chiaramente $\Bbbk^\phi \cong M_1$, dunque $H^p(C(\mathbf{x}; M_1)^\bullet) \cong H^p(C(\phi(\mathbf{x}); \Bbbk)^\bullet) \ \ \forall\ p = 0, \ldots, r$. Se l'ideale $I = (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_r)) \in \Bbbk$ non è zero, allora $I = \Bbbk$. Ma poiché esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $I^N H^p(C(\phi(\mathbf{x}); \Bbbk)^\bullet) = 0$, lo stesso $H^p(C(\phi(\mathbf{x}); \Bbbk)^\bullet)$ deve essere 0. Se $I = 0$ addirittura $C^p(\phi(\mathbf{x}); \Bbbk) = 0$ per $p > 0$, poiché se si localizza un modulo a 0 si ottiene il modulo nullo.

Se $i > 1$ consideriamo la sequenza esatta corta $0 \to M_{i-1} \to M_i \to A/\mathfrak{m} \to 0$, dove $\mathfrak{m}$ è un massimale di A. Essa induce una sequenza esatta lunga in coomologia di Čech, di cui consideriamo i pezzi, al variare di $p > 0$: $H^p(C(\mathbf{x}; M_{i-1})^\bullet) \to H^p(C(\mathbf{x}; M_i)^\bullet) \to H^p(C(\mathbf{x}; A/\mathfrak{m})^\bullet)$. Per induzione $H^p(C(\mathbf{x}; M_{i-1})^\bullet) = 0$ e $H^p(C(\mathbf{x}; A/\mathfrak{m})^\bullet) = 0$ come dimostrato nel caso $i = 1$. Quindi $H^p(C(\mathbf{x}; M_i)^\bullet) = 0$. $\square$

Teorema: Sia $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_r \in A$ e E un A-modulo iniettivo. Allora $H^p(C(\mathbf{x}; E)^\bullet) = 0 \;\; \forall \; p > 0$.

Dim.: Ricordiamo che E è isomorfo alla somma diretta di moduli del tipo $E_A(A/\wp)$ con $\wp \in \mathrm{Spec}(A)$. Diciamo $E \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ dove $E_\lambda \cong E_A(A/\wp_\lambda)$.

Esercizio: Dimostrare che $H^p(C(\mathbf{x}; E)^\bullet) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H^p(C(\mathbf{x}; E_\lambda)^\bullet)$.

Quindi possiamo ridurci a pensare che $E = E_A(A/\wp)$ per qualche primo $\wp$. Siccome $E_{A_\wp}(A_\wp/\wp A_\wp)^\phi \cong E_A(A/\wp)$, dove $A \xrightarrow{\phi} A_\wp$ è l'omomorfismo di localizzazione, $H^p(C(\phi(\mathbf{x}); E_{A_\wp}(A_\wp/\wp A_\wp))^\bullet) \cong H^p(C(\mathbf{x}; E_A(A/\wp))^\bullet)$. Quindi possiamo limitarci a dimostrare il teorema nel caso in cui $(A, \mathfrak{m})$ è locale e $E = E_A(A/\mathfrak{m})$. Poiché ogni elemento di E è ucciso da una potenza di $\mathfrak{m}$, ogni sottomodulo finitamente generato di E ha come unico primo associato $\mathfrak{m}$, e quindi ha lunghezza finita. Abbiamo concluso, perché E è il limite diretto dei suoi sottomoduli finitamente generati, e $H^p(C(\mathbf{x}; M)^\bullet) = 0 \; \forall \; p > 0$ e M di lunghezza finita grazie al lemma della slide precedente. $\square$

Corollario A: Siano $I \subseteq A$ e $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_r \in A$ tali che $\sqrt{I} = \sqrt{(x_1, \ldots, x_r)}$. Allora $\{H_I^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{H^i(C(\mathbf{x}; -)^\bullet\}$ sono successioni connesse di funtori isomorfe.

Corollario B: Sia $I \subseteq A$ e $\{M_\lambda\}$ un sistema diretto di A-moduli su un insieme diretto. Allora $H_I^i(\varinjlim M_\lambda) \cong \varinjlim H_I^i(M_\lambda)\ \forall\ i \in \mathbb{N}$. In particolare, per ogni sistema moltiplicativo $S \subseteq A$ e A-modulo M, $H_I^i(S^{-1}M) \cong S^{-1}H_I^i(M)$.

Corollario C: Sia $I \subseteq A$ e $A \xrightarrow{\phi} R$ un omomorfismo di anelli e N un R-modulo. Allora $H_I^i(N^\phi) \cong H_{\phi(I)R}^i(N)$.

Esercizi: Sia $I \subseteq A$, M un A-modulo e $i \in \mathbb{N}$.

(i) Se $A \xrightarrow{\phi} R$ è un omomorfismo di anelli tale che R^ϕ è un A-modulo piatto, dimostrare che $H_{\phi(I)R}^i(M \otimes_A R^\phi) \cong H_I^i(M) \otimes_A R^\phi$. (Usare Corollario A).

(ii) Se $M \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ (Λ può essere infinito), usando il Corollario B dimostrare che $H_I^i(M) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_I^i(M_\lambda)$.

(iii) Usando il Corollario C e un'osservazione della scorsa lezione, provare che $\mathrm{cd}(M, I) \leq \dim M + 1 = \dim(A/(0 :_A M)) + 1$.

DIMENSIONE COOMOLOGICA DI UN IDEALE

Teorema: Supponiamo che $\dim A < \infty$ e sia $I \subseteq A$. Allora $\mathrm{cd}(M, I) \leq \mathrm{cd}(A, I)$ per ogni A-modulo M.

Dim.: Poniamo $c := \mathrm{cd}(A, I)$ e $c' := \sup\{\mathrm{cd}(M, I) : M \text{ è un } A\text{-modulo}\}$. Sappiamo che $c' \leq \mathrm{ara}(I) \leq \dim A + 1$. Per assurdo, sia $c' > c$ e scegliamo un A-modulo M tale che $H_I^{c'}(M) \neq 0$. Presentiamo M come segue:

$$0 \to K \to \bigoplus_\Lambda A \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

dove K è semplicemente il nucleo di π. Consideriamo il pezzo della sequenza esatta lunga:

$$H_I^{c'}(\bigoplus_\Lambda A) \to H_I^{c'}(M) \to H_I^{c'+1}(K).$$

Ma $H_I^{c'}(\bigoplus_\Lambda A) \cong \bigoplus_\Lambda H_I^{c'}(A) = 0$ perché $c' > c$ e $H_I^{c'+1}(K) = 0$ per la massimalità di c'. Quindi $H_I^{c'}(M) = 0$, una contraddizione. $\square$

L'intero $\mathrm{cd}(A, I) = \sup\{\mathrm{cd}(M, I) : M \text{ è un } A\text{-modulo}\}$ si dice la *dimensione coomologica* di I.

ALCUNI RISULTATI SU cd(A, I)

Chiudiamo la serie di lezioni con alcuni dei risultati più importanti sulla dimensione coomologica. Per semplicità ne enunciamo solo dei casi particolari.

- (Grothendieck) $\mathrm{ht}(I) \leq \mathrm{cd}(A, I) \leq \dim A$. Durante il corso abbiamo dimostrato che $\mathrm{grado}(I, A) \leq \mathrm{cd}(A, I) \leq \dim A + 1$.
- (Hartshorne, Lichtenbaum) Se $S = \mathbb{k}[x_0, \ldots, x_n]$, $J \subseteq S$ è un primo omogeneo e $I \subseteq A = S/J$ è omogeneo, allora $\mathrm{cd}(A, I) < \dim A$ se e solo se I non è massimale. In particolare, se $J = 0$, $\mathrm{cd}(S, I) \leq n$ se e solo se $I \neq (x_0, \ldots, x_n)$.
- (Hartshorne, Speiser, Huneke, Lyubeznik) Usando le notazioni del punto precedente con $J = 0$, $\mathrm{cd}(S, I) < n \iff \mathcal{V}_+(I)$ è connesso.