CALCOLO DIFFERENZIALE INTEGRALE

ELENA MUSELLI [1]

Dispense per il corso di laurea in Informatica

[1] Elena Muselli

2

1.1 - Simboli e notazioni

- $\exists$ significa **esiste/ono** ; $\nexists$ sta per **non esiste/ono** ; $\forall$ significa **per ogni**, **per tutti** ;
- $:=$ significa **uguale per definizione** (è usato per introdurre notazioni).
- $\Longrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$ si leggono rispettivamente **implica** e **se e solo se**.

  Siano ϕ e ψ due affermazioni:

  $\phi \Longrightarrow \psi$ significa che **se è vera $\boldsymbol{\phi}$ allora è vera anche $\boldsymbol{\psi}$**

  $\phi \Longleftrightarrow \psi$ vuol dire che **$\boldsymbol{\phi}$ è vera se e solo è vera $\boldsymbol{\psi}$**
- **Prodotto cartesiano $\boldsymbol{A \times B}$** di due insiemi A, B è l'insieme delle coppie ordinate (a, b) di un elemento di A e di un elemento di B ossia $\boldsymbol{A \times B := \{(a,b)\ :\ a \in A,\ b \in B\}}$.

1.2 - Insiemi numerici

L'insieme dei **numeri naturali** si denota con $\mathbf{N}$, ossia $\mathbf{N := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}}$; denotiamo con $\mathbf{N^+ := \{1, 2, 3, \ldots\}}$ i numeri naturali positivi.

Particolari sottoinsiemi di $\mathbf{N}$ sono:

i **numeri pari:** $\{n \in \mathbf{N} : n = 2m\,,\ m \in \mathbf{N}^+\}$ i **numeri dipari:** $\{n \in \mathbf{N} : n = 2m + 1\,,\ m \in \mathbf{N}\}$

Si denota con $\mathbf{Z}$ l'insieme dei **numeri interi** e con $\mathbf{Q}$ l'insieme dei **numeri razionali**:

$$\mathbf{Z := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}} \qquad \mathbf{Q} := \Big\{\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{m}}\ :\ \boldsymbol{p} \in \mathbf{Z},\ \boldsymbol{m} \in \mathbf{N}^+\Big\}\ .$$

NUMERI REALI: costituiscono un insieme di numeri, che denotiamo con $\mathbf{R}$, nei quali sono definite una somma, un prodotto ed una relazione d'ordine ($<$), che soddisfano le usuali regole algebriche.

Il sottoinsieme di $\mathbf{R}$ costituito da $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ è detto insieme dei **numeri irrazionali**.
Denoteremo

$$\mathbf{R}^+ := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}\ :\ \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\} \qquad \mathbf{R}^- := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}\ :\ \boldsymbol{x} < \mathbf{0}\}.$$

Ricordiamo **alcune proprietà** di $\mathbf{R}$; dati $x, y, z, w \in \mathbf{R}$, si ha:

1) $x < y\,,\ z \le w \Longrightarrow x + z < y + w$;

2) $x < y\,,\ z > 0 \Longrightarrow x\,z < y\,z$; 2') $x < y\,,\ z < 0 \Longrightarrow x\,z > y\,z$.

3) $0 \le x < y\,,\ 0 \le z < w \Longrightarrow x\,z < y\,w$;

4) $\forall\, p, q \in \mathbf{Q}$, $\exists\, x \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ tale che $p < x < q$. 5) $\forall\, x, y \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$, $\exists\, q \in \mathbf{Q}$ tale che $x < q < y$.

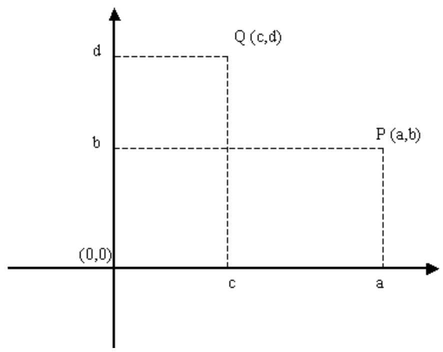
6) Dato $x \in \mathbf{R}$, $\exists$ **unico** un elemento $\boldsymbol{m \in \mathbf{Z}}$ tale che $\boldsymbol{m \le x < m + 1}$. Tale numero m è detto **parte intera di $\boldsymbol{x}$** e si denota $\boldsymbol{m = [x]}$.

Notazioni: $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$, se $\boldsymbol{b \neq 0}$, $\displaystyle \boldsymbol{\frac{a}{b} = a\,\frac{1}{b}}$.

[2]Elena Museli

Rappresentazione grafica di R. Fissato su di una retta **r** un punto O, detto origine, e l'unità di lunghezza, si fa corrispondere ad ogni numero reale $x > 0$ il punto della retta **r**, a destra dell'origine, la cui distanza da O misuri x. Ad un numero $x < 0$ associamo il punto a sinistra dell'origine avente distanza $-x$ da O.
Viceversa, ad ogni punto a destra dell'origine corrisponde un numero > 0 dato dalla distanza del punto da O, mentre ad ogni punto a sinistra dell'origine corrisponde un numero < 0 dato dall'opposto del valore della distanza del punto da O.

Rappresentazione grafica di $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.



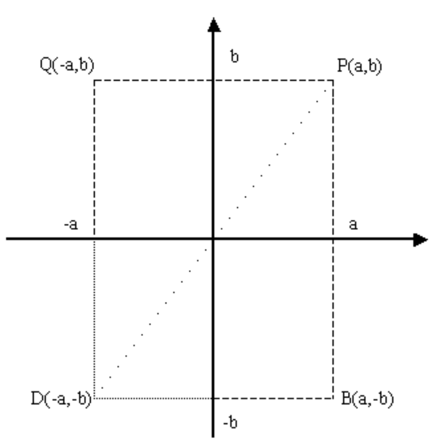
Consideriamo due rette ortogonali tra loro (una orizzontale e una verticale) dette **"assi cartesiani ortogonali"**, denotiamo con $(0,0)$ il punto intersezione, detto **origine degli assi**, e su ognuna delle due rette rappresentiamo **R**. L'asse orizzontale è detto **"asse delle ascisse"** l'altro **"asse delle ordinate"**.

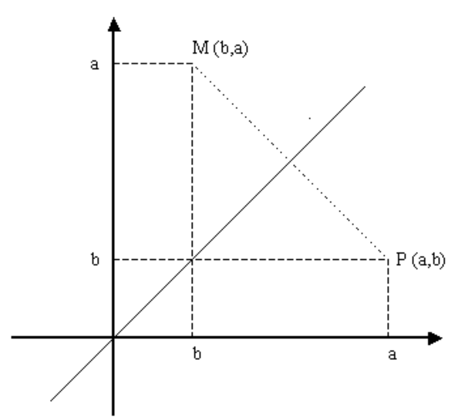
Associamo alla coppia $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ il punto intersezione della retta $\perp$ all'asse delle ascisse nel punto a con la retta $\perp$ all'asse delle ordinate nel punto b. Denoteremo tale punto con $\mathrm{P}(a, b)$; i valori a e b sono le **coordinate** di P: rispettivamente **ascissa** ed **ordinata**.

La bisettrice del primo e terzo quadrante è il sottoinsieme: $\{(x, y) : y = x,\ x \in \mathbf{R}\} = \{(x, x) :\ x \in \mathbf{R}\}$.

Simmetrie.
Data una coppia $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ si hanno le seguenti simmetrie (vedi figure seguenti):

- il punto $(-a, b)$ è **il simmetrico di** (a, b) **rispetto all'asse delle ordinate**;
- il punto $(a, -b)$ è **il simmetrico di** (a, b) **rispetto all'asse delle ascisse**;
- il punto $(-a, -b)$ è **il simmetrico di** (a, b) **rispetto all'origine**;
- il punto (b, a) è **il simmetrico di** (a, b) **rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante**.





[3]Elena Muselli

1.3 - Intervalli, intorni

Dati $a,\, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ricordiamo che, si definiscono **intervalli** gli insiemi seguenti:

$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \colon a < x < b\}$ $\quad [a,b] = \{x \in \mathbf{R} \colon a \le x \le b\}$ $\quad [a,b) = \{x \in \mathbf{R} \colon a \le x < b\}$ $\quad (a,b] = \{x \in \mathbf{R} \colon a < x \le b\}$

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \colon a < x\}$, $\quad [a,+\infty) = \{x \in \mathbf{R} \colon a \le x\}$, $\quad (-\infty,a) = \{x \in \mathbf{R} \colon x < a\}$, $\quad (-\infty,a] = \{x \in \mathbf{R} \colon x \le a\}$.

Gli intervalli (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,a)$ sono detti *aperti*, gli intervalli $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,a]$ sono detti *chiusi.*

Dato un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ diremo **intorno di x_0 di raggio r** l'intervallo aperto $\boldsymbol{(x_0 - r, x_0 + r)}$.
Diremo, rispettivamente, **intorno destro** e **intorno sinistro di x_0 di raggio r** gli intervalli aperti

$$\boldsymbol{(x_0, x_0 + r)} \qquad\qquad \boldsymbol{(x_0 - r, x_0)}.$$

1.4 - Valore assoluto

<u>**Definizione.**</u> Il **valore assoluto** o **modulo** di un numero $x \in \mathbf{R}$, che denotiamo $|\boldsymbol{x}|$, è definito da

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & \text{se } \boldsymbol{x \ge 0} \\ \boldsymbol{-x} & \text{se } \boldsymbol{x < 0} \end{cases}$$

Le seguenti proprietà discendono direttamente dalla definizione precedente:

1) $|x| \ge 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$;
2) $|x| = 0 \iff x = 0$;
3) $|-x| = |x| \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$;
4) $-|x| \le x \le |x| \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$;
5) $|x\,y| = |x|\,|y| \quad \forall\, x,\, y \in \mathbf{R}$;
6) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall\, x \in \mathbf{R},\, y \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

<u>**Teorema 1.1**</u> - *Dati $x\,, y\,, z \in \mathbf{R}$ valgono le seguenti relazioni:*

7) *Dato* $a \ge 0$ *si ha:* $\quad |x| \le a \iff -a \le x \le a \quad$ *e* $\quad |x| \ge a \iff \{x \le -a\} \cup \{x \ge a\}$.

7') *Dato* $a > 0$ *si ha:* $\quad |x| < a \iff -a < x < a \quad$ *e* $\quad |x| > a \iff \{x < -a\} \cup \{x > a\}$.

8) $|y + z| \le |y| + |z| \quad$ *e* $\quad |y - z| \le |y| + |z| \quad$ *(diseguaglianza triangolare);*

9) $|y \pm z| \ge |y| - |z| \quad$ *ed anche* $\quad |y \pm z| \ge |z| - |y|$ *;*

10) $|\,|y| - |z|\,| \le |y - z|$.

Dimostrazione. - Verifichiamo soltanto la 7).
Dalla definizione di $|x|$, la relazione $|x| \le a$ si riscrive come

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le a \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ -x \le a \end{cases} ;$$

il primo sistema equivale ad $0 \le x \le a$, mentre dal secondo si ha $-a \le x < 0$; unendo i due risultati si ottiene la prima parte della 7). La seconda parte si dimostra in modo analogo.

$\square$

[4]Elena Muselli

Esempi - `Dalla definizione di valore assoluto si ottiene:`

1) $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \texttt{se } 3-x \geq 0 \\ -(3-x) & \texttt{se } 3-x < 0 \end{cases}$ `e da` $3-x \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \leq 3$ `si ha` $|3-x| = \begin{cases} 3-x & \texttt{se } x \leq 3 \\ -3+x & \texttt{se } x > 3 \end{cases}$.

2) $|2x-x^2| = \begin{cases} 2x-x^2 & \texttt{se } 2x-x^2 \geq 0 \\ -(2x-x^2) & \texttt{se } 2x-x^2 < 0 \end{cases}$ `e da` $2x-x^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq x \leq 2$ `si ha`

$$|2\,x-x^2| = \begin{cases} 2x-x^2 & \texttt{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -2x+x^2 & \texttt{se } x < 0 \texttt{ e } x > 2 \end{cases}.$$

Osservazione 1.1 - Con dimostrazione analoga a quella vista per la 7) si ottengono le relazioni che sono utili per risolvere le disequazioni con i valori assoluti:

$$(1) \qquad \underset{(<)}{|P(x)| \ \leq\ Q(x)} \iff \begin{cases} \underset{(<)}{P(x) \ \leq\ Q(x)} \\ \\ \underset{(>)}{P(x) \ \geq\ -Q(x)} \end{cases}$$

$$(2) \qquad \underset{(>)}{|P(x)| \ \geq\ Q(x)} \iff \{\underset{(>)}{P(x) \ \geq\ Q(x)}\} \ \bigcup\ \{\underset{(<)}{P(x) \ \leq\ -Q(x)}\}$$

Esempi - `Risolviamo le disequazioni seguenti applicando le relazioni dell'Osservazione 1.1:`

1) $\boldsymbol{1 - 2|x^2-1| \leq 0} \ \Leftrightarrow\ |x^2-1| \geq \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow$ `(dalla (2) Oss.1.1)` $\{x^2-1 \geq \frac{1}{2}\} \cup \{x^2-1 \leq -\frac{1}{2}\} \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}] \cup [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$.

2) $\boldsymbol{2x - |x^2-x| > x^2} \ \Leftrightarrow\ |x^2-x| < 2x-x^2 \ \Leftrightarrow$ `(dalla (1) Oss.1.1)` $\begin{cases} x^2-x < 2x-x^2 \\ x^2-x > -(2x-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x^2-3x < 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ (0, \frac{3}{2})$.

3) $\boldsymbol{x^2 - x + |2-x| > 0} \ \Leftrightarrow\ |2-x| > x-x^2 \ \Leftrightarrow$ `(dalla (2) Oss.1.1)` $\{2-x > x-x^2\} \cup \{2-x < -x+x^2\} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{R}$.

Osservazione 1.2 - Poichè la distanza tra due punti distinti x, y di $\mathbf{R}$ è data da $y-x$ se $y > x$ e da $x-y$ se $x > y$, utilizzando la definizione di valore assoluto avremo:

$|\boldsymbol{y-x}|$ è la **distanza tra** x **ed** y ; $\qquad |\boldsymbol{x}|$ è la **distanza del punto** x **da** o.

Ne segue che **l'intorno di** x_0 **di raggio** r si può scrivere nei due modi equivalenti

$$\boldsymbol{(x_0 - r, x_0 + r) \iff |x - x_0| < r} \,.$$

[5]Elena Muselli

1.5 - Massimo e minimo di sottoinsiemi di R

Definizioni. Sia $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$.

1) Se esiste $\boldsymbol{\alpha \in A}$ t.c. $\boldsymbol{x \leq \alpha}$ $\boldsymbol{\forall x \in A}$ allora $\boldsymbol{\alpha}$ è detto il **massimo** di A e si denota $\boldsymbol{\alpha = \max A}$.

   Si può verificare che **se il massimo esiste è unico**.

2) Se esiste $\boldsymbol{\beta \in A}$ t.c. $\boldsymbol{\beta \leq x}$ $\boldsymbol{\forall x \in A}$ allora $\boldsymbol{\beta}$ è detto il **minimo** di A e si denota $\boldsymbol{\beta = \min A}$.

   Si può verificare che **se il minimo esiste è unico**.

Esempi

1) Sia $A = [-1, 3)$; si ha: $-1 \leq x \ \ \forall\, x \in A$ e $-1 \in A$ quindi $-1 = \min A$.

Poichè $3 \notin A$, si può verificare che: non esiste un elemento di A che sia $\geq$ di tutti gli altri, quindi $\nexists \max A$.

2) Sia $B = (-2, 1]$; con considerazioni simili a quelle viste per l'insieme A si ha $\nexists \min B$ e $\max B = 1$.

1.6 - Maggioranti, minoranti, estremo superiore (sup), estremo inferiore (inf)

Definizioni. Sia $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$.

1) Un numero $\boldsymbol{k \in \mathbf{R}}$ t.c. $\boldsymbol{x \leq k}$ $\boldsymbol{\forall x \in A}$ è detto **maggiorante di** A.

   Denotiamo $\boldsymbol{M(A)}$ l'insieme dei maggioranti di A.

   Se $\boldsymbol{M(A) \neq \emptyset}$ si può verificare che esiste sempre il **minimo di** $\boldsymbol{M(A)}$ detto **estremo superiore di** A che si denota $\boldsymbol{\sup A}$.

2) Un numero $\boldsymbol{h \in \mathbf{R}}$ t.c. $\boldsymbol{h \leq x}$ $\boldsymbol{\forall x \in A}$ è detto **minorante di** A.

   Denotiamo $\boldsymbol{m(A)}$ l'insieme dei minoranti di A.

   Se $\boldsymbol{m(A) \neq \emptyset}$ si può verificare che esiste sempre il **massimo di** $\boldsymbol{m(A)}$ detto **estremo inferiore di** A che si denota $\boldsymbol{\inf A}$.

Notazioni.

- Se $\boldsymbol{M(A) = \emptyset}$ cioè se A **non ha maggioranti** si denota, per convenzione, $\boldsymbol{\sup A = +\infty}$.
- Se $\boldsymbol{m(A) = \emptyset}$ cioè se A **non ha minoranti** si denota, per convenzione, $\boldsymbol{\inf A = -\infty}$.

Proposizione 1.1 - *Sia* $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$, *si ha:*

- *Se* $\sup A \in A$ *allora* $\exists \max A$ *e si ha* $\max A = \sup A$;
- *se* $\sup A \notin A$ *allora* $\nexists \max A$.

- *Se* $\inf A \in A$ *allora* $\exists \min A$ *e si ha* $\min A = \inf A$;
- *se* $\inf A \notin A$ *allora* $\nexists \min A$.

[6]Elena Muselli

Esempi

1) `Sia` $A = [-1, 3)$ `si ha` $M(A) = [3, +\infty) \implies \sup A = 3 \notin A \implies \nexists \max A$

$m(A) = (-\infty, -1] \implies \inf A = -1 \in A \implies \min A = -1$.

2) `Sia` $C = (-2, 0] \cup (1, +\infty)$ `si ha` $M(C) = \emptyset \implies \sup C = +\infty \implies \nexists \max C$

$m(C) = (-\infty, -2] \implies \inf C = -2 \notin C \implies \nexists \min C$.

1.7 - Insiemi limitati.

Definizioni. Sia $A \subset \mathbf{R}$.

1) A è detto **superiormente limitato** se $\exists\ \boldsymbol{K} \in \mathbf{R}$ t.c. $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{K} \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$;

2) A è detto **inferiormente limitato** se $\exists\ \boldsymbol{N} \in \mathbf{R}$ t.c. $\boldsymbol{N} \le \boldsymbol{x} \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$;

3) A è detto **limitato** se lo è sia sup.te che inf.te, cioè se $\exists\ \boldsymbol{K}, \boldsymbol{N} \in \mathbf{R}$ t.c. $\boldsymbol{N} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{K} \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ o equivalentemente $\exists\ \boldsymbol{M} > \mathbf{0}$ t.c. $|\boldsymbol{x}| \le \boldsymbol{M} \quad \forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$.

[7]Elena Muselli

CAPITOLO 2

2.1 - Definizione di funzione e notazioni.

Dati due insiemi A e B non vuoti, una **funzione da A in B** è una legge che "*ad ogni elemento di A associa <u>un solo</u> elemento di B*" ed usiamo la notazione:

$f : A \to B$ dove A è il **dominio** o **insieme di definizione** di f, B è il **codominio** di f

$x \mapsto f(x)$ x è detta **variabile**, $f(x)$ è detta **immagine di** x.

L'insieme $Im\, f = f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ è detto **immagine** o **rango** di f.

Se $D \subset A$, l'insieme $f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ è detto **immagine di** D (**secondo** f).

Si definisce **grafico di f** il sottoinsieme di $A \times B$ dato da $G_f := \{(x, f(x)) : x \in A\}$.

2.2 - Prolungamenti e restrizioni.

<u>**Definizione.**</u> - Sia $f : A \to B$;

1) se C è un insieme t.c. $A \subset C$, con $A \neq C$; una qualunque funzione

$$g : C \to E \qquad \text{t.c.} \qquad g(x) = f(x) \quad \forall\, x \in A.$$

è detta **prolungamento di f a** C;

2) se $D \subset A$, $D \neq A$, definiamo **restrizione di f a** D, con notazione $f_{/D}$, la funzione

$$f_{/D} : D \to B \qquad \text{t.c.} \qquad f_{/D}(x) = f(x) \quad \forall\, x \in D.$$

2.3 - Iniettività, surgettività, bigettività.

<u>**Definizioni.**</u> - Una $f : A \to B$ è detta

1) **iniettiva** se $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ (o equiv. $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$)

ossia punti distinti hanno immagini distinte;

2) **surgettiva** se $\forall\ y \in B,\ \exists\, x \in A$ t.c. $y = f(x)$

ossia ogni elemento del codominio B è immagine di qualche punto di A;

3) **bigettiva** se è sia iniettiva che surgettiva.

<u>**Osservazione 2.1**</u> - Dalla definizione di $f(A)$ si ha:

$$f : A \to B \ \text{ iniettiva} \qquad \Longrightarrow \qquad f : A \to f(A) \ \text{ bigettiva.}$$

Nel seguito considereremo solo **funzioni reali** (cioè $B \subset \mathbf{R}$) di **variabile reale** (cioè $A \subset \mathbf{R}$).

[8]Elena Muselli

2.4 - Funzioni limitate.

<u>**Definizione.**</u> - Una $f : A \to \mathbf{R}$ è

1) **superiormente limitata** se $\exists\ K \in \mathbf{R}$ t.c. $f(x) \le K \quad \forall\, x \in A$;
   cioè se l'insieme $Im\, f$ è sup.te limitato;

2) **inferiormente limitata** se $\exists\ N \in \mathbf{R}$ t.c. $N \le f(x) \quad \forall\, x \in A$;
   cioè se l'insieme $Im\, f$ è inf.te limitato;

3) **limitata** se $\exists\ N, K \in \mathbf{R}$ t.c. $N \le f(x) \le K \quad \forall\, x \in A$
   o equiv.te $\exists\ M > 0$ t.c. $|f(x)| \le M \quad \forall\, x \in A$
   cioè se l'insieme $Im\, f$ è limitato.

2.5 - Punti di massimo e punti di minimo (assoluti e relativi). Estremi assoluti e/o relativi.

<u>**Definizione.**</u> - Sia $f : A \to \mathbf{R}$ ed $x_0 \in A$;

1) il punto x_0 è detto di **massimo** (**assoluto**) se: $f(x_0) \ge f(x) \quad \forall\ x \in A$ cioè $f(x_0) = \max f(A)$, $f(x_0)$ è detto **valore massimo**;

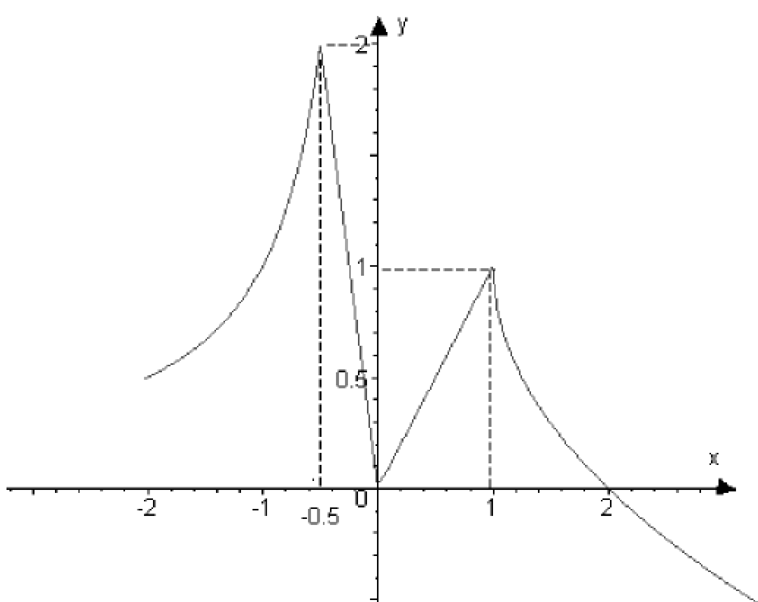
2) il punto x_0 è detto di **massimo relativo** se: $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \ge f(x) \quad \forall\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;

3) il punto x_0 è detto di **minimo** (**assoluto**) se: $f(x_0) \le f(x) \quad \forall\, x \in A$ cioè $f(x_0) = \min f(A)$, $f(x_0)$ è detto **valore minimo**;

4) il punto x_0 è detto di **minimo relativo** se: $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x_0) \le f(x) \quad \forall\, x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

I punti di massimo e di minimo assoluto (relativo) sono detti **estremi assoluti (relativi)**.

<u>**Esempio**</u> - `Dato il seguente grafico di una funzione` f `con dominio` $[-2, +\infty)$, `abbiamo:`



`tre estremi relativi ed un estremo assoluto, infatti`

[9]Elena Muselli

$x = -\frac{1}{2}$ `è p.to di` **massimo assoluto** `perchè` $f(-\frac{1}{2}) \geq f(x) \;\; \forall\, x \in dom\, f$;

$x = 1$ `è p.to di` **massimo relativo** `perchè` $f(1) \geq f(x) \;\; \forall\, x \in (0,2)$;

$x = -2$ `è p.to di` **minimo relativo** `perchè` $f(-2) \leq f(x) \;\; \forall\, x \in [-2,-1) = (-3,-1) \cap dom\, f$;

$x = 0$ `è p.to di` **minimo relativo** `perchè` $f(0) \leq f(x) \;\; \forall\, x \in (-1,1)$.

2.6 - Funzioni pari e funzioni dispari.

Definizioni. - Sia $f : A \to \mathbf{R}$, con A t.c. $x \in A \implies -x \in A$.

1) f è detta **pari** se $\quad f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in A$.

Dalla definizione di funzione pari, segue che $\forall\, x \in A$ si ha:[-0.2cm]

$$\left.\begin{array}{l} (x, f(x)) \in G_f \\ (-x, f(-x)) \in G_f \end{array}\right) \implies \quad (x, f(x)) \in G_f \quad \text{e} \quad (-x, f(x)) \in G_f;$$

quindi, se f è pari, il suo $\boldsymbol{G_f}$ è **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**.

2) f è detta **dispari** se $\quad f(-x) = -f(x) \;\; \forall\, x \in A$.

Dalla definizione di funzione dispari, segue che $\forall\, x \in A$ si ha:

$$\left.\begin{array}{l} (x, f(x)) \in G_f \\ (-x, f(-x)) \in G_f \end{array}\right) \implies \quad (x, f(x)) \;\; \text{e} \;\; (-x, -f(x)) \in G_f;$$

allora, se f è dispari, il suo $\boldsymbol{G_f}$ è **simmetrico rispetto all'origine.**

2.7 - Funzioni monotone.

Definizioni. - Una funzione $f : A \to \mathbf{R}$ è detta

1) **crescente** se $\forall\, x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$;
2) **strettamente crescente** se $\forall\; x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;
3) **decrescente** se $\forall\; x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$;
4) **strett.te decrescente** se $\forall\; x_1, x_2 \in A, \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$;
5) **monotona** se verifica uno dei quattro casi precedenti.

2.8 - Funzione composta.

Definizione. - Siano $f : A \to \mathbf{R}$ e $g : D \to \mathbf{R}$.

Se $f(A) \subset D$ la funzione denotata con $g \circ f$ e definita su A come:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall\, x \in A$$

è detta **funzione composta di g con f**.

Se $f(A) \not\subset D$ ma $f(A) \cap D \neq \emptyset$, la funzione composta $g \circ f$ avrà come dominio l'insieme

$$dom\, (g \circ f) \;=\; \{x \in A \;:\; f(x) \in D\}\,.$$

[10] Elena Muselli

2.9 - Funzione inversa e sue proprietà.

Osserviamo che, se $f: A \to \mathbf{R}$ è iniettiva allora $f: A \to f(A)$ è bigettiva e quindi

$$\forall\, y \in f(A) \;\; \exists \text{ un solo } x \in A \;\; \text{t.c.} \;\; y = f(x).$$

L'unicità di tale x è data dall'iniettività della f.
Si può, allora, definire su $f(A)$ una funzione, detta funzione inversa di f, nel modo seguente:

Definizione. - Una funzione $f: A \to \mathbf{R}$ *iniettiva* è detta **invertibile**. La funzione

$$f^{-1}: f(A) \to A$$

che ad ogni $y \in f(A)$ associa l'unico elemento $x \in A$ t.c. $y = f(x)$ è detta **funzione inversa** di f.

Osservazione 2.2 - Ovviamente, se f è invertibile anche f^{-1} è iniettiva e quindi invertibile e si ha $(f^{-1})^{-1} = f$.

Teorema 2.1. - *Sia $f: A \to \mathbf{R}$ invertibile e sia f^{-1} la sua inversa; si ha:*

1) $\text{dom}\, f^{-1} = f(A)$;

2) $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$;

3) $(f^{-1} \circ f)(x) = x\,, \quad \forall\, x \in A \qquad e \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,, \quad \forall\, y \in f(A)$;

4) G_f *e* $G_{f^{-1}}$ *sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I^o e III^o quadrante.*

Dimostrazione. - Le prime tre discendono (in modo immediato) dalla definizione. Verifichiamo la proprietà 4).

Sia $(x, y) \in G_f$. Dalla definizione di G_f si ha $y = f(x)$ da cui, per la 2), otteniamo $(x, y) = (f^{-1}(y), y)$ che è il punto simmetrico, rispetto alla bisettrice del I^o e III^o quadrante (vedi pag.3), di $(y, f^{-1}(y)) \in G_{f^{-1}}$.

Il teorema seguente dimostra come la stretta monotonia sia una condizione sufficiente per l'invertibilità della funzione.

□

Teorema 2.2 - *Sia $f: A \to \mathbf{R}$ str.te monotona. Allora f è invertibile ed f^{-1} ha la stessa monotonia della f.*

Dimostrazione. - Supponiamo che f sia str.te crescente (nel caso str.te decrescente si procede nello stesso modo).
Siano $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$. Se $x_1 < x_2$, dalla stretta crescenza di f, si ha $f(x_1) < f(x_2)$ quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$; la stessa conclusione si ottiene se $x_1 > x_2$ e quindi f risulta iniettiva cioè invertibile.
Consideriamo, ora, $y_1, y_2 \in f(A)$, $y_1 < y_2$ ed osserviamo che dall'iniettività di f^{-1} si ha $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$. Se fosse $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ si avrebbe, per la stretta crescenza di f,

$$f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2)) \quad \text{cioè} \quad y_1 > y_2$$

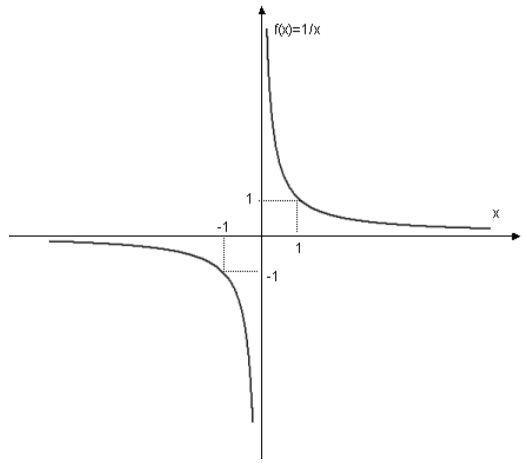
che contraddice la scelta di y_1 ed y_2. Allora si ha $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ cioè la stretta crescenza di f^{-1}.

□

Osservazione 2.3 - L'esempio seguente dimostra che: **ci sono funzioni invertibili non str.te monotone**.

[11] Elena Muselli

Esempio - Consideriamo la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Si ha $dom f = \{x \neq 0\}$ ed il suo grafico, come noto, è l'iperbole in figura



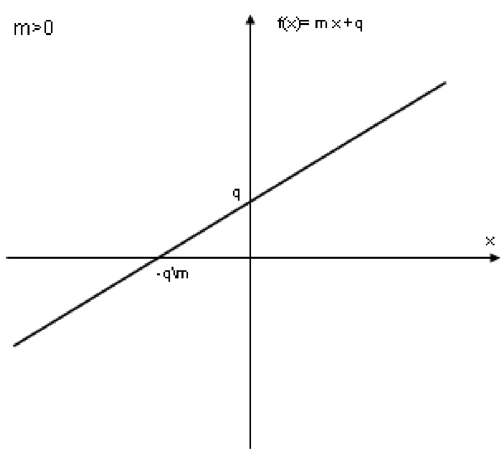
Dal G_f si deduce l'iniettività di f: infatti, le rette orizzontali, che intersecano il G_f, hanno una sola intersezione. Allora, ogni elemento di $Im\, f$ è immagine di un solo elemento del $dom\, f$.
La funzione f è quindi invertibile ma non è str.te monotona.
Infatti, mentre $f_{/(0,+\infty)}$ (o $f_{/(-\infty,0)}$) è str.te decrescente, dalla diseguaglianza $f(-1) < f(1)$ si deduce che la funzione non è str.te decrescente sul dominio.
Osservando, inoltre, che il G_f è simmetrico rispetto alla bisettrice del I^o e III^o quadrante si ottiene che $G_f = G_{f^{-1}}$ e quindi l'inversa è data da $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$

2.10 - Funzioni elementari.

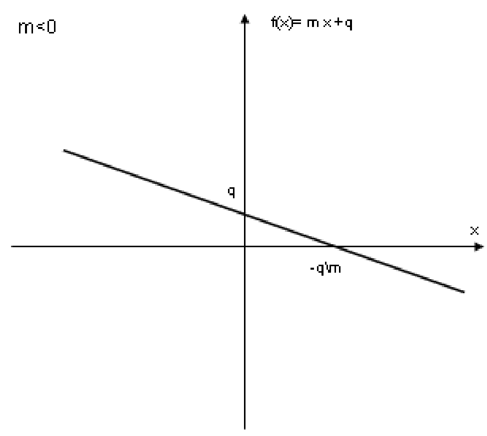
- *Funzioni lineari, funzione modulo e funzione parte intera*

1) - $\boldsymbol{f(x) = m\,x + q}$, $m, q \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$; $dom\, f = \mathbf{R}$.

Sono dette *funzioni lineari*.
I loro grafici sono rette passanti per i punti $(0, q)$ e $(-\dfrac{q}{m}, 0)$. L'angolo che tali rette formano con l'asse delle ascisse è: *acuto* se $m > 0$, *ottuso* se $m < 0$.
m è detto *coefficiente angolare* della retta: se $m > 0$ la funzione è str.te crescente, se invece $m < 0$ la funzione è str.te decrescente (vedi figura seguente):



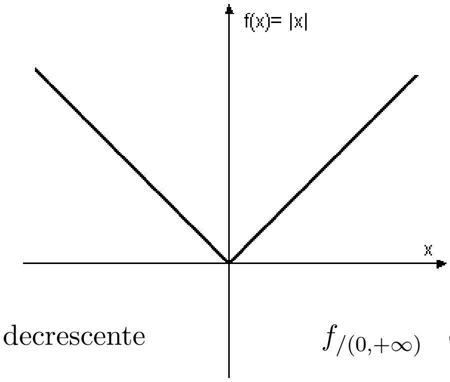
$m > 0$ $\quad f$ str.te crescente



$m < 0$ $\quad f$ str.te decrescente

[12]Elena Muselli

2) - $\underline{\boldsymbol{f(x) = |x|}}$; $\quad dom\, f = \mathbf{R}$. Dalla definizione di $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ si ottiene il grafico

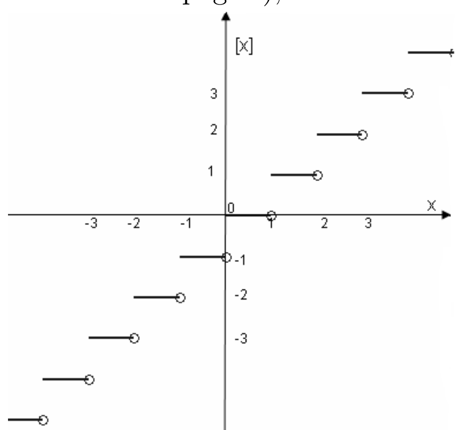


$f_{/(-\infty,0)}$ è str.te decrescente $\qquad$ $f_{/(0,+\infty)}$ è str.te crescente

$f(x) = |x|$ è *pari* : $\qquad f(-x) = |-x| = |x| = f(x)\,,\ \ \forall\, x \in \mathbf{R}$.

3) - $\underline{\boldsymbol{f(x) = [x]}}$; $\quad dom\, f = \mathbf{R}$.

Dalla definizione di $[x]$ (*parte intera* di x pag. 2), si ottiene: $\quad Im\, f = \mathbf{Z}$ ed il grafico



Ne segue che $f(x) = [x]$ è costante a tratti e crescente.

- *Funzioni potenze intere e radici n-esime*

4) - $\underline{\boldsymbol{f(x) = x^n}}$, $n \in \mathbf{N}^+$; $\quad dom\, f = \mathbf{R}\,,\ f(0) = 0$. $\quad$ Le proprietà dipendono da n, in particolare:

n dispari: $\quad f(x) > 0$ se $x > 0$ $\quad$ e $\quad f(x) < 0$ se $x < 0$;

f è dispari $\quad f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$ $\;$ e $\;G_f$ è simmetrico rispetto all'origine;

f è str.te crescente su $\mathbf{R}$.

Infatti, se $0 < x_1 < x_2$ moltiplicando membro a membro n-volte si ha $(x_1)^n < (x_2)^n$;
inoltre, se $x_1 < x_2 < 0$ si ha $\;-x_1 > -x_2 > 0 \implies (-x_1)^n > (-x_2)^n \implies (x_1)^n < (x_2)^n$;
infine, osserviamo che $x_1 < 0 < x_2 \implies (x_1)^n < 0 < (x_2)^n$.

n pari: $\quad f(x) \geq 0\ \ \forall\, x \in \mathbf{R}$;

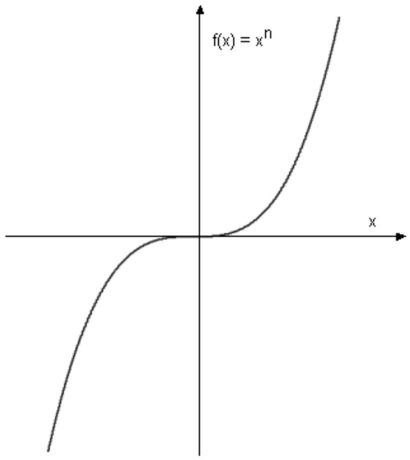
f è pari $\quad f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ $\;$ e $\;G_f$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate;

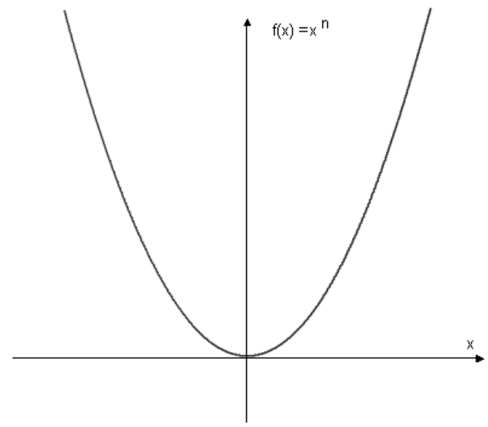
f è str.te crescente su $[0, +\infty)$ $\quad f$ è str.te decrescente su $(-\infty, 0]$.

La stretta monotonia su $[0, +\infty)$ e su $(-\infty, 0]$ si verifica in modo analogo a quanto visto per n dispari.

[13]Elena Muselli

n dispari *n pari*



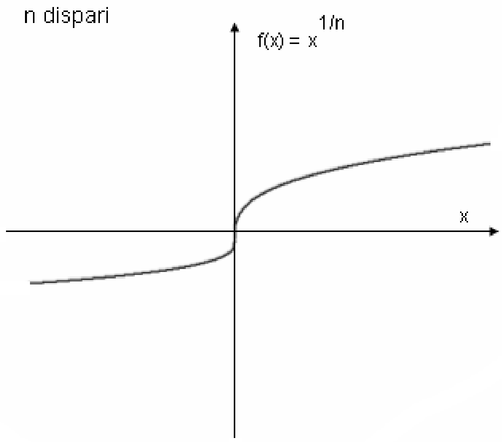


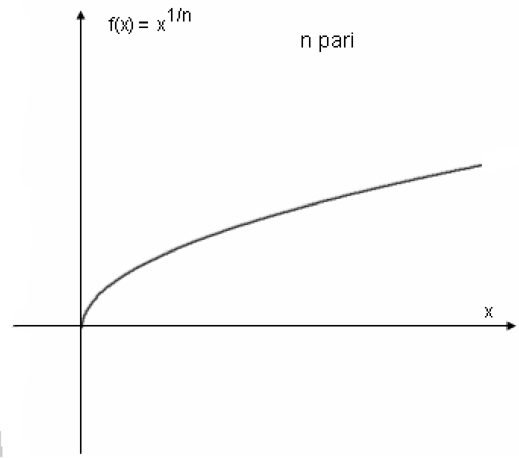
<u>Osservazione 2.4</u> - Da quanto visto, se n è *dispari* la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile su $\mathbf{R}$ mentre se n è pari consideriamo la restrizione, invertibile, $f_{/[0,+\infty)}$.
Le due inverse sono dette *radici n-esime di* x e sono indicate, in entrambi i casi, con la notazione $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

5) - $\underline{\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}}$, $n \in \mathbf{N}^+$; *dom* f dipende da n.

n dispari: *dom* $f = \mathbf{R}$, f str.te crescente *n pari:* *dom* $f = [0, +\infty)$, f str.te crescente

I grafici, ottenuti per simmetria da quelli delle funzioni potenze n-esime, sono:





<u>Osservazione 2.5</u> - Dalla proprietà 3) del Teorema 2.1 (pag 11) si ha

$$\boldsymbol{(\sqrt{x})^2 = x} \quad \forall\, x \in [0, +\infty) \quad \text{mentre} \quad \boldsymbol{\sqrt{x^2} = |x|} \quad \forall\, x \in \mathbf{R}\,, \quad \text{infatti} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2} = x & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

2.11 - Funzioni esponenziali e logaritmiche.

<u>Osservazione 2.6</u> - Dato $a > 0$ e $q \in \mathbf{Q}$, $q = \dfrac{p}{m}$, abbiamo visto che $a^q = \sqrt[m]{a^p}$.

<u>Definizione.</u> - Siano $a > 1$ e $x \in \mathbf{R}$; definiamo

$$\boldsymbol{a^x = \sup\{a^q \;:\; q \in \mathbf{Q}\,,\; q \leq x\}} \qquad (\text{ se } \quad 0 < a < 1 \quad a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}).$$

L'uguaglianza precedente, per l'unicità dell'estremo superiore, definisce una funzione su $\mathbf{R}$ detta *funzione esponenziale* di *base a*. Poichè $1^x = 1\ \forall\, x \in \mathbf{R}$, tratteremo solo funzioni esponenziali di base $a > 0\,,\ a \neq 1$.

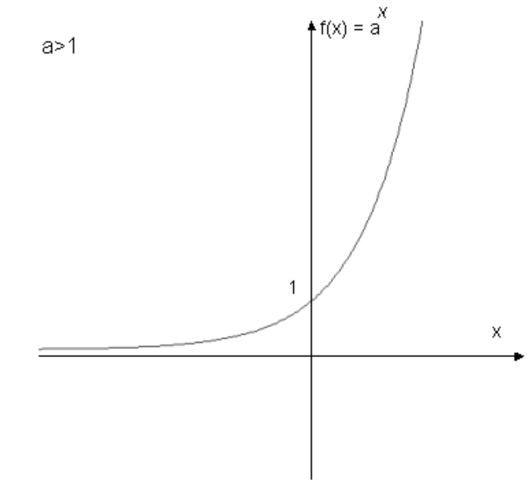
[14]Elena Muselli

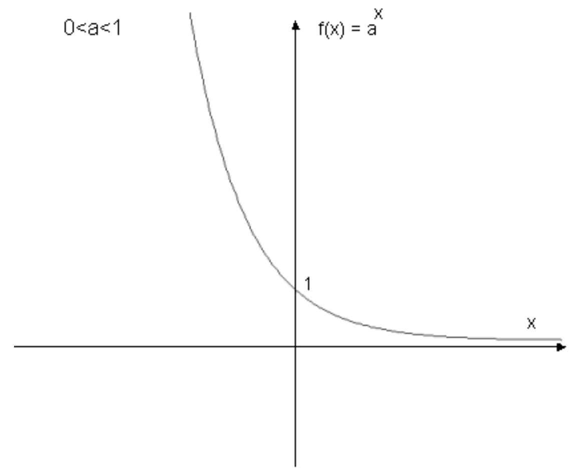
6) - *Funzioni esponenziali di base $a > 0$, $a \neq 1$.*

Sia $\underline{\boldsymbol{f(x) = a^x}}$ con $a > 0$, $a \neq 1$ si ha: $dom\, f = \mathbf{R}$, $f(0) = 1$, $Im\, f = (0, +\infty)$;

La monotonia dipende invece dalla base a: a^x è str.te crescente se $a > 1$
a^x è str.te decrescente se $0 < a < 1$.

I grafici nei due casi sono:





<u>Notazione</u> - La funzione $f(x) = a^x$ si indica anche con $exp_a(x)$. Un caso importante si ha quando la base è uguale al *numero di Nepero*, un numero irrazionale che si indica con la lettera "**e**". Un'approssimazione di tale numero è: $\mathbf{e} \simeq 2.71828...$
La funzione $f(x) = e^x$ si indica anche con $exp(x)$ ed ovviamente risulta str.te crescente.

<u>Proprietà</u> - Dati $a\,,\, b > 0$, $a\,,\, b \neq 1$, ricordiamo le proprietà delle potenze:

1. $a^x\, a^y = a^{x+y}$ $\qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad \forall\, x\,,y \in \mathbf{R}$

2. $(a\, b)^x = a^x\, b^x$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\qquad \forall\, x \in \mathbf{R}$

3. $(a^x)^y = a^{x\, y}$ $\qquad \forall\, x\,,y \in \mathbf{R}$.

<u>Osservazione 2.7</u> - Le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$ sono invertibili. Le funzioni inverse, definite su $Im\, f = (0, +\infty)$ e dette *funzioni logaritmiche*, sono denotate $\log_a x$ e le proprietà si ottengono dalle proprietà delle funzioni inverse.

[15]Elena Muselli

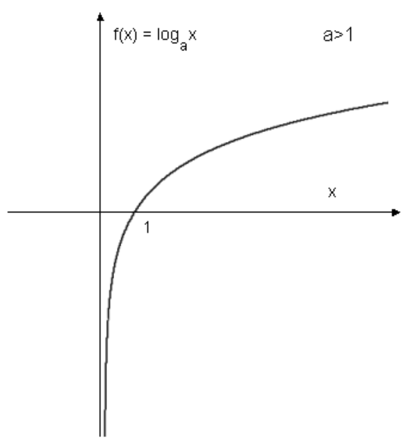
7) - *Funzioni logaritmiche di base* $a > 0$, $a \neq 1$.

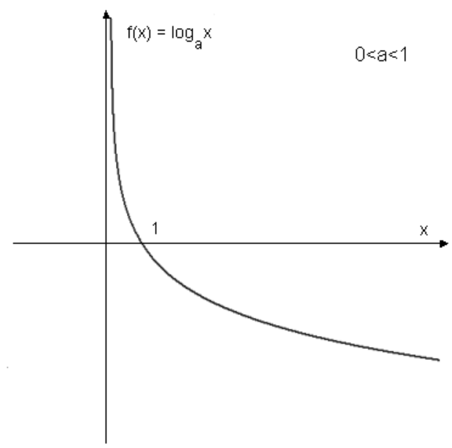
Sia $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ con $a > 0$, $a \neq 1$ si ha: $dom\, f = (0, +\infty)$, $Im\, f = \mathbf{R}$;

I grafici, ottenuti per simmetria da quelli delle funzioni esponenziali, sono:
La monotonia dipende dalla base a: $\log_a x$ è str.te crescente se $a > 1$

$\log_a x$ è str.te decrescente se $0 < a < 1$.

I grafici, ottenuti per simmetria da quelli delle funzioni esponenziali, sono:





Notazione - Per il logaritmo in *base naturale* e si usano le notazioni: $\log_e x$, $\log x$, $\ln x$

Proprietà - Dalle proprietà delle funzioni inverse (Teorema 2.1, pag 11), se $a > 0$, $a \neq 1$, si ha:

1. $a^{\log_a x} = x$, $\forall\, x > 0$ $\qquad \log_a(a^x) = x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$

   dalla 1. si ottiene

2. $\log_a 1 = 0$ $\qquad \log_a a = 1$ $\qquad \log_a(\frac{1}{a}) = -1$ $\qquad \forall\, a > 0$, $a \neq 1$

   le seguenti proprietà discendono dalle proprietà delle potenze (verrà verificata solo la 3. a titolo esplicativo). Siano a, $b > 0$, a, $b \neq 1$:

3. $\log_a(x\,y) = \log_a x + \log_a y$ $\qquad \forall\, x, y > 0$
4. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$ $\qquad \forall\, x, y > 0$
5. $\log_a(x)^y = y \log_a x$ $\qquad \forall\, x > 0$, $y \in \mathbf{R}$
6. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ $\qquad \forall\, x > 0$ (cambiamento di base) da cui $\boldsymbol{\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x}$ $\quad \forall\, x > 0$

[Per verificare la 3., poniamo: $z = \log_a(x\,y)$ $\quad m = \log_a x$ $\quad s = \log_a y$.
Poichè $\log_a$ è l'inversa della funzione esponenziale si ha: $a^z = a^{\log_a(x\,y)} = x\,y$ analogamente $a^m = x$
$a^s = y$; ne segue che $a^z = x\,y = a^m\, a^s = a^{m+s}$ e, per l'iniettività della funzione esponenziale, si ha
$z = m + s$ cioè la tesi.]

[16] Elena Muselli

2.12 - Funzioni trigonometriche.

<u>Definizione</u>. Una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è detta **periodica di periodo** $\mathbf{T} > \mathbf{0}$ se

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

<u>Osservazione 2.8</u> - La definizione di funzione periodica di periodo $T > 0$ implica che i valori della funzione "si ripetono dopo intervalli di ampiezza T".
Allora, per conoscere le proprietà di una funzione periodica f, basta conoscere le proprietà di f ristretta ad un intervallo di lunghezza uguale al periodo T.
Per tracciarne il grafico, basta tracciare il grafico di f ristretta ad un intervallo di ampiezza T e poi ripeterlo traslandolo orizzontalmente.
Possiamo osservare che, dati $x \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}^+$, dalla definizione di funzione periodica si ha

$$f(x) = f(x+T) = f((x+T)+T) = f(x+2T) = f((x+2T)+T) = f(x+3T) = \cdots = f(x+nT))$$

ed analogamente

$$f(x) = f((x-T)+T) = f(x-T) = f((x-2T)+T) = f(x-2T) = f((x-3T)+T) = f(x-3T)\cdots = f(x-nT))$$

che si possono riassumere nella formula

$$f(x) = f(x+kT) \qquad \forall\, k \in \mathbf{Z}.$$

<u>Esempio</u> - *Disegnare il grafico della funzione periodica di periodo $T = 1$ sapendo che $f(x) = x$ se $x \in (0,1]$.*

Tracciamo prima il grafico di $f_{/(0,1]}$ (fig.a) e poi estendiamo con periodicità (cioè ripetendo il grafico in intervalli di ampiezza 1) a tutto $\mathbf{R}$ (fig.b)

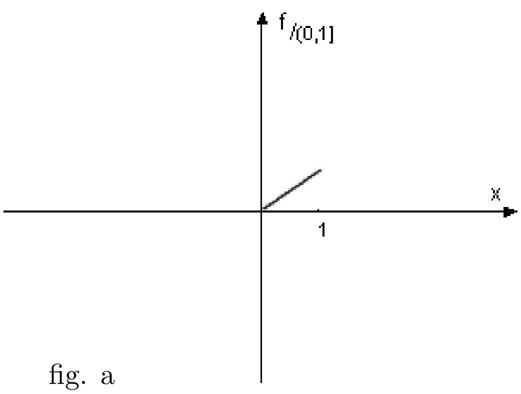


fig. a

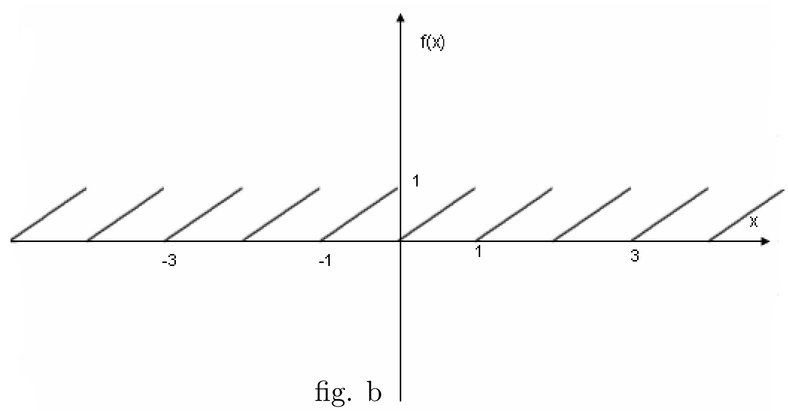


fig. b

Funzioni seno e coseno.

Sia γ una circonferenza di raggio 1; sappiamo che *lunghezza*(γ)=2π.

Nel piano di γ consideriamo un sistema di assi cartesiani con origine nel centro di γ: la circinferenza γ con tale sistema di assi è detta *circonferenza goniometrica* (vedi fig. pagina seguente).

Sia A il punto di intersezione di γ con la semiretta positiva delle ascisse.

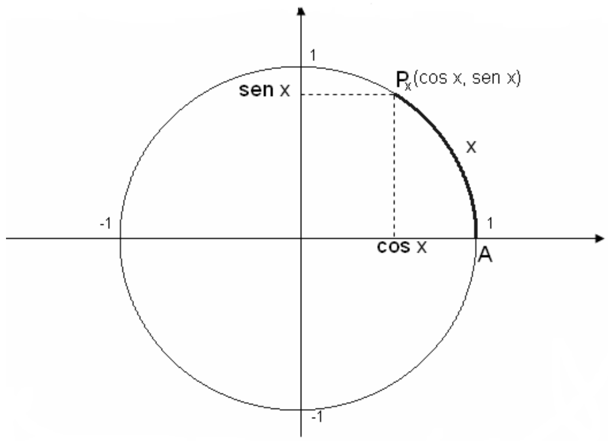
Dato $x \in [0, 2\pi)$ possiamo considerare P_x l'unico punto di γ t.c. l'arco $arco(A\,P_x)$, con primo estremo A e secondo estremo P_x, *percorso in senso antiorario* abbia lunghezza x.

Se $x \in (-2\pi, 0]$, consideriamo P_x l'unico punto di γ t.c. l'arco $arco(A\,P_x)$ *percorso in senso orario* abbia lunghezza $-x$.

[17]Elena Muselli

<u>Definizione.</u> Siano $x \in [0, 2\pi)$ e P_x l'unico punto di γ t.c. l'arco $arco(A\,P_x)$ *percorso in senso antiorario* abbia lunghezza x.
Si definisce

$$\mathbf{sen}\,\boldsymbol{x} := \text{ordinata di } P_x \qquad \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} := \text{ascissa di } P_x$$



Da semplici considerazioni geometriche si ha, per $x \in [0, 2\pi)$: $\quad \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (teorema di Pitagora) ed anche

$\text{sen}\, 0 = 0$	$\text{sen}\, \frac{\pi}{2} = 1$	$\text{sen}\, \pi = 0$	$\text{sen}\, \frac{3}{2}\pi = -1$
$\cos\, 0 = 1$	$\cos\, \frac{\pi}{2} = 0$	$\cos\, \pi = -1$	$\cos\, \frac{3}{2}\pi = 0$
$-1 \leq \text{sen}\, x \leq 1$	$-1 \leq \cos\, x \leq 1$	$\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\, x$	$\cos\,(-x) = \cos\, x$
$\text{sen}_{/[0,\frac{\pi}{2}]}$ e $\text{sen}_{/[\frac{3}{2}\pi, 2\pi)}$ è str. cresc.	$\text{sen}_{/[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi]}$ è str. decresc.	$\cos_{/[0,\pi]}$ è str. decresc.	$\cos_{/[\pi, 2\pi)}$ è str. cresc.

Definiamo ora le funzioni $\quad \mathbf{sen} : \mathbf{R} \longrightarrow [\mathbf{-1}, \mathbf{1}] \quad$ e $\quad \mathbf{cos} : \mathbf{R} \longrightarrow [\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$
estendendo per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ i valori $\text{sen}\, x$ e $\cos x$ determinati nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

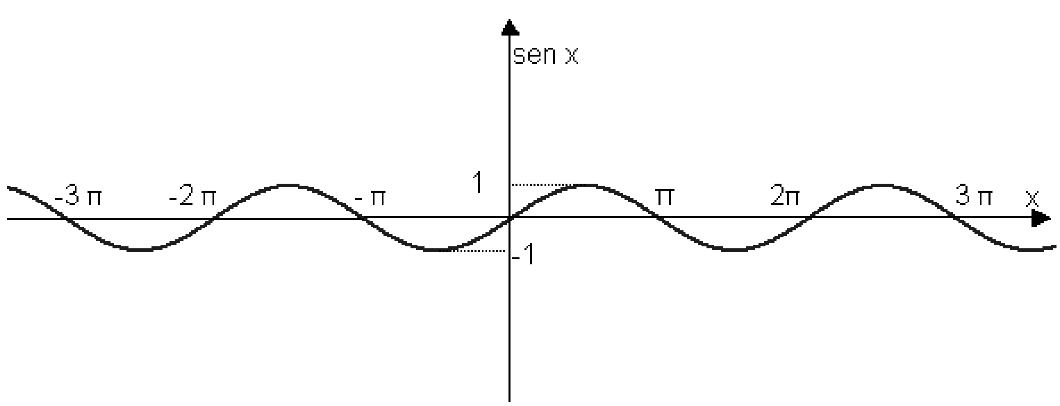
Le funzioni **seno** e **coseno** saranno quindi periodiche di periodo $T = 2\pi$:

$$\text{sen}\,(x) = \text{sen}\,(x + 2\,k\,\pi) \quad e \quad \cos(x) = \cos(x + 2\,k\,\pi) \qquad \forall\, x \in \mathbf{R} \quad \forall\, k \in \mathbf{Z}\,;$$

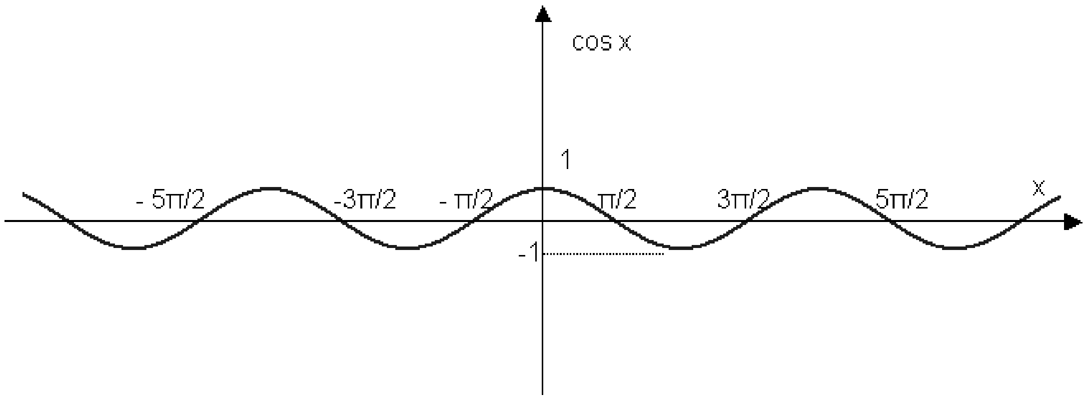
ricordiamo, inoltre, la relazione fondamentale

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}\,.$$

I grafici sono rispettivamente



[18]Elena Muselli



Ricordiamo inoltre alcuni valori e proprietà

- $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
- seno e coseno sono funzioni limitate: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}$;
- seno è funzione dispari: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$;
- coseno è funzione pari: $\cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$.

Formule trigonometriche

Ricordiamo solo alcune tra le formule trigonometriche; alla pagina web del corso è disponibile un formulario completo.
La notazione inglese *sin* è usata al posto di seno.
Le prime si possono dedurre da considerazioni geometriche, delle altre omettiamo la dimostrazione.

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x\,\cos x$$

$$\cos(2\,x) = \cos^2 x - \sin^2 x \;=\; 1 - 2\,\sin^2 x \;=\; 2\,\cos^2 x - 1$$

dalla seconda si ricava: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2\,x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2\,x)}{2}$

Formule di prostaferesi (solo 2 di 4):

$$\sin x - \sin y = 2\,\sin(\tfrac{x-y}{2})\,\cos(\tfrac{x+y}{2})$$

$$\cos x - \cos y = -2\,\sin(\tfrac{x-y}{2})\,\sin(\tfrac{x+y}{2})$$

[19] Elena Muselli

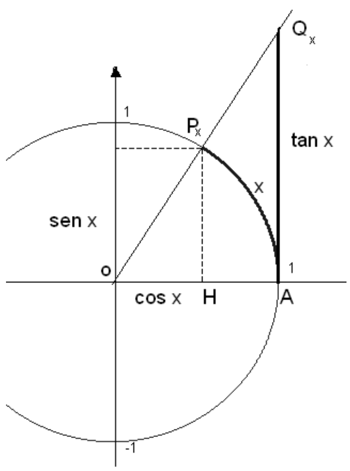
Funzione tangente.

È definita come rapporto tra seno e coseno:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \textit{dom } \tan = \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$ (La notaz. inglese *tan* è usata al posto di tang).

Con considerazioni sui triangoli simili $H0P_x$ e $A0Q_x$ nel piano della circonferenza γ (su cui sono stati definiti $\sin x$ e $\cos x$) si ottiene che $\tan x$ è l'ordinata del punto Q_x.

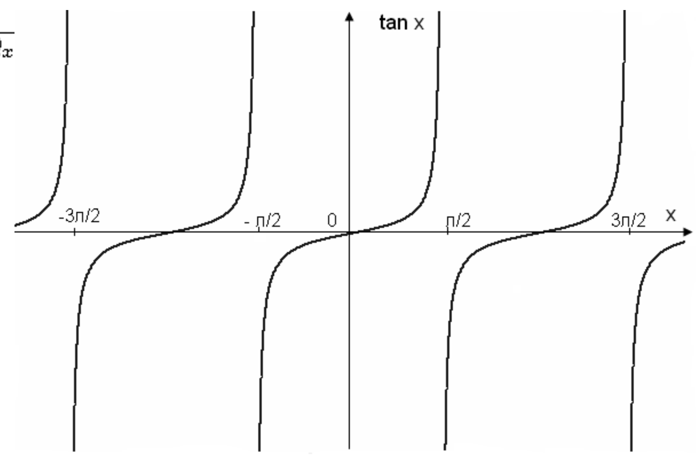
Il grafico della funzione $\mathbf{tan} : \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\ ,\ k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ è tracciato di seguito:



$\overline{HO} : \overline{HP_x} = \overline{AO} : \overline{AQ_x}$

$\cos x : \sin x = 1 : \overline{AQ_x}$

$\overline{AQ_x} = \frac{\sin x}{\cos x}$



Proprietà - Dalle proprietà del seno e del coseno si ricavano le proprietà delle tangente:

- $\tan 0 = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x;$
- tangente è periodica di periodo $T = \pi$: $\qquad \tan(x) = \tan(x + k\,\pi) \quad k \in \mathbf{Z} \quad \forall\, x \in \textit{dom } \tan;$
- tangente è funzione dispari: $\qquad \tan(-x) = -\tan x \quad \forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbf{Z};$

<u>Teorema 2.3</u> - *La funzione seno verifica la seguente disuguaglianza*

$$|\sin x| \ \leq\ |x| \qquad \forall\ x \in \mathbf{R}.$$

Dimostrazione.. - Sia $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dalla relazione tra corde ed archi di una circonferenza e dalla definizione di $\sin x$, si ottiene

$$0 \leq \sin x \leq x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq |\sin x| \ \leq\ |x| \qquad \forall\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]\,.$$

Se $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, utilizzando la precedente relazione per archi positivi e le proprietà del modulo, si ha

$$0 \leq \sin(-x) \leq -x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq |\sin(-x)| \ \leq\ |-x| \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq |-\sin x| \ \leq\ |x| \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq |\sin x| \ \leq\ |x|\,.$$

Concludiamo osservando che, se $x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, +\infty)$ cioè $|x| > \frac{\pi}{2}$ si ha: $\qquad |\sin x| \leq 1 < \dfrac{\pi}{2} < |x|.$

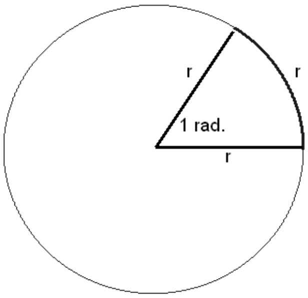
□

[20]Elena Muselli

2.13 - Trigonometria applicata alla geometria.

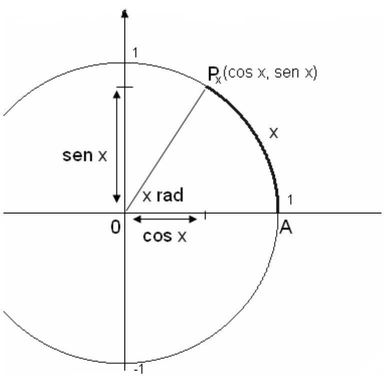
Seno, coseno e tangente di angoli.

Sappiamo che, in una circonferenza C_r di raggio r, l'angolo al centro sotteso ad un arco di lunghezza r misura $1\,radiante$.



Da $\dfrac{lungh\,C_r}{r} = 2\,\pi$ si ha che r è "contenuto" $2\,\pi$-volte in C_r e l'angolo $\boldsymbol{1\,rad}$ è "contenuto" $2\,\pi$-volte nell'angolo giro al centro, da cui:

$$360^o = 2\,\pi\,rad \qquad \text{e} \qquad 1\,rad = \frac{360^o}{2\,\pi} \simeq 57.295^o$$



Se consideriamo la circonferenza γ di raggio 1 (pag. 18) ed $x \in [0, 2\,\pi]$, all'arco $arco\,(A\,P_x)$ di lungh. x corrisponde un angolo al centro di $x\,rad.$. Anche per l'angolo $\widehat{A0P_X}$, di $x\,rad.$, si definisce

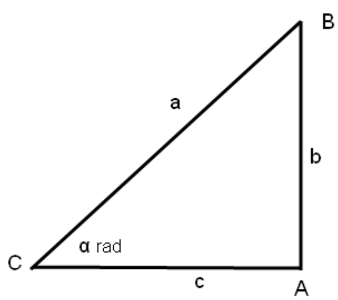
$$\sin(\widehat{A0P_X}) = ordinata\,P_x \qquad \cos(\widehat{A0P_X}) = ascissa\,P_x.$$

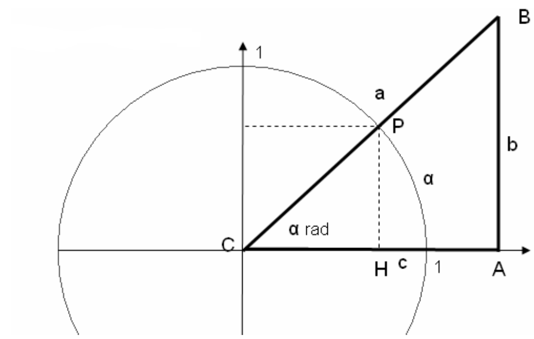
Avremo:

$\sin(90°) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$	$\sin(180°) = \sin\pi = 0$	$\sin(270°) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$
$\cos(90°) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$	$\cos(180°) = \cos\pi = -1$	$\cos(270°) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$
$\sin(30°) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sin(45°) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(60°) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(30°) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos(45°) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(60°) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Per il seno e coseno di angoli complementari, supplementari etc. si usano le regole viste per le funzioni sin e cos. La tangente di angoli è ancora definita come il rapporto tra seno e coseno.

Trigonimetria applicata ai triangoli rettangoli. - Dato un triangolo rettangolo:





si ha: $\overline{BA} : \overline{PH} = \overline{CB} : \overline{CP} \iff b : sen(\alpha) = a : 1$ da cui $\boldsymbol{b = a\,\sin(\alpha)}$.

Analogamente si ottiene: $\boldsymbol{c = a\,\cos(\alpha)}$ e $\boldsymbol{\dfrac{b}{c} = \tan(\alpha)}$.

[21] Elena Muselli

2.14 - Funzioni: arcseno, arccoseno, arctangente.

Le funzioni seno, coseno e tangente non sono iniettive sul loro dominio.

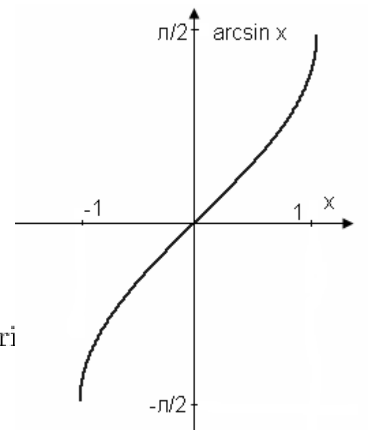
Se consideriamo le tre restrizioni $\sin_{/[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ $\cos_{/[0,\pi]}$ $\tan_{/(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$

esse risultano str.te monotone e quindi invertibili; da tali restrizioni deduciamo: dominio, monotonia e grafico dell'inversa. Tali inverse, dette rispettivamente arcseno, arccoseno e arctangente, hanno quindi le seguenti proprietà:

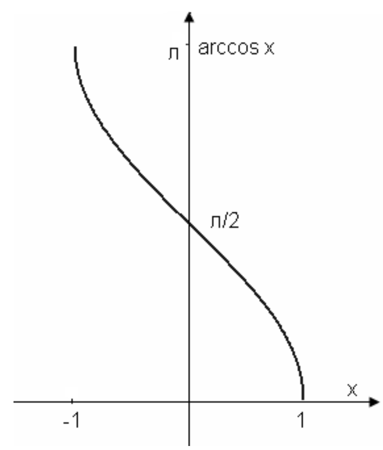
arcsin : $[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ è str.te crescente

il grafico è simmetrico rispetto all'origine, quindi arcseno è dispari

$\arcsin(-x) = -\arcsin(x) \quad \forall\ x \in [-1,1]$



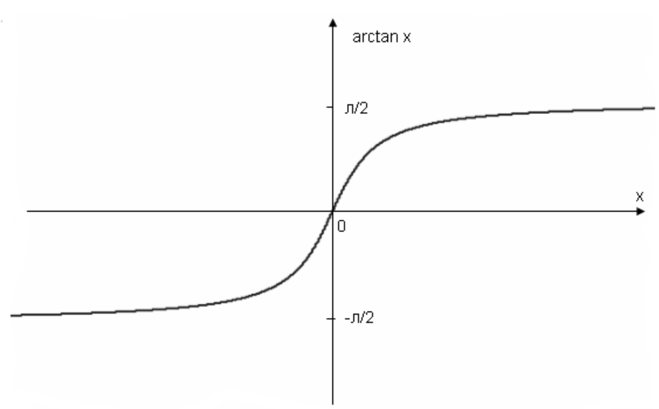
arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ è str.te decrescente



arctan : $\mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ è str.te crescente

il grafico è simm. rispetto all'orig., quindi arctang. è dispari

$\arctan(-x) = -\arctan(x) \quad \forall\ x \in \mathbf{R}$



<u>**Osservazione 2.9**</u> - Osserviamo che da $\tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \ k \in \mathbf{Z}$

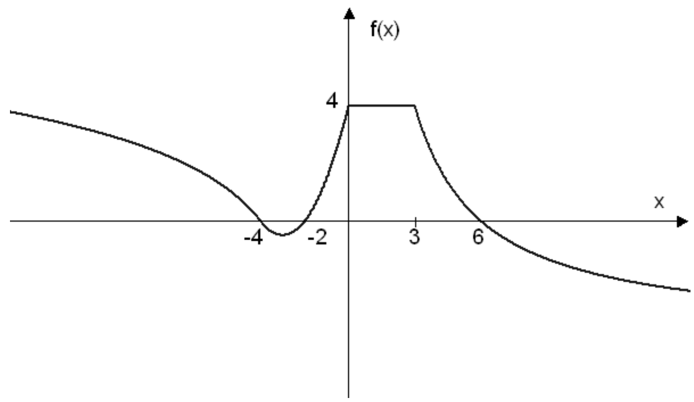
non segue che $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ma $\boldsymbol{\arctan 1 = \frac{\pi}{4}}$

perchè l'immagine della funzione arctan è $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

[22]Elena Muselli

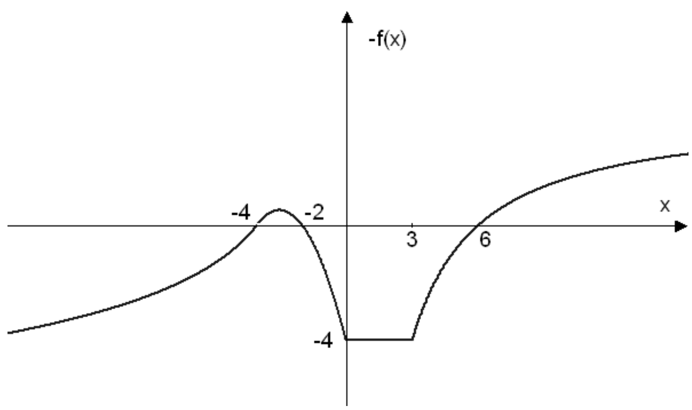
2.15 - Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di grafici.

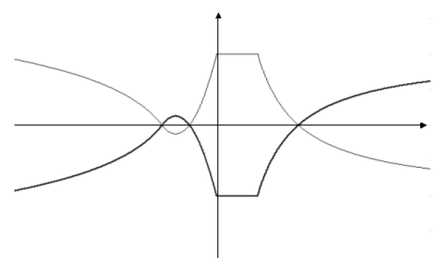
Dato il grafico di una funzione f, possiamo ricavare il grafico delle funzioni:
$-f(x)$, $f(-x)$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $f(x)+c$, $f(x+c)$, $f(cx)$, $c>0$, $c \neq 1$.
Riportiamo di seguito i grafici nei vari casi ed un confronto con il grafico della funzione originaria f.
Sia f una funzione con grafico:



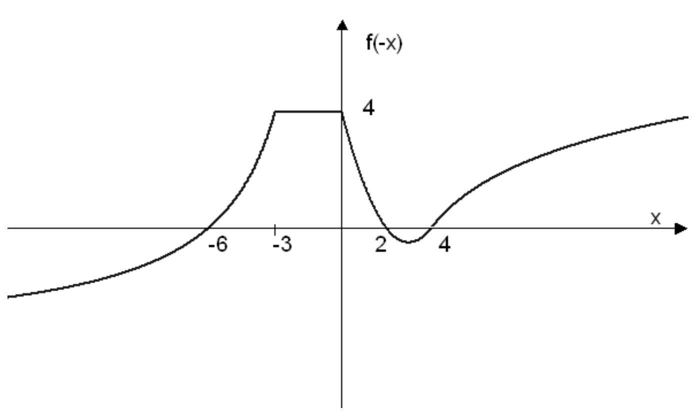
si ha

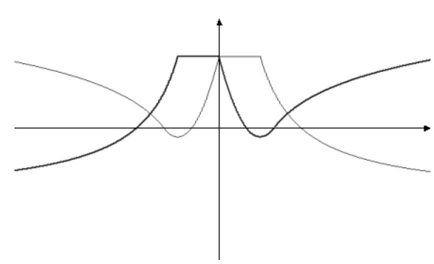
- - f(x) assume i valori di segno opposto a quelli della f; il grafico è quindi simmetrico a quello della f rispetto all'asse delle ascisse





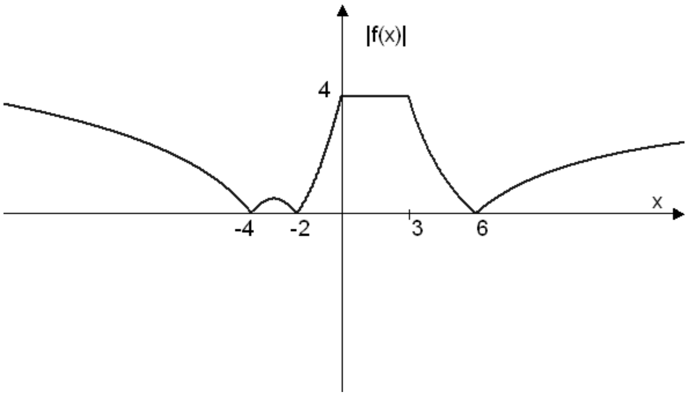
- f(-x) in $(0,+\infty)$ questa funzione assume i valori che la f aveva in $(-\infty,0)$; il grafico è quindi simmetrico a quello della f rispetto all'asse delle ordinate

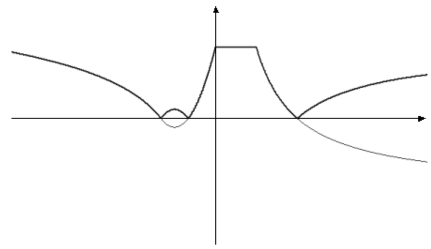




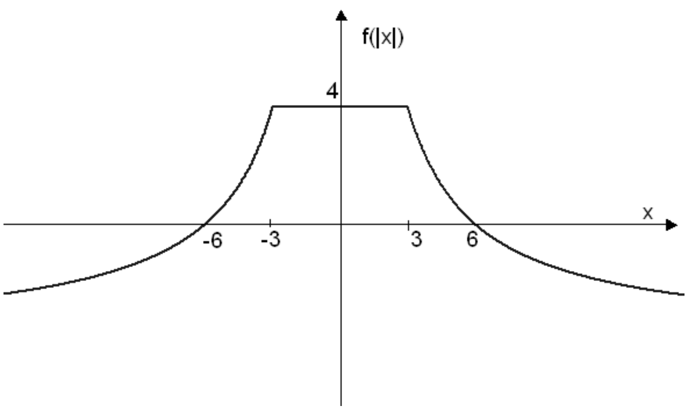
[23]Elena Muselli

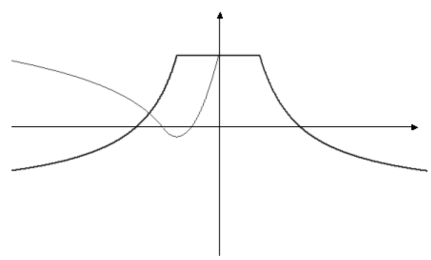
- $|f(x)|$ La parte positiva del grafico di f resta invariata, la parte negativa si simmetrizza rispetto all'asse delle ascisse



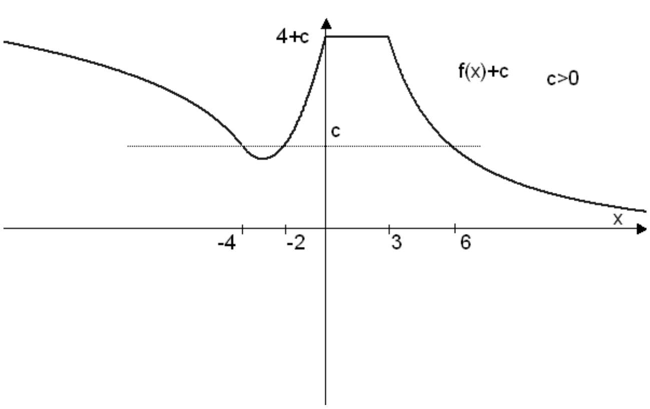


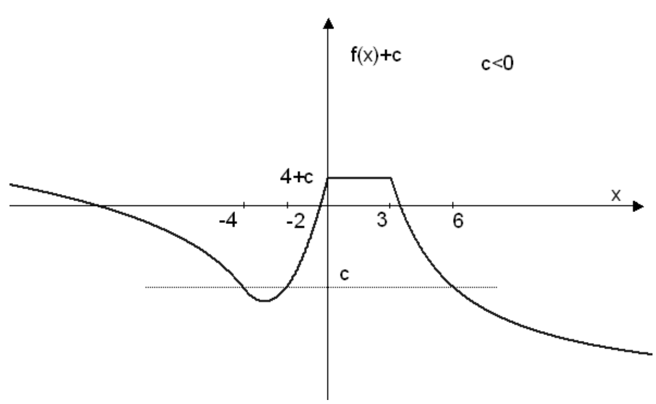
- $f(|x|)$ è funzione pari e coincide con f in $(0, +\infty)$; il grafico è poi simmetrizzato rispetto all'asse delle ordinate





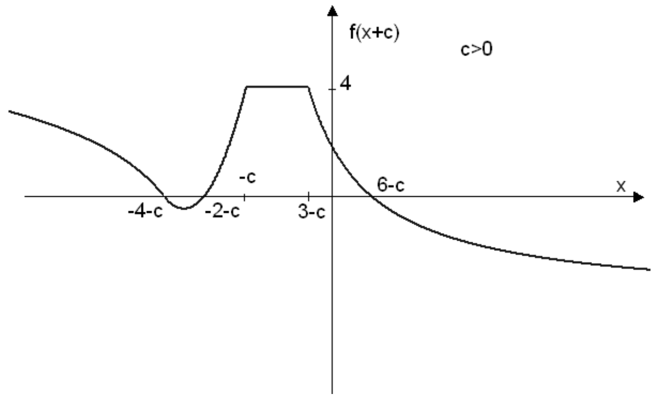
- $f(x) + c$ se $c > 0$ il grafico si ottiene traslando verso l'alto di una quota c il grafico di f ; se $c < 0$ la traslazione sarà verso il basso

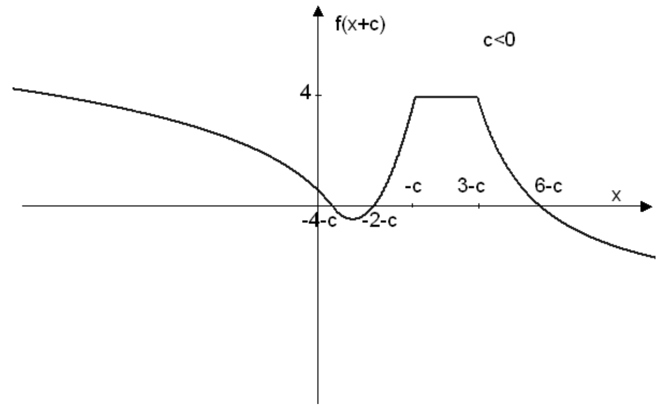




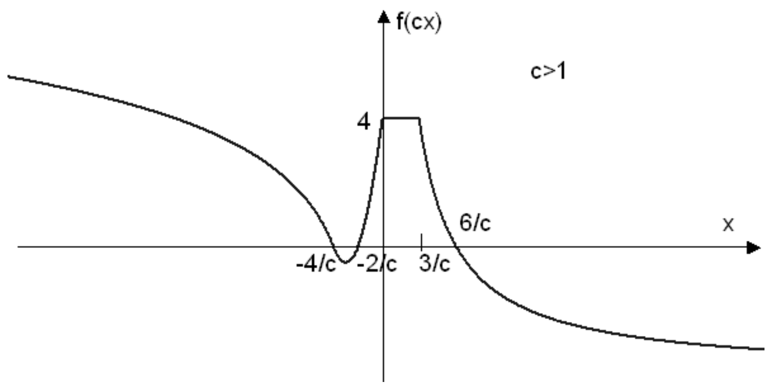
[24]Elena Muselli

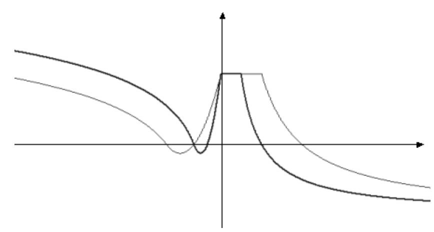
- $f(x+c)$ se $c>0$ il grafico si ottiene traslando verso sinistra di un intervallo di ampiezza c il grafico di f ; se $c<0$ la traslazione sarà verso destra

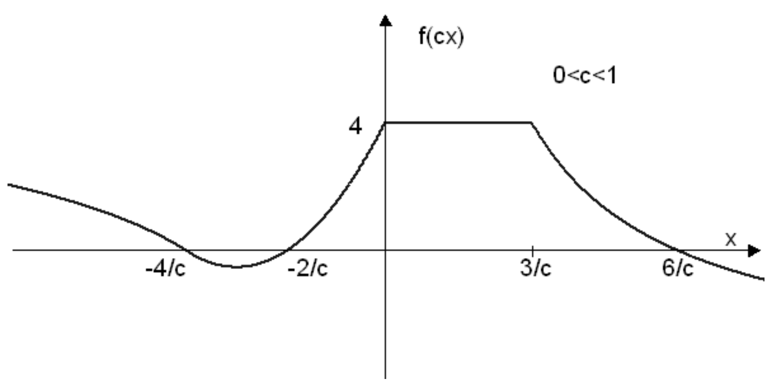


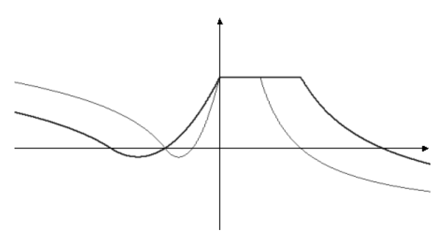


- $f(c\,x)$, $c>0\,,\,c\neq 1$ se $c>1$ il grafico è una "compressione" del grafico di f ; se $0<c<1$ il grafico è una "dilatazione" del grafico di f









[25] Elena Muselli

CAPITOLO 3

3.1 - Limiti di funzioni.

Definizioni. - Diremo

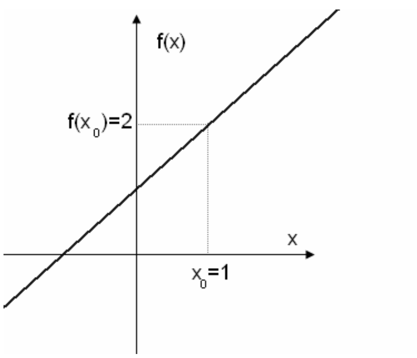
(a) **intorno bucato di** x_0 un intorno di x_0 privato di x_0: $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$ con $r > 0$
(b) **intorno destro di** x_0 un intervallo $(x_0, x_0 + r)$ con $r > 0$
(c) **intorno sinistro di** x_0 un intervallo $(x_0 - r, x_0)$ con $r > 0$
(d) **intorno di** $+\infty$ un intervallo $(b, +\infty)$ con $b \in \mathbf{R}$
(e) **intorno di** $-\infty$ un intervallo $(-\infty, b)$ con $b \in \mathbf{R}$

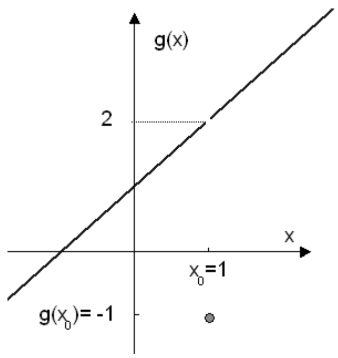
Notazione. - Nel seguito, denoteremo $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ e, dato $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, il simbolo $\boldsymbol{I_{x_0}}$ denoterà gli intorni definiti in (a), (d) ed (e) nei rispettivi casi: $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 = +\infty$ e $x_0 = -\infty$.

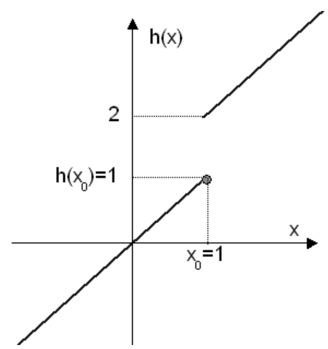
- **Limiti al finito.**

Consideriamo i grafici delle funzioni:

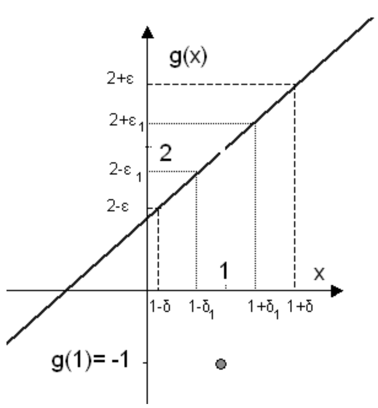
$f(x) = x + 1$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ -1 & x = 1 \end{cases}$, $h(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$

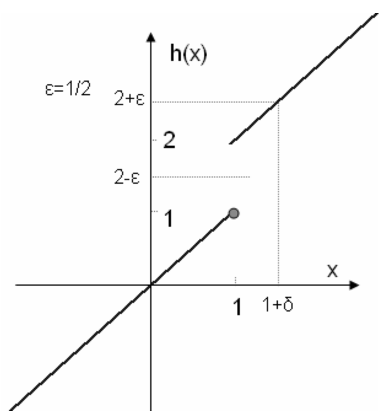






Osserviamo che $f(x_0) \neq g(x_0)$ ma il comportamento di f e g in un intorno bucato di x_0 è lo stesso perchè sono uguali.
Vogliamo caratterizzare il comportamento di una funzione nell'intorno bucato di un punto "indipendentemente" dal valore che tale funzione potrebbe avere nel punto.
Se, nel grafico di g, si considera un intorno di $l = 2$ di raggio variabile (che indicheremo con la lettera ε) si riesce a determinare un intorno di $x_0 = 1$, che denotiamo $I_{x_0} = (1 - \delta, 1 + \delta)$, tale che (vedi figura seguente) $g(I_{x_0} \setminus \{x_0\}) \subset (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$.





Nel grafico di h, invece, se si considera $\varepsilon = \frac{1}{2}$ si trova soltanto un intorno destro che verifica l'inclusione precedente.

[26] Elena Muselli

Sulla riga dei ragionamenti fatti graficamente, per descrivere rigorosamente il comportamento di una funzione f "vicino" ad un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ si usa la nozione di limite.

Introduzione alla definizione e notazione di limite.

Se, dato $l \in \mathbf{R}$, per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che si abbia $f(U \backslash \{x_0\}) \subset V$ diremo che $\boldsymbol{f(x)}$ **tende ad** $\boldsymbol{l}$ **quando** $\boldsymbol{x}$ **tende ad** $\boldsymbol{x_0}$.

Per "sintetizzare" tale concetto utilizzeremo la notazione $\displaystyle \lim_{x \to x_0} f(x) = l$ che leggeremo "*il limite di f(x), per x che tende a* x_0*, è uguale ad l*", o anche "*f(x) tende a l per x che tende a* x_0". Una notazione analoga è data da $f(x) \to l$ per $x \to x_0$.

Denotiamo "l'intorno V di l" come $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ e l'intorno $U \backslash \{x_0\}$ con $(x_0-\delta, x_0+\delta) \backslash \{x_0\}$. È ovvio che per ottenere tutti gli intorni di l dovremo far variare l'ampiezza $\varepsilon > 0$ dell'intorno.

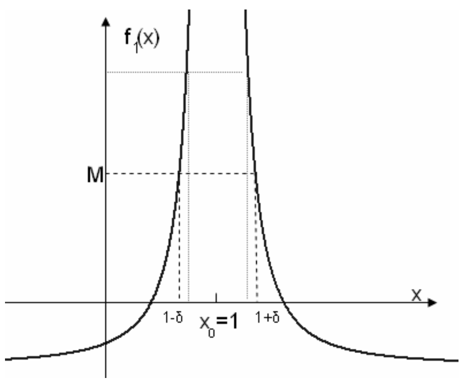
Scrivendo gli intorni V ed U come indicato avremo, nel caso x_0 ed l reali, la seguente definizione di limite:

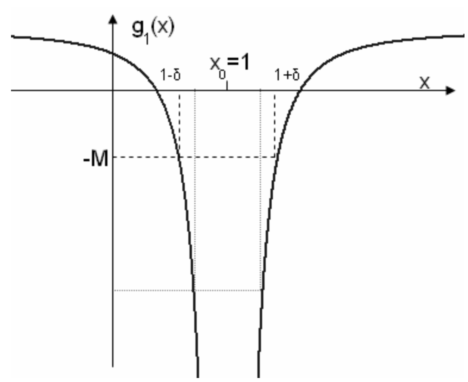
Definizione. - Siano $f: A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ t.c. $(x_0 - r, x_0 + r) \backslash \{x_0\} \subset A$ per qualche $r > 0$. Diremo che

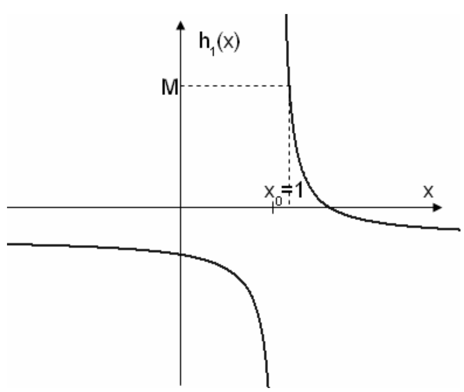
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \backslash \{x_0\} \text{ si ha } \quad |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

Ricordiamo che $|f(x) - l| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

Consideriamo adesso i grafici delle funzioni: $f_1(x) = \frac{1}{|x-1|} - 2$; $g_1(x) = \frac{-1}{|x-1|} + 2$; $h_1(x) = \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2}$.







Possiamo caratterizzare il comportamento delle f_1 e g_1 "*vicino ad* $x_0 = 1$", osservando che: per ogni quota $M > 0$ esiste un intorno $I_{x_0} = (1-\delta, 1+\delta)$ (come si vede nelle prime due fig.) t.c.

$$f_1(x) > M \qquad g_1(x) < -M \qquad \forall\, x \in I_{x_0} \backslash \{1\} \qquad .$$

Il comportamento di h_1, invece, è diverso a seconda che consideriamo un intorno destro o un intorno sinistro di $x_0 = 1$.

[27]Elena Muselli

In analogia a quanto visto nel caso $l \in \mathbf{R}$, se per ogni intorno V di $+\infty$ (opp. $-\infty$) esiste un intorno U di x_0 tale che si abbia $f(U\backslash\{x_0\}) \subset V$ diremo che $\boldsymbol{f(x)}$ **tende ad** $\boldsymbol{+\infty\,(-\infty)}$ **quando** $\boldsymbol{x}$ **tende ad** $\boldsymbol{x_0}$ e useremo la notazione $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty}\ (-\infty)$.
Dato $M > 0$, denotando "l'intorno V di $+\infty$" come $(M, +\infty)$ e "l'intorno V di $-\infty$" come $(-\infty, -M)$ avremo le seguenti definizioni di limite:

Definizioni. - Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ t.c. $(x_0 - r, x_0 + r)\backslash\{x_0\} \subset A$ per qualche $r > 0$. Diremo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \ \text{ si ha } \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \ \text{ si ha } \quad f(x) < -M$$

Notazione. - Possiamo considerare la notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$.

Essa rappresenta tutte e tre le definizioni precedenti, cioè si ha:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$ con

$$l \in \mathbf{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \ \text{ si ha } \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$l = +\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \ \text{ si ha } \quad f(x) > M$$

$$l = -\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \ \text{ si ha } \quad f(x) < -M\,.$$

Volendo caratterizzare il comportamento di una funzione in un *intorno destro* o in un *intorno sinistro* di un punto, avremo invece le seguenti definizioni:

Definizioni di limite destro. - Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ t.c. $(x_0, x_0 + r) \subset A$ per qualche $r > 0$. Definiamo

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$

$$\text{se } \ l \in \mathbf{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \text{ si ha } \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\text{se } \ l = +\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \text{ si ha } \quad f(x) > M$$

$$\text{se } \ l = -\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \ \text{ si ha } \quad f(x) < -M\,.$$

Definizioni di limite sinistro. - Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$ t.c. $(x_0 - r, x_0) \subset A$ per qualche $r > 0$. Definiamo

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$

$$\text{se } \ l \in \mathbf{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \text{ si ha } \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\text{se } \ l = +\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \text{ si ha } \quad f(x) > M$$

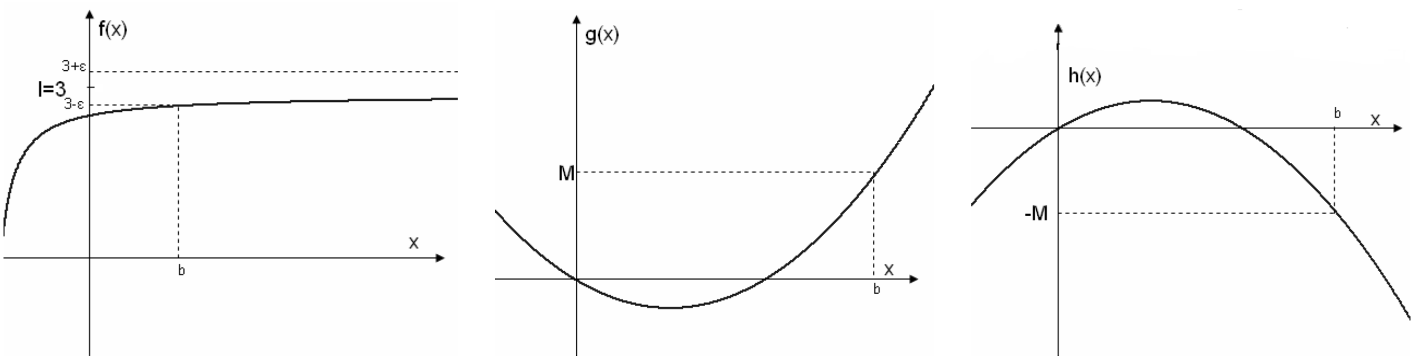
$$\text{se } \ l = -\infty \iff \forall\, M > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \ \text{ si ha } \quad f(x) < -M\,.$$

Vedremo nel paragrafo successivo il teorema che lega l'esistenza di un limite per $x \to x_0 \in \mathbf{R}$ all'esistenza ed uguaglianza del limite destro e limite sinistro

[28]Elena Muselli

- **Limiti all'infinito.**

Se il dominio di una funzione f *non è limitato superiormente* (*inferiormente*) vogliamo caratterizzare il comportamento della funzione in un intorno di $+\infty$ ($-\infty$) o, come si dice usualmente, quando " x *tende a* $+\infty$ " (*tende a* $-\infty$).
I seguenti grafici descrivono tre comportamenti diversi.



Ricordando che un intervallo $(b,+\infty)$ è un intorno di $+\infty$, se riproduciamo graficamente le caratterizzazioni viste nel caso $x_0 \in \mathbf{R}$, possiamo osservare che si ripresentano le stesse situazioni dove al posto dell'intorno di x_0 troviamo un intorno di $+\infty$ ($-\infty$).
Notando che $x \in (b,+\infty) \iff x > b$, in analogia a quanto descritto nel caso $x_0 \in \mathbf{R}$, avremo le seguenti definizioni:

<u>Definizioni.</u> - Sia $f : A \to \mathbf{R}$ con $(d,+\infty) \subset A$ per qualche d.

Definiamo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$

$$\begin{array}{llllll} \text{se } l \in \mathbf{R} & \iff & \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b > 0 & \text{t.c.} & \forall\, x > b \text{ si ha} & |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{se } l = +\infty & \iff & \forall\, M > 0 \quad \exists\, b > 0 & \text{t.c.} & \forall\, x > b \text{ si ha} & f(x) > M \\ \text{se } l = -\infty & \iff & \forall\, M > 0 \quad \exists\, b > 0 & \text{t.c.} & \forall\, x > b \text{ si ha} & f(x) < -M\ . \end{array}$$

Analogamente definiamo i limiti per $x \to -\infty$.

<u>Definizioni.</u> - Sia $f : A \to \mathbf{R}$ con $(-\infty, d) \subset A$ per qualche d.

Definiamo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$

$$\begin{array}{llllll} \text{se } l \in \mathbf{R} & \iff & \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b < 0 & \text{t.c.} & \forall\, x < b \text{ si ha} & |f(x) - l| < \varepsilon \\ \text{se } l = +\infty & \iff & \forall\, M > 0 \quad \exists\, b < 0 & \text{t.c.} & \forall\, x < b \text{ si ha} & f(x) > M \\ \text{se } l = -\infty & \iff & \forall\, M > 0 \quad \exists\, b < 0 & \text{t.c.} & \forall\, x < b \text{ si ha} & f(x) < -M\ . \end{array}$$

Possiamo utilizzare una notazione che racchiuda tutti i nove limiti visti in questo paragrafo.

<u>Notazione.</u> - La notazione $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$, con $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ rappresenta, caso per caso, tutte le definizioni di limite viste in precedenza.

<u>Esempi.</u> - `Utilizzare la definizione di limite per verificare che`

i) $\lim\limits_{x\to x_0} c = c \quad \forall\, x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to x_0 \in \mathbf{R}} x = x_0$ **iii)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$ **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

[29]Elena Muselli

`Lasciamo al lettore la verifica di` $i)$ `e` $iii)$.

$ii)$ $\quad \lim_{x\to x_0\in\mathbf{R}} x = x_0\,.$ `Consideriamo` $f(x) = x$.

`Sia` $x_0 \in \mathbf{R}$ `si ha:` `dato` $\varepsilon > 0$ `poichè` $|f(x) - x_0| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \varepsilon$

`se consideriamo ad es.` $\delta = \varepsilon$ `(o` $\delta < \varepsilon$`)` `la definizione di limite è verificata.`

$iv)$ $\quad \lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty\,.$ `Consideriamo` $f(x) = x^2$.

`Sia` $x_0 = -\infty$ `si ha:` `dato` $M > 0$, `si ha` $f(x) > M \iff x^2 > M \iff (-\infty, -\sqrt{M}) \cup (\sqrt{M}, +\infty)$

`se consideriamo ad es.` $b = -\sqrt{M}$ `(o` $b < -\sqrt{M}$`)` `la definizione di limite è verificata.`

Osservazione 3.1 - Siano $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ ed f definita in un intorno bucato I_{x_0}. Si ha:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \qquad \iff \qquad \lim_{x\to x_0} (\, f(x) - l\,) = 0.$$

(Scrivere le due def.ni di limite ed osservare che sono uguali.)

Definizione di asintoto.

1. Se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty(-\infty)$ la retta $x = x_0$ è detta **asintoto verticale** (Analoga def.ne per $x \to x_0^-$);
2. Se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbf{R}$ la retta $y = l$ è detta **asintoto orizzontale** (Analoga def.ne per $x \to -\infty$).

3.2 - Teoremi sui limiti di funzioni.

Teorema 3.1(unicità del limite) - *Sia* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *esiste allora è unico.*

Teorema 3.2(legame tra limite, limite destro e limite sinistro) - *Sia* $x_0 \in \mathbf{R}$ *ed* $l \in \overline{\mathbf{R}}$. *Si ha:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \iff \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l\,.$$

Proposizione 3.1 - *Siano* $x_0, l \in \overline{\mathbf{R}}$ *ed* f *definita in un intorno bucato* I_{x_0}. *Si ha*

a) $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \iff \qquad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0.$

b) $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \qquad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|.$

Dimostrazione.. - Consideriamo il caso $x_0 \in \mathbf{R}$. Per verificare la a), basta osservare che:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\text{ t.c. }\; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \;\text{ si ha }\; |\,|f(x)|\,| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{perchè } |\,|f(x)|\,| = |f(x)|.$$

Dimostriamo la b) solo nel caso $l \in \mathbf{R}$. Avremo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\text{ t.c. }\; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \;\text{ si ha }\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

e dalla relazione 9) del Teor.1.1 pag. 4 segue che

$$|\,|f(x)| - |l|\,| \;\leq\; |f(x) - l| \;< \varepsilon \qquad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$$

da cui la tesi.

[30]Elena Muselli

Nei casi $x_0 = \pm\infty$ i ragionamenti sono analoghi; lasciamo al lettore di scrivere la dimostrazione in questi casi.

Per verificare, invece, che in b) l'implicazione opposta è falsa, basta considerare il controesempio seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ -x & x < 1 \end{cases} \quad : \quad \text{si ha} \quad \begin{array}{l} \lim_{x\to 1} |f(x)| = 1 \qquad \text{ma} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \ \text{ e } \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1 \quad \text{quindi} \quad \nexists \lim_{x\to 1} f(x). \end{array}$$

$\square$

Teorema 3.3 (permanenza del segno) - *Sia* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}\setminus\{0\}$ *allora esiste un intorno bucato* I_{x_0} *in cui* f *ha lo stesso segno di* l.

Dimostrazione.. - Diamo la dimostrazione solo nel caso $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $l \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.
Se $l > 0$ consideriamo $\varepsilon = \frac{l}{2}$; dalla definizione di limite avremo che $\exists\,\delta > 0$ t.c. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\}$ si ha

$$|f(x) - l| < \frac{l}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l - \frac{l}{2} < f(x) < l + \frac{l}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < \frac{l}{2} < f(x) < \frac{3\,l}{2}$$

da cui la tesi nel caso $l > 0$.
Se $l < 0$ consideriamo $\varepsilon = -\frac{l}{2}$ e, come prima, dalla definizione di limite otteniamo, in un intorno bucato,

$$|f(x) - l| < -\frac{l}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad l + \frac{l}{2} < f(x) < l - \frac{l}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{3\,l}{2} < f(x) < \frac{l}{2} < 0\,.$$

$\square$

Eventuali relazioni tra funzioni permettono di ottenere relazioni tra i limiti, quando questi esistono, come risulta dai teoremi seguenti:

Teorema 3.4 (del confronto) - *Siano* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *e* f, g *funzioni t.c.* $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in I_{x_0}$ *intorno bucato.*
Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbf{R}}$ *allora si ha* $l \leq m$.

Dimostrazione. - Diamo la dimostrazione nel caso in cui x_0 , l , $m \in \mathbf{R}$, osservando che negli altri casi si procede in modo analogo.
Sia $I_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)\setminus\{x_0\}$ e supponiamo, per assurdo, che sia $l > m$.
Considerando $\varepsilon = \dfrac{l-m}{2}$ (= alla metà della distanza tra l ed m), dalle definizioni di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e di $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ avremo

$$\exists \quad \delta_1 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\setminus\{x_0\} \quad \text{si ha} \quad l - \frac{l-m}{2} < f(x) < l + \frac{l-m}{2}$$

$$\exists \quad \delta_2 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)\setminus\{x_0\} \quad \text{si ha} \quad m - \frac{l-m}{2} < g(x) < m + \frac{l-m}{2}.$$

Se prendiamo $\delta < \min\{\delta_1\,,\,\delta_2\,,r\}$, allora, per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\}$ valgono entrambe le relazioni, da cui

$$g(x) < m + \frac{l-m}{2} \;=\; \frac{l+m}{2} \;=\; l - \frac{l-m}{2} < f(x)$$

che contraddice l'ipotesi.

$\square$

[31] Elena Muselli

Teorema 3.5 (del confronto bilatero o dei carabinieri) - *Siano* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *e* f, g, h *funzioni t.c.* $h(x) \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in I_{x_0}$ *intorno bucato.*
Se $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbf{R}$ *allora si ha* $\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$

Dimostrazione. - Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $I_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)\setminus\{x_0\}$.
Dalle definizioni di $\lim_{x\to x_0} h(x) = l = \lim_{x\to x_0} g(x)$, $l \in \mathbf{R}$, otteniamo che: dato $\varepsilon > 0$

$$\exists \ \delta_1 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)\setminus\{x_0\} \quad \text{si ha} \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$$

$$\exists \ \delta_2 > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)\setminus\{x_0\} \quad \text{si ha} \quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon.$$

Se prendiamo $\delta < \min\{\delta_1\,,\, \delta_2\,, r\}$, allora, per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\}$ valgono entrambe le relazioni ed, in particolare, utilizzando l'ipotesi avremo

$$l - \varepsilon \,<\, h(x) \,\le\, f(x) \,\le g(x) \,< l + \varepsilon$$

da cui la tesi.

Se $x_0 = \pm\infty$ si ragiona in modo analogo; si lascia al lettore il compito di scrivere la dimostrazione in questi casi.
□

Teorema 3.6 - *Siano* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$ *e* f, g *funzioni t.c.* $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in I_{x_0}$ *intorno bucato. Si ha*

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

b) $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

Dimostrazione. - Sia $x_0 \in \mathbf{R}$ ed $I_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)\setminus\{x_0\}$.
Per verificare la a), basta osservare che dalla definizione del limite di f avremo

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \text{ t.c. } \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\} \ \text{ si ha } \ f(x) > M$$

dove, con considerazioni viste nei teoremi precedenti, possiamo prendere $\delta < r$. Quindi, utilizzando l'ipotesi, avremo $M < f(x) \le g(x)$ da cui $g(x) > M$ cioè la tesi.

Analogamente per la b); dalla definizione del limite di g e da $f(x) \le g(x)$ otteniamo

$$\forall\, M > 0 \ \ \exists\, \delta > 0\,,\ \delta < r\,, \ \text{ t.c. } \ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\setminus\{x_0\} \ \text{ si ha } \ f(x) \le g(x) < -M\,.$$

Se $x_0 = \pm\infty$ si ragiona in modo analogo; si lascia al lettore il compito di scrivere la dimostrazione in questi casi.
□

Estensione calcolo in $\overline{\mathbf{R}}$. - Per comodità di calcolo definiamo

$a + (\pm\infty) = \pm\infty \quad \forall\, a \in \mathbf{R}$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$$a \neq 0\,, \quad a \cdot (\pm\infty) \;=\; \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$\dfrac{1}{\pm\infty} = 0 \qquad |\pm\infty| = +\infty$

Le forme $\quad +\infty - \infty\,, \quad 0 \cdot \pm\infty\,, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \quad \frac{0}{0} \quad$ sono dette *forme indeterminate.*

Dalle definizioni di limite e dai teoremi precedenti uniti ad alcune tecniche di calcolo, si ottiene il seguente teorema di cui dimostriamo solo il primo punto:

[32]Elena Muselli

<u>Teorema 3.7</u> (operazioni con i limiti) - *Sia* $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbf{R}}$. *Si ha:*

1) $\lim_{x\to x_0} (\, f(x) \,+\, g(x)\,) = l+m$ **tranne** *forme indet* $+\infty-\infty$, $-\infty+\infty$

2) $\lim_{x\to x_0} (\, f(x)\cdot g(x)\,) = l\cdot m$ **tranne** *forme indet.* $0\cdot\pm\infty$, $\pm\infty\cdot 0$

3) se $m\neq 0$: $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ **tranne** *forme indet.* $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

4) se $m=0$ e $g(x)$ ha segno costante in I_{x_0} : $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} l\cdot(+\infty) & g(x)>0 \\ l\cdot(-\infty) & g(x)<0 \end{cases}$ **tranne** *f. i.* $\dfrac{0}{0}$

5) n dispari $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } l=\pm\infty \\ \sqrt[n]{l} & \text{se } l\in\mathbf{R} \end{cases}$

n pari $(\, f(x)\geq 0$ in $I_{x_0}\,)$ $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l=+\infty \\ \sqrt[n]{l} & \text{se } l\geq 0 \;. \end{cases}$

Dimostrazione. - Diamo soltanto la dimostrazione di 1) nel caso in cui $x_0,\, l,\, m\in\mathbf{R}$.
Dato $\varepsilon>0$, consideriamo $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$; dalle definizioni di $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e di $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ abbiamo

$$\exists\;\; \delta_1>0 \quad \text{t.c.} \quad l-\varepsilon_1 < f(x) < l+\varepsilon_1 \qquad \forall\, x\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\backslash\{x_0\}$$

$$\exists\;\; \delta_2>0 \quad \text{t.c.} \quad m-\varepsilon_1 < g(x) < m+\varepsilon_1 \qquad \forall\, x\in(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)\backslash\{x_0\}\;.$$

Se prendiamo $\delta<\min\{\delta_1\,,\,\delta_2\}$, per ogni $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$ valgono entrambe le relazioni

$$l-\varepsilon_1 < f(x) < l+\varepsilon_1 \qquad\qquad m-\varepsilon_1 < g(x) < m+\varepsilon_1$$

che sommate membro a membro danno $l+m-\varepsilon = l+m-2\,\varepsilon_1 < f(x)+g(x) < l+m+2\,\varepsilon_1 = l+m+\varepsilon$ cioè la tesi.

□

<u>Notazioni.</u>

i) In bibliografia si trova la notazione $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty}$. Tale simbolo equivale a $\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} |\, f(x)\,| = +\infty}$.
Notiamo che esistono funzioni per le quali si ha: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ **ma** $\nexists\ \lim_{x\to x_0} f(x)$ come si verifica facilmente per la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$; infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty \qquad \text{ma} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{quindi} \qquad \nexists\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,.$$

ii) Se $f(x)\geq 0$ (opp. $f(x)\leq 0$) in un intorno bucato I_{x_0} e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, può essere utile la notazione $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0^+$ $(\,0^-\,)$.

<u>Teorema 3.8</u> - *Siano* $x_0\in\overline{\mathbf{R}}$, f e g *definite in* I_{x_0} *intorno bucato con* f *limitata in* I_{x_0}. *Allora*

a) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} (\, f(x)\, g(x)\,) = 0$

b) $\lim_{x\to x_0} g(x) = \underset{(-\infty)}{+\infty} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0} (\, f(x)+g(x)\,) = \underset{(-\infty)}{+\infty}$

[33] Elena Muselli

Dimostrazione.. - Per verificare la a) dimostriamo che $\lim_{x\to x_0} |\, f(x)\, g(x)\,| = 0$ (vedi prop.3.1 a)).
Poichè f è limitata, $\exists\ M > 0$ t.c. $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in I_{x_0}$ (vedi def. pag.9). Allora

$$0 \leq \ |\, f(x)\, g(x)\,| \quad = \quad |f(x)|\,|g(x)| \quad \leq \quad M\,|g(x)|$$

con $M\,|g(x)| \to 0$ per $x \to x_0$; dal Teor.3.5 otteniamo la a).

Per la b), poichè da f limitata si ha $N \leq f(x) \leq K$ per ogni $x \in I_{x_0}$ dove $N\,, K \in \mathbf{R}$ (vedi def. pag.9) da cui

$$N + g(x) \quad \leq \quad f(x) + g(x) \quad \leq \quad K + g(x)\,;$$

dai Teor.3.7 punto 1) e Teor.3.6 avremo

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (N + g(x)) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (K + g(x)) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$$

□

Per calcolare limiti di funzioni composte si utilizza il seguente teorema di cui è omessa la dimostrazione

__**Teorema 3.9**__ (cambiamento di variabile) - *Siano* $f : A \to \mathbf{R}\,,\ g : B \to \mathbf{R}$ *con* $f(A) \subset B$ *t.c.*

$\lim_{x\to x_0 \in \overline{\mathbf{R}}} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$ *e* $\lim_{y\to l} g(y) = m \in \overline{\mathbf{R}}$.
Allora, se $l \notin B$ *si ha* $\lim_{x\to x_0} g(\, f(x)\,) = m$.

__**Osservazione 3.2.**__ - La tesi del teor. precedente è equivalente a $\lim_{x\to x_0} g(\, f(x)\,) = \lim_{y\to l} g(y)$.
Da qui la denominazione "cambiamento di variabile"; infatti, il limite viene calcolato utilizzando una nuova variabile y legata alla x dalla relazione $y = f(x)$ ed osservando che se $x \to x_0$ allora $y \to l$.

Il teorema seguente lega la monotonia delle funzioni all'esistenza dei limiti. La dimostrazione è omessa.

__**Teorema 3.10**__ (limiti di funzioni monotone) - *Siano* $a\,, b \in \overline{\mathbf{R}}\,,\ a < b$ *ed* f *monotona in* (a, b); *allora*

$$\exists\ \lim_{x\to a^+} f(x) = l\ \in \overline{\mathbf{R}} \qquad \exists\ \lim_{x\to b^-} f(x) = m\ \in \overline{\mathbf{R}}\,.$$

Inoltre, se l *ed* $m \in \mathbf{R}$*, si ha*

$$l \leq\ f(x)\ \leq m \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \textit{se f crescente} \qquad\qquad m \leq\ f(x)\ \leq l \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \textit{se f decrescente.}$$

3.3 - Calcolo dei limiti di alcune funzioni.

- Sia $\alpha \neq 0$ e $x_0 > 0$. $\displaystyle\lim_{x\to x_0} x^{\alpha} = x_0^{\alpha}$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ +\infty & \alpha < 0; \end{cases}$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 0 & \alpha < 0. \end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \forall\ x_0 \in \mathbf{R} \quad ; \qquad \nexists \lim_{x\to \pm\infty} \sin x$.

  Verifica: se $x_0 \in \mathbf{R}$, per la prop.3.1 a), basta verificare che $\lim_{x\to x_0} |\,\sin x - \sin x_0\,| = 0$. Dalle formule di prostaferesi (pag.19), dal Teor.2.3 pag. 20 e dalla limitatezza del coseno ($|\,\cos(\frac{x+x_0}{2})\,| \leq 1$) si ottiene:

  $0\ \leq\ |\,\sin x - \sin x_0\,|\ =\ 2\,|\,\sin(\frac{x-x_0}{2})\,|\,|\,\cos(\frac{x+x_0}{2})\,|\ \leq 2\,|\frac{x-x_0}{2}|\ =\ |x - x_0|$ e per il teorema del confronto bilatero si ha la tesi.

[34]Elena Muselli

Omettiamo la verifica del limite a $\pm\infty$ la cui non esistenza dipende dalla periodicità della funzione seno.

In modo del tutto analogo si ottiene:

- $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbf{R} \quad ; \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$.

- $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0 \quad \forall\, x_0 \in dom\, tan\ ; \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\,\pi)^-} \tan x = +\infty \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\,\pi)^+} \tan x = -\infty$.

  Verifica: basta osservare che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ed applicare il Teor.3.7 punti 3) e 4).

  Dei seguenti limiti ne omettiamo la verifica:

- $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0 \quad \forall x_0 \in [-1,1]; \qquad \lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0 \quad \forall x_0 \in [-1,1];$

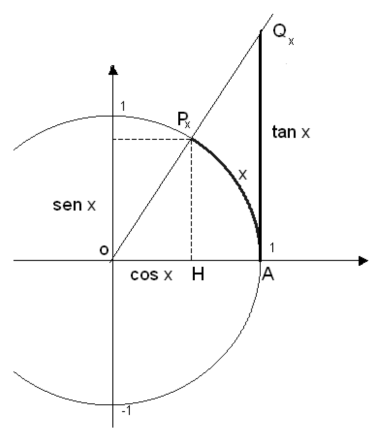
- $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}; \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}; \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$

- $\displaystyle \lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}; \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases} \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 0 & 0<a<1 \end{cases}$.

- $\displaystyle \lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 > 0; \qquad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & a>1 \\ +\infty & 0<a<1 \end{cases} ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ -\infty & 0<a<1 \end{cases}$

3.4 - Limiti notevoli.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\ ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1\ ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^n x}{x^n} = 1\ , \quad n \in \mathbf{N}^+$.



Verifica: se $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ da considerazioni geometriche si ha

$0 < \sin x < x < \tan x$ da cui $\displaystyle 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$;

se $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ dalla precedente si ottiene $\displaystyle 1 < \frac{-x}{\sin(-x)} < \frac{1}{\cos(-x)}$;

allora, la relazione $\displaystyle 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ vale $\forall\, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\backslash\{0\}$

e si conclude per il teorema della compressione.

il secondo limite si ottiene dal primo osservando che $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1$;
mentre per il terzo si ha $\frac{\sin^n x}{x^n} = \frac{\sin x}{x} \cdots \frac{\sin x}{x}$ n volte.

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Verifica: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2}$.

[35] Elena Muselli

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1\ ;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$$ *Verifica*: omessa.

- $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\ ;\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ .$$ *Verifica* omessa.

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\ ;\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\log_a x}{x-1}=\log_a e\ ;\qquad a>0\ ,\quad a\neq 1\ .$$

Verifica: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$ perchè $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ per $x\to 0$. Il secondo si ottiene con il camb.to di var.le $y=x-1$: $\lim_{x\to 1}\frac{\log_a(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y} = \log_a e$.

- $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ ;\qquad a>0\ ,\quad a\neq 1\ .$$

Verifica: si ottiene con il camb. di var. $y=a^x-1$, da cui $x=\log_a(y+1)$ e $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(y+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$ (perchè $\log_a e\cdot\log_e a = 1$ vedi proprietà 6. pag 16).

La verifica dei limiti seguenti è omessa.

- Se $a>1$ ed $\alpha>0$ si ha: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=+\infty \quad\text{e}\quad \lim_{x\to-\infty}(-x)^\alpha a^x=0$$

- Se $a>0\,,\ a\neq 1$ ed $\alpha>0$ si ha: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=0 \quad\text{e}\quad \lim_{x\to 0^+}(x)^\alpha\log_a x=0\ .$$

3.5 - Esempi. *Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti forme indeterminate:*

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2}$$ f.i. $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2} = \lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2}\,\frac{1+\sqrt{x^2-3}}{1+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to 2}\frac{1-x^2+3}{(2x-x^2)(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x(2-x)(1+\sqrt{x^2-3})} =$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{x(2-x)(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim_{x\to 2}\frac{2+x}{x(1+\sqrt{x^2-3})} = 1$$

2. $$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2x-x^2|}$$ f.i. $\frac{0}{0}$.

Osserviamo che il binomio $2x-x^2$ è positivo per $0<x<2$; ne segue che $2x-x^2$ cambia segno in un intorno del punto $x_0=2$ e quindi per esplicitare il modulo dobbiamo dividere il limite in limite destro e limite sinistro e si ha:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2x-x^2|} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{-2x+x^2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{-2x+x^2}\,\frac{1+\sqrt{x^2-3}}{1+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{1-x^2+3}{(-2x+x^2)(1+\sqrt{x^2-3})} =$$
$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(2-x)(2+x)}{x(x-2)(1+\sqrt{x^2-3})} = \lim_{x\to 2^+}\frac{-(2+x)}{x(1+\sqrt{x^2-3})} = -1\ ;$$

inoltre, per il limite sinistro, con conti analoghi ai precedenti si ottiene

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2x-x^2|} = \lim_{x\to 2^-}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{2x-x^2} = \cdots = 1$$

Si conclude che $\nexists\ \lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{x^2-3}}{|2x-x^2|}$ perchè il limite destro è diverso dal limite sinistro.

[36] Elena Muselli

3. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{4x^2-3})$ f.i. $+\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2-3}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})} - \sqrt{x^2(4-\frac{3}{x^2})}\right) = \lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}\right) = +\infty\cdot(-1) = -\infty$$

4. $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2-3})$ f.i. $+\infty-\infty$.

Poichè, con passaggi analoghi all'es 3, $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-3}) = \lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)$ f.i. $+\infty\cdot 0$,

procediamo nel modo seguente:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-3}) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-3})\,\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2+3}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\,(-1+\frac{3}{x})}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\,(-1+\frac{3}{x})}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

perchè $|x|=x$ in un intorno opportuno di $+\infty$.

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{2x}$ f.i. $\frac{0}{0}$. Cerchiamo di utilizzare il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\,\frac{x^2+x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\,\frac{x+1}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

infatti, posto $y = x^2+x$ si ha $y\to 0$ per $x\to 0$ e quindi dal Teorema 3.9 del cambiamento di variabile si ottiene $\frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x}\to 1$ per $x\to 0$ perchè $\frac{\sin y}{y}\to 1$ per $y\to 0$.

6. $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-x^2)}{e^{\sqrt{x}}-1}$ f.i. $\frac{0}{0}$. Come nel limite precedente, cerchiamo di ricondurci a limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-x^2)}{e^{\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-x^2)}{-x^2}\,(-x^2)\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-x^2)}{-x^2}\,\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\,(-x\sqrt{x}) = 1\cdot 1\cdot 0 = 0$$

infatti:

posto $y=-x^2\to 0$ per $x\to 0$ si ottiene $\frac{\log(1-x^2)}{-x^2}\to 1$ dal limite notevole $\frac{\log(1+y)}{y}\to 1$ per $y\to 0$

posto $t=\sqrt{x}\to 0$ per $x\to 0^+$ si ottiene $\frac{\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1}\to 1$ dal limite notevole $\frac{t}{e^t-1}\to 1$ per $t\to 0$.

3.6 - Funzioni $h(x) = f(x)^{g(x)}$ e forme indeterminate: $1^\infty, 0^0, +\infty^0$.

Definiamo $dom\,h := \{x\in dom\,g \text{ t.c. } f(x)>0\}$. Ovviamente si ha $h(x)>0\ \forall\, x\in dom\,h$.

Possiamo riscrivere h nella forma $h(x) = e^{\ln(h(x))} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Allora, per calcolare $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbf{R}}} f(x)^{g(x)}$ basta saper calcolare $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbf{R}}} g(x)\ln(f(x))$ e poi si conclude utilizzando i limiti della funzione esponenziale.

Diremo che $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbf{R}}} f(x)^{g(x)}$ è forma indeterminata se lo è il $\lim_{x\to x_0\in\overline{\mathbf{R}}} g(x)\ln(f(x))$. Avremo quindi che

- $\mathbf{1^\infty}$ è forma indet.; infatti se $f(x)\to 1$ e $g(x)\to\infty$ abbiamo $g(x)\ln(f(x))$ f.i. $\infty\cdot 0$
- $\mathbf{0^0}$ è forma indet.; infatti se $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$ abbiamo $g(x)\ln(f(x))$ f.i. $0\cdot(-\infty)$
- $\mathbf{+\infty^0}$ è forma indet.; infatti se $f(x)\to+\infty$ e $g(x)\to 0$ abbiamo $g(x)\ln(f(x))$ f.i. $0\cdot(+\infty)$.

[37] Elena Muselli

CAPITOLO 4

4.1 - Successioni: definizioni e prime proprietà.

Definizione. - Una funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ è detta **successione.** Denotiamo

$a_n := f(n)$ **termine n-esimo della successione** n è detto **indice**

$f(\mathbf{N}) := \{a_n : n \in \mathbf{N}\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ **l'immagine della successione**.

Esempi. - Esempi di successioni sono:

$$a_n = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots\}; \qquad a_n = \sqrt{n} \Leftrightarrow \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots\};$$

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \Leftrightarrow \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \cdots, \frac{n}{n^2+1}, \cdots\}; \qquad a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \Leftrightarrow \{2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \cdots\}.$$

Osservazione 4.1 - Parleremo ancora di successione anche nel caso in cui non siano definiti i termini a_n per un numero finito di indici.

Esempi. - Sono successioni anche le seguenti:

$$a_n = \frac{1}{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}\backslash\{1\}, \quad \Leftrightarrow \{-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n-1}, \cdots\};$$

$$a_n = \sqrt{n-7}, \quad n \in \mathbf{N} \ n \geq 7, \quad \Leftrightarrow \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n-7}, \cdots\};$$

Osservazione 4.2 - Alcune successioni sono restrizioni ad $\mathbf{N}$ (o a sottoinsiemi di $\mathbf{N}$) di funzioni di variabile reale, ad esempio:

$a_n = \dfrac{1}{n}$ può essere considerata come la restrizione $f_{/\mathbf{N}^+}$ di $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

$a_n = \sqrt{n-7}$ può essere considerata come la restrizione $f_{/\{n \in \mathbf{N} : n \geq 7\}}$ di $f(x) = \sqrt{x-7}$.

Ci sono, però, successioni nelle quali non si può sostituire al posto della variabile $n \in \mathbf{N}$ una variabile $x \in \mathbf{R}$; ad esempio:

$a_n = n!$ (dove $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$) ; $a_n = (-1)^n$.

Se data una successione $\{a_n\}$ ne scegliamo (estraiamo) infiniti termini otteniamo ancora una successione. Se la scelta è fatta in modo str. crescente rispetto all'indice, abbiamo la seguente definizione.

Definizione. - Se da una successione $\{a_n\}$ estraiamo infiniti termini in modo *str. crescente rispetto all'indice* la successione ottenuta è detta **estratta** o **sottosuccessione** di $\{a_n\}$.

[Notiamo che: estrarre i termini in modo str. crescente rispetto all'indice equivale a scegliere ogni termine tra i "successivi" di quelli già scelti.]

Esempio. - Data la successione $\{a_n\}$ consideriamo le due successioni:

$$\{a_3, a_1, a_7, a_5, a_{11}, a_9, a_{15}, a_{13}, \cdots\} \qquad \{a_1, a_4, a_9, a_{16}, \cdots, a_{n^2}, \cdots\}$$

solo la seconda è sottosuccessione di $\{a_n\}$.

Due sottosuccessioni importanti sono:

$\{a_0, a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots\}$ **estratta pari** $\{a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2n+1}, \cdots\}$ **estratta dispari**.

[38] Elena Muselli

Esempio. -

Se $a_n = (-1)^n 3^n$ si ha: $a_{2n} = 3^{2n}$ estratta pari e $a_{2n+1} = -3^{2n+1}$ estratta dispari.

Definizioni. - Data una successione $\{a_n\}$ diremo che:

1. - $\{a_n\}$ **verifica una proprietà** P se " a_n *verifica* P *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ ";
   es. $a_n = n^2$: $a_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbf{N}$;

2. - $\{a_n\}$ **verifica definitivamente una proprietà** P se "$\exists\ \bar{n}$ *(indice) t.c.* a_n *verifica* P *per ogni* $n > \bar{n}$"; cioè i termini sottolineati $\{a_0\,,\, a_1\,,\, a_2\,,\, \cdots\,,\, a_{\bar{n}}\,,\, \underline{a_{\bar{n}+1}\,,\, \cdots\,,\, a_n\,,\, \cdots}\}$ verificano P;
   es. $a_n = n^2 - 50$: $a_n > 0$ definitivamente, perchè $a_n > 0 \ \forall\, n \geq 8$ ($\bar{n} = 7$).

Poichè le successioni sono funzioni (definite su $\mathbf{N}$), le definizioni e le proprietà viste per le funzioni valgono, quindi, per le successioni.
La particolarità del dominio può semplificare, a volte, le definizioni viste.
Riscriviamo le definizioni di limitatezza e di monotonia nel caso di una successione. Tali definizioni, utilizzando la particolarità del dominio, diventano:

Definizioni. - Data una successione $\{a_n\}$ si ha:

1. - $\{a_n\}$ è **limitata** se $\exists \ N\,,\, K \in \mathbf{R}$ t.c. $N \leq a_n \leq K \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$
   o equiv.te
   se $\exists \ M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$.
2. - $\{a_n\}$ è **crescente** (**str. crescente**) se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbf{N}$ ($a_n < a_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbf{N}$).
3. - $\{a_n\}$ è **decrescente** (**str. decrescente**) se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbf{N}$ ($a_n > a_{n+1} \quad \forall \ n \in \mathbf{N}$).

Esempi. - Data la particolarità del dominio, può essere semplice verificare la monotonia di alcune successioni applicando la definizione precedente.

- *Determinare se* $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$ *è monotona.*

  Osservando che il denominatore cresce in modo più rapido del numeratore, proviamo a verificare se a_n è decrescente; avremo

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} \iff \frac{(n+1)\,(n^2+2\,n+2)}{(n^2+1)\,(n^2+2\,n+2)} \geq \frac{(n+2)\,(n^2+1)}{(n^2+1)\,(n^2+2\,n+2)} \iff$$

$$\iff \text{(essendo i denominatori } > 0\text{)} \ (n+1)\,(n^2+2\,n+2) \geq (n+2)\,(n^2+1) \iff$$

$$\iff n^2 + 3\,n \geq 0$$

  che è sempre verificata $\forall \ n \in \mathbf{N}$.
  Quindi $\boldsymbol{a_n}$ **è decrescente**.

- *Determinare se* $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}$ *è monotona.*

  Provando a verificare se la succ.ne è decrescente, avremo

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} \geq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} \iff \frac{\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}+2)}{(\sqrt{n}+2)\,(\sqrt{n+1}+2)} \geq \frac{\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n}+2)}{(\sqrt{n}+2)\,(\sqrt{n+1}+2)} \iff$$

$$\iff \text{(essendo i denom.} > 0\text{)} \ 2\,\sqrt{n} \geq 2\,\sqrt{n+1} \iff n \geq n+1 \text{ mai verificata.}$$

  Quindi $\boldsymbol{a_n < a_{n+1} \ \forall \ n \in \mathbf{N}}$ da cui $\boldsymbol{a_n}$ **è str. crescente**.

[39] Elena Muselli

4.2 - Successioni: limiti e proprietà.

Essendo $\{a_n\}$ una funzione con dominio $\mathbf{N}$, vediamo quali definizioni di limite, viste per le funzioni, hanno senso ed in tal caso come si possono riscrivere utilizzando le particolarità del dominio, cioè le particolarità di $\mathbf{N}$.

Osserviamo, innanzi tutto, che preso un punto n_0 del dominio $\mathbf{N}$, nell'intorno bucato $(n_0 - \frac{1}{2}, n_0 + \frac{1}{2}) \setminus \{n_0\}$ non ci sono punti del domino $\mathbf{N}$ e quindi **non ha senso** calcolare $\boldsymbol{\lim_{n \to n_0} a_n}$ **con** $\boldsymbol{n_0 \in \mathbf{N}}$.

Consideriamo intorno di $+\infty$ in $\mathbf{N}$ l'insieme $(b, +\infty) \cap \mathbf{N}$, $b > 0$; avremo che

$$\text{dato} \quad b > 0 \qquad \exists\, \bar{n} \in \mathbf{N} \ \text{t.c.} \qquad (b, +\infty) \cap \mathbf{N} \ = \ \{n \in \mathbf{N} \ : \ n > \bar{n}\}.$$

Definiamo allora: **intorno di $+\infty$ in $\mathbf{N}$** un insieme del tipo $\boldsymbol{\{n \in \mathbf{N} \ : \ n > \bar{n}\}}$.

L'unico limite che si può, quindi, calcolare **per una successione** è il $\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} a_n}$.

In analogia alle definizioni di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$, tenendo conto della nozione di intorno precedente, otteniamo le definizioni seguenti.

<u>Definizione.</u> - Data $\{a_n\}$ successione definiamo:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbf{R}}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{se} \ \ l \in \mathbf{R} & \iff & \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbf{N} \ \ \text{t.c.} \ \ \forall\, n > \bar{n} \ \text{ si ha} & |a_n - l| < \varepsilon \\
\text{se} \ \ l = +\infty & \iff & \forall\, M > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbf{N} \ \ \text{t.c.} \ \ \forall\, n > \bar{n} \ \text{ si ha} & a_n > M \\
\text{se} \ \ l = -\infty & \iff & \forall\, M > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbf{N} \ \ \text{t.c.} \ \ \forall\, n > \bar{n} \ \text{ si ha} & a_n < -M \ .
\end{array}$$

I due teoremi seguenti, di cui omettiamo la dimostrazione, mettono in relazione il limite di una successione con i limiti delle sue estratte.

<u>Teorema 4.1</u> - *Se* $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbf{R}}$, *ogni sottosuccessione di* $\{a_n\}$ *ha limite uguale ad* l.

<u>Teorema 4.2</u> - *Siano* $a_{2\,n}$ *e* $a_{2\,n+1}$ *l'estratta pari e l'estratta dispari di una successione* a_n. *Se* $a_{2\,n} \to l \in \overline{\mathbf{R}}$ *e* $a_{2\,n+1} \to m \in \overline{\mathbf{R}}$, *allora*

$$\exists \quad \lim_{n \to +\infty} a_n \quad \iff \quad m = l \qquad \textit{e si ha} \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = l.$$

Il seguente teorema indica come utilizzare limiti di funzioni con variabile in $\mathbf{R}$ per calcolare limiti di successioni. La dimostrazione, che discende in modo ovvio dalle definizioni di limite, è omessa.

<u>Teorema 4.3</u> - *Sia* $f : A \to \mathbf{R}$ *con* $\mathbf{N} \subset A$ *t.c.* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$. *Se* $a_n = f(n)$ *si ha*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbf{R}}.$$

<u>Esempi.</u> *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successioni:*

1. $$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} \ - \ \sqrt{n^2 - 1}\right)} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2\,(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})} - \sqrt{n^2\,(1 - \frac{1}{n^2})}\right) = \lim_{n \to +\infty} n \left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) = -\infty\,.$$

2. $$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} n^2 \, \sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \, \frac{1}{n}\, n^2 \ = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\, n \ = +\infty$$

   dal limite $\frac{\sin y}{y} \to 1$ per $y \to 0$ e cambiamento di variabile $y = \frac{1}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$.

[40]Elena Muselli

3. $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$: n *pari* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, n *dispari* $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{n+1}{n} = -1$ quindi $\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$.

4. $\lim_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{(-1)^n}{n})$: n *pari* $\lim_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{n}) = 1$, n *dispari* $\lim_{n\to+\infty} (1 - \dfrac{1}{n}) = 1$ allora $\lim_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{(-1)^n}{n}) = 1$.

5. $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n} = 0$ (dal limite pag 36 si ottiene $\lim_{x\to+\infty} (x)^2 e^{-x} = 0$ e si conclude per il Teor.4.3).

4.3 - Limiti notevoli di successioni.

- $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$ *Verifica*: da $n! \geq n$ si conclude per il Teor.3.6 pag 32.
- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *Verifica*: si ha $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to e^0 = 1$ (da $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ e Teor.4.3).
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$ $a > 1$ e $\alpha > 0$ (*Verifica*:dallo stesso limite con variabile $x \in \mathbf{R}$).
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ $a > 1$ (*Verifica* omessa)
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ (*Verifica* omessa)

4.4 - Proprietà legate a limiti di successioni.

Osservazione 4.3 - Poichè le successioni sono funzioni, valgono ancora tutti i teoremi sui limiti visti per le funzioni. A titolo d'esempio riscriviamo il *teorema della permanenza del segno* utilizzando le proprietà del dominio $\mathbf{N}$.

Teorema 4.4 (della permanenza del segno) - *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbf{R}}\setminus\{0\}$, *allora* $\exists\, \bar{n} \in \mathbf{N}$ *t.c.* a_n *ha lo stesso segno di* l $\forall\, n > \bar{n}$.

[cioè a_n ha definitivamente il segno di l.]

I teoremi seguenti riguardano la limitatezza di successioni. La dimostrazione del secondo è omessa.

Teorema 4.5 - *Se una successione* $\{a_n\}$ *ammette limite reale allora tale successione è limitata. Non è vero il viceversa.*

Dimostrazione. - Sia $\varepsilon = 1$. Dalla definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbf{R}$, esiste $\bar{n} \in \mathbf{N}$ t.c.

$$l - 1 < a_n < l + 1 \quad \forall\, n > \bar{n}.$$

Allora, se $N = \min\{a_0\,, a_1\,, a_2\,, \cdots, a_{\bar{n}}\,, l-1\}$ e $K = \max\{a_0\,, a_1\,, a_2\,, \cdots, a_{\bar{n}}\,, l+1\}$ si ha

$$N \leq a_n \leq K \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$$

Quindi $\{a_n\}$ è limitata.

[41]Elena Muselli

Per verificare che il viceversa non sempre è vero, basta considerare $a_n = (-1)^n$ che risulta limitata essendo $|a_n| = |(-1)^n| = 1 \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$ ma che non ammette limite (per il Teor.4.2) perchè

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2\,n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2\,n+1} = -1\,.$$

□

Teorema 4.6 (proprietà delle successioni monotone) - *Se* $\{a_n\}$ *è monotona, allora esiste* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *e:*

a) *se* $\{a_n\}$ *è crescente (str. crescente)* $\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ *e* $a_0 = \min\{a_n\}$.

b) *se* $\{a_n\}$ *è decrescente (str. decrescente)* $\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n\}$ *e* $a_0 = \max\{a_n\}$.

Esempi. - *Per le due successioni seguenti, dopo aver determinato se* $\{a_n\}$ *è monotona, calcolarne il limite ed indicare* $sup\{a_n\}$, $inf\{a_n\}$, $max\{a_n\}$ *e* $min\{a_n\}$ *, se esistono.*

1. $\boldsymbol{a_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}}$.

   Determiniamo la monotonia di $\{a_n\}$ utilizzando la definizione e, come a pag 39, avremo

$$a_n \geq a_{n+1} \iff \frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} \iff \cdots \iff n^2 + 3\,n \geq 0$$

   che è sempre verificata $\forall\, n \in \mathbf{N}$ quindi $\boldsymbol{a_n}$ **è decrescente**. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,(1+\frac{1}{n})}{n\,(n+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 0;$$

   dal Teorema 4.6 segue che

$$\max\{a_n\} = a_0 = 1\,, \qquad \inf\{a_n\} = \lim_{n\to+\infty}\{a_n\} = 0 \qquad \text{e} \quad \nexists\, \min\{a_n\} \text{ perchè } 0 \notin \{a_n\};$$

   per l'ultima affermazione si veda proposizione 1.1 pag 6 e si noti che $0 = \frac{n+1}{n^2+1}$ non ha soluzioni in $\mathbf{N}$.

2. $\boldsymbol{a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2}}$.

   Determiniamo la monotonia di $\{a_n\}$ utilizzando la definizione e, come a pag 39, avremo

$$a_n \leq a_{n+1} \iff \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+2} \iff \cdots \iff n \leq n+1$$

   che è sempre verificata $\forall\, n \in \mathbf{N}$ quindi $\boldsymbol{a_n}$ **è crescente**. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1$$

   dal Teorema 4.6 segue che

$$\min\{a_n\} = a_0 = 0\,, \qquad \sup\{a_n\} = \lim_{n\to+\infty}\{a_n\} = 1 \qquad \text{e} \quad \nexists\, \max\{a_n\} \text{ perchè } 1 \notin \{a_n\};$$

   infatti $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2} = 1 \iff \sqrt{n} = \sqrt{n}+2 \iff 0 = 2$ che è impossibile.

[42]Elena Muselli

CAPITOLO 5

5.1 - Continuità.

Definizione. - Sia $f : A \to \mathbf{R}$ ed $x_0 \in A$. Diremo che f è *continua* in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè se $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

La funzione f è detta *continua* se è continua in ogni punto del dominio. Per indicare che una funzione f è continua su un insieme A si usa la notazione $\boldsymbol{f \in C(A)}$.

Esempio. - Sia $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Si ha $dom f : x \neq 0$ e $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ $\forall\, x_0 \in \mathbf{R} \backslash \{0\}$. Quindi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è continua.

Osservazione 5.1. - Dai limiti visti nel paragrafo precedente segue che le funzioni

$$|x|\ ; \qquad x^n,\ n \in \mathbf{N}^+\ ; \qquad \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbf{N}^+\ ; \qquad \frac{1}{x}\ ; \qquad \sin x\ ; \qquad \cos x\ ; \qquad \tan x\ ;$$

$$a^x,\ a > 0\ \ a \neq 1\ ; \qquad \log_a x,\ a > 0\ \ a \neq 1\ ; \qquad \arctan x\ ; \qquad \arcsin x\ ; \qquad \arccos x\ .$$

sono tutte continue (ovviamente nel loro dominio), mentre la funzione:

$\boldsymbol{f(x) = [x]}$ **non è continua** nei punti $\boldsymbol{x_0 \in \mathbf{Z}}$ $\qquad (\nexists \displaystyle\lim_{x \to x_0} [x]$ essendo $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1$ e $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0)$

Teorema 5.1 - *Siano f e g funzioni continue in x_0. Allora si ha*

1. $f + g$ *è continua in* x_0. $\qquad$ (*Infatti* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (\, f(x) + g(x)\,) = f(x_0) + g(x_0)$)
2. $f \cdot g$ *è continua in* x_0. $\qquad$ (*Infatti* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (\, f(x) \cdot g(x)\,) = f(x_0) \cdot g(x_0)$)
3. $\dfrac{f}{g}$ *è continua in* x_0 *se* $g(x_0) \neq 0$. $\qquad$ (*Infatti* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (\, \frac{f(x)}{g(x)}\,) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$).

La dimostrazione del teorema seguente è omessa

Teorema 5.2 (cambiamento di variabile con g continua) - *Siano* $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ *con* $f(A) \subset B$ *t.c.* $\displaystyle\lim_{x \to x_0 \in \overline{\mathbf{R}}} f(x) = l \in \mathbf{R}$ *e* $\displaystyle\lim_{y \to l} g(y) = m \in \mathbf{R}$.
Allora, se g *è continua si ha* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(\, f(x)\,) = m$.

Dal teorema precedente discende in modo ovvio il seguente:

Teorema 5.3 - (continuità della funzione composta) *Siano* $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ *entrambe continue con* $f(A) \subset B$. *Allora la funzione composta* $g \circ f : A \to \mathbf{R}$ *è continua.*

Definizioni. - **Discontinuità.** Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$. Diremo che f ha in x_0 una

a) *discontinuità eliminabile* se: $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbf{R}$ ma $l \neq f(x_0)$;

b) *discontinuità di prima specie* se: $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbf{R}$ $\quad \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \in \mathbf{R}$ $\quad$ con $\quad l_1 \neq l_2$;

c) *discontinuità di seconda specie*: in tutti gli altri casi.

[43]Elena Muselli

5.2 - Teoremi sulle funzioni continue.

Le dimostrazioni dei tre teoremi seguenti sono omesse.

Teorema 5.4 **(teorema degli zeri)** - *Sia* f *continua su* $[a,b]$ *con* $f(a)\cdot f(b)<0$ *. Allora* $\exists\, x_0\in(a,b)$ *t.c.* $f(x_0)=0$.

Notazioni. - La notazione $f(a)\cdot f(b)<0$ significa che f ha segno discorde negli estremi $a\,,b$.
I punti in cui una funzione f si annulla sono detti gli "*zeri di* f".

Teorema 5.5 **(teorema di Weierstrass)** - *Sia* f *continua in* $[a,b]$*. Allora* f *ha massimo e minimo in* $[a,b]$*, cioè* $\exists\, x_0\,,\, x_1\in[a,b]$ *t.c.* $f(x_1)\le f(x)\le f(x_0)\ \ \forall\, x\in[a,b]$.

Notazioni. - La tesi del teorema di Weierstrass si può anche scrivere: $\exists\, x_0\,,\, x_1\in[a,b]$ t.c.
$f(x_1)=\min f(\,[a,b]\,)$ $\qquad f(x_0)=\max f(\,[a,b]\,)$.

Osservazione 5.2 - Verifichiamo, con tre esempi, l'importanza delle tre ipotesi del teorema di Weierstrass: **continuità** della funzione **- intervallo chiuso - intervallo limitato**. Se una delle tre viene a mancare non è più garantita la validità della tesi.

- **Esempio 1. -**

  Sia $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in(-1,1) \\ 1 & x=\pm1 \end{cases}$; $\quad f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ **non è continua** in $x=\pm1$ perchè: $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=0\neq f(-1)=1$ e $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=2\neq f(1)=1$.

  Si ha: $Im\, f=f([-1,1])=(0,2)$; quindi $\nexists$ nè valore massimo nè valore minimo per la f e quindi la funzione non ammette nè massimo nè minimo.

- **Esempio 2. -**
  Sia $f(x)=x+1$ con $x\in(-1,1)$; $\qquad f$ è continua su $(-1,1)$ **intervallo aperto**.

  Si ha: $Im\, f=f((-1,1))=(0,2)$ e, come prima, la funzione non ammette nè massimo nè minimo.

- **Esempio 3. -**
  Sia $f(x)=x+1$ con $x\in[-1,+\infty)$; $\qquad f$ è continua su $[-1,+\infty)$ **intervallo non limitato**.

  Si ha: $Im\, f=f([-1,+\infty))=[0,+\infty)$ che non è superiormente limitato e quindi $\nexists$ un valore massimo per la f. Si ha: $Im\, f=f([-1,+\infty))=[0,+\infty)$ che non è superiormente limitato e quindi $\nexists$ un valore massimo per la f.

Osservazione 5.3 - Osserviamo però, che dagli esempi precedenti non si deve dedurre che **se manca un'ipotesi** allora la tesi non è vera, ma soltanto che **la tesi non è garantita**, cioè ci possono essere funzioni che, pur non verificando nessuna delle tre ipotesi, ammettono sia massimo che minimo, come si vede dall'esempio seguente:

- **Esempio 4. -**

  Sia $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in[0,2] \\ 2 & -1<x<0 \text{ e } x>2 \end{cases}$; $\quad f:(-1,+\infty)\to\mathbf{R}$ **non è continua** in $x=0$ e $x=2$ perchè $\nexists \lim\limits_{x\to0} f(x)$ e $\nexists \lim\limits_{x\to2} f(x)$ $\quad$ (proposto).

  Si ha: $Im\, f=f((-1,+\infty))=[1,3]$; quindi $\max\,(Im\, f)=3 \ \Rightarrow x=2$ punto di massimo per f, mentre $\min\,(Im\, f)=1 \ \Rightarrow x=0$ punto di minimo per f.
  Osserviamo che nessuna delle tre ipotesi del teorema di Weierstrass è verificata.

[44] Elena Muselli

Teorema 5.6 (**teorema dei valori intermedi**) - *Sia* f *continua in* $[a,b]$. *Allora, se denotiamo* $m = \min f([a,b])$ *e* $M = \max f([a,b])$, *si ha* $f([a,b]) = [m, M]$.

Osservazione 5.4 - Il teorema dei valori intermedi afferma che, se f è continua, l'immagine di un intervallo chiuso e limitato è ancora un intervallo chiuso e limitato.

Esempi. -

1. *Determinare il dominio delle due funzioni seguenti e dire se sono continue:*

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{|x^3-1|})}{x^2}$.

Si ha $dom\, f = \begin{cases} \sqrt{|x^3-1|} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} = \{x \neq 0\,,\, x \neq 1\}$ ed f è continua perchè composta e rapporto di funzioni continue ($\ln$, $\sqrt{\ }$, x^2 ,etc sono tutte continue nel loro dominio).

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & (-\infty, 0] \\ e^{-x} & (0, +\infty) \end{cases}$. Si ha $dom\, f = \mathbf{R}$. Per $x < 0$ o $x > 0$ f è continua perchè somma di funzioni continue.

Per $x = 0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ quindi f non è continua in $x = 0$ perchè $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ (Teor.3.2 pag.30).

2. *Sia* $f(x) = \begin{cases} 2x + a & (-\infty, 0] \\ x^2 + e^x & (0, +\infty) \end{cases}$. *Dire, se esistono, valori di* $a \in \mathbf{R}$ *per i quali* f *sia continua.*

Si ha $dom\, f = \mathbf{R}$. Per $x<0$ o $x>0$ f è continua perchè somma di funzioni continue.
Per $x = 0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a = f(0)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
Allora, perchè f sia continua anche in $x_0 = 0$, deve essere $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ cioè $a = 1$.
Quindi, per $a \neq 1$ la f è continua solo su $x \neq 0$, mentre per $a = 1$ è continua su $\mathbf{R}$.

3. *Date* $f(x) = \dfrac{\sin^2(2x)}{x^2}$ *e* $g(x) = \dfrac{\sin^2(2x)}{x^3}$ *dire se sono prolungabili per continuità a tutto* $\mathbf{R}$.

Si ha $dom\, f = \{x \neq 0\}$ ed f è continua perchè rapporto di funzioni continue.

Calcoliamo il $\lim_{x\to 0} f(x)$; si ha $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \dfrac{4x^2}{x^2} = 4$

dal limite $\frac{\sin^2 y}{y^2} \to 1$ per $y \to 0$ e cambiamento di variabile $y = 2x \to 0$ per $x \to 0$.

Ne segue che f è prolungabile per continuità a tutto $\mathbf{R}$, ed il prolungamento continuo è:

$\tilde{f} = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(2x)}{x^2} & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$.

Per la g si ha: $dom\, g = \{x \neq 0\}$ e g continua perchè rapporto di funzioni continue.

Calcoliamo il $\lim_{x\to 0} g(x)$; si ha $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \dfrac{4x^2}{x^3}$ che $\nexists$

perchè $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \dfrac{4}{x} = 1 \cdot (+\infty)$ e $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \dfrac{4}{x} = 1 \cdot (-\infty)$.

Ne segue che g non è prolungabile per continuità a tutto $\mathbf{R}$.

[45] Elena Muselli

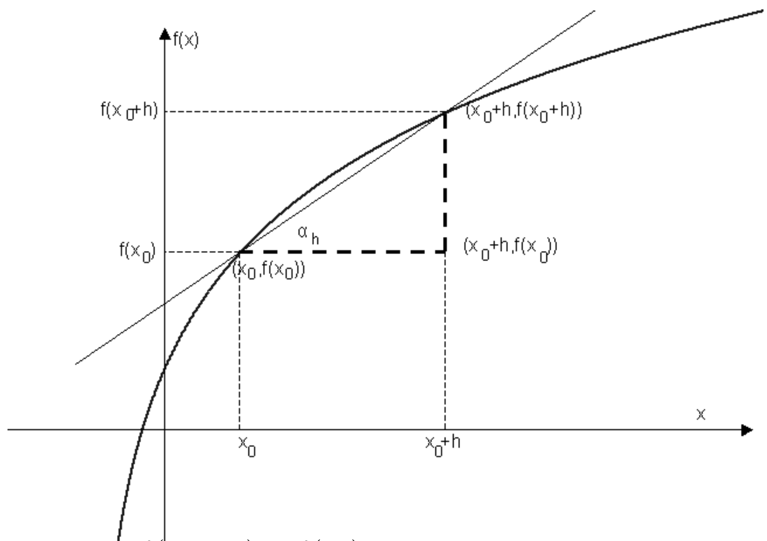
6.1 - Derivata: definizioni e significato geometrico.

Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ per qualche $\delta > 0$. Preso $h \neq 0$, $|h| < \delta$ il rapporto

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

è detto **rapporto incrementale di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x_0}$** relativo all'incremento h della variabile.

Significato geometrico del rapporto incrementale: come si vede dalla figura



il **rapporto incrementale** $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ è il rapporto tra i cateti del triangolo rettangolo di vertici: $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ e quindi (vedi pag 21) **è il coefficiente angolare della retta passante per i punti del grafico $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$, $\boldsymbol{(x_0 + h, f(x_0 + h))}$** di equazione

$$y = f(x_0) + \tan(\alpha_h)\,(x - x_0)$$

cioè si ha

$$\boldsymbol{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha_h)}$$

<u>Definizioni.</u> - Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ con $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ per qualche $\delta > 0$.
Diremo che **$\boldsymbol{f}$ è derivabile in $\boldsymbol{x_0}$** se

$$\exists \ \textbf{finito} \text{ (cioè reale) il } \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

tale limite è la **derivata di $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{x_0}$** e si denota con $\boldsymbol{f'(x_0)}$.

Diremo che **$\boldsymbol{f}$ è derivabile in $\boldsymbol{A}$** se è derivabile in ogni punto di A. In questo caso resta definita la funzione detta **funzione derivata** data da

$$\begin{aligned} f' : A &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

<u>Notazioni:</u>

- Utilizzando il cambiamento di variabile $x = x_0 + h$ il limite del rapporto incrementale si può anche scrivere

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

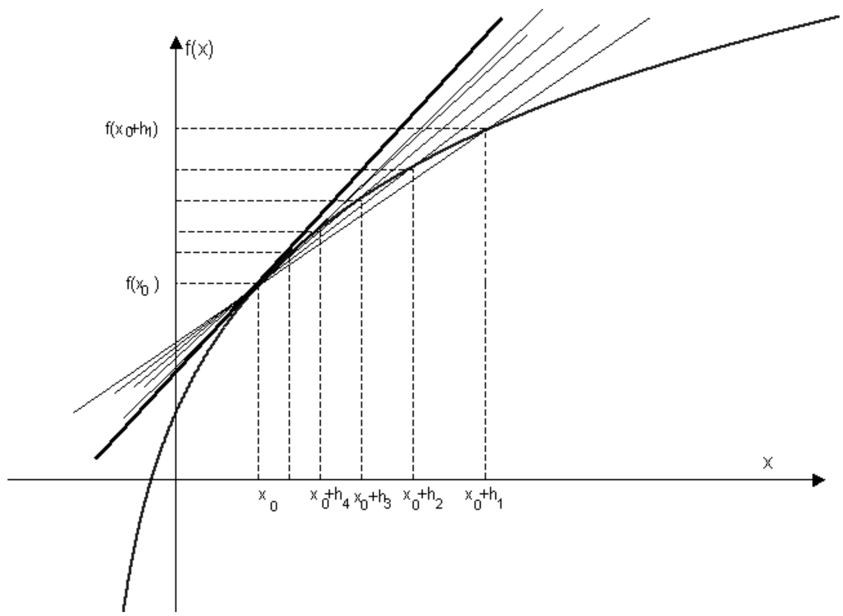
- Altre notazioni che si utilizzano al posto di $f'(x)$ sono: $D\,f(x)$, $\dfrac{d\,f}{d\,x}(x)$, $\dot{f}(x)$.

[46] Elena Muselli

Significato geometrico della derivata: dal significato geometrico del rapporto incrementale si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \tan(\alpha_h)\;;$$

se f è derivabile in x_0 il $\lim_{h\to 0}\tan(\alpha_h)\ \in \mathbf{R}$ e la retta $y = f(x_0) + \tan(\alpha_h)\,(x-x_0)$ tende ad assumere la posizione limite corrispondente alla retta tangente al G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ come si vede dalla figura:



Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, lega l'esistenza di $f'(x_0)$ al **coefficiente angolare** della **retta tangente** al $\boldsymbol{G_f}$ in $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$.

<u>**Teorema 6.1**</u> - *Siano* $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ *con* $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset A$ *per qualche* $\delta > 0$. *Allora*

f *è derivabile in* x_0 $\iff$ $\exists$ *retta, non verticale, tang.te a* G_f *in* $(x_0, f(x_0))$ *con coeff. ang.* $m = f'(x_0)$

Dal teorema precedente segue che, se f è derivabile in x_0, **la retta tangente a** $\boldsymbol{G_f}$ in $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$ è data da

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)\,.$$

<u>**Definizioni.**</u>

1. Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ con $[x_0, x_0+\delta) \subset A$ per qualche $\delta > 0$.
   Definiamo **derivata destra** in x_0 il $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se $\exists$ **finito** e lo denotiamo $\boldsymbol{f'_+(x_0)}$.

2. Siano $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ con $(x_0-\delta, x_0] \subset A$ per qualche $\delta > 0$.
   Definiamo **derivata sinistra** in x_0 il $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ se $\exists$ **finito** e lo denotiamo $\boldsymbol{f'_-(x_0)}$.

[47]Elena Muselli

Dal legame tra limite, limite destro e limite sinistro discende in modo ovvio il seguente teorema [48]

Teoreme 6.2 - *Siano* $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ *con* $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset A$ *per qualche* $\delta > 0$. *Allora*

$$f'(x_0) = l \quad \Longleftrightarrow \quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = l \ .$$

Dalle definizioni di limite e con passaggi tecnici si ottiene la dimostrazione del teorema seguente che è omessa

Teorema 6.3 (regole di derivazione) - *Sia* f *derivabile in* A *e* g *derivabile in* B. *Allora*

1. $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *è derivabile in* $A \cap B$ *e si ha:* $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$;
2. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ *è derivabile in* $A \cap B$ *e si ha:* $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
3. $(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, *è derivabile in* $A \cap B \backslash \{g(x)=0\}$ *e si ha:* $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$;
4. *sia* $f(A) \subset B$; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ *è derivabile in* A *e si ha:* $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$;
5. *sia* f *invertibile in* A, $y_0 = f(x_0)$ *e* $f'(x_0) \neq 0$ *; allora* $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Il teorema sulle regole di derivazione permette di calcolare la derivata di funzioni somma, prodotto, rapporto, etc... senza usare la definizione; bisogna, però, conoscere la derivata delle funzioni di base che si calcolano utilizzando la definizione.

6.2 - Derivate delle funzioni viste nel secondo capitolo.

Allo scopo di utilizzare entrambe le notazioni viste, la verifica delle derivate di seguito riportate sarà fatta utilizzando il limite del rapporto incrementale con la variabile h per le prime funzioni, per le rimanenti verrà utilizzata la variabile x.

- $\boldsymbol{f(x) = c}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$ *Verifica* : si ha $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = 0$.

- $\boldsymbol{f(x) = x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = 1}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$ *Verifica*: lasciata al lettore.

- $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}}$ $\boldsymbol{\nexists\, f'(0)}$;

  Verifica: se $x_0 > 0$ si ha $f_{/(x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0+\frac{x_0}{2})}(x) = x$ e dalla derivata precedente $f'(x_0) = 1$

  se $x_0 < 0$ si ha $f_{/(x_0 - \frac{-x_0}{2}, x_0+\frac{-x_0}{2})}(x) = -x$ e dalla *2.* del teor.6.3 si ha $f'(x_0) = -1$

  se $x_0 = 0$ si ha $\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$ e $\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$.

- $\boldsymbol{f(x) = x^p, \ p \neq 1}$ si ha: $\begin{cases} \boldsymbol{f'(x) = p\, x^{p-1}} & \forall\ x \in dom\, f\,,\ \boldsymbol{x \neq 0} \\ \boldsymbol{f'(0) = 0} \text{ se } \boldsymbol{p > 1} & \boldsymbol{\nexists\ f'(0)} \text{ se } \boldsymbol{0 < p < 1} \end{cases}$

  [*Verifica*: se $x_0 = 0 \in dom\, f$, cioè $p > 0$, si ha $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^p}{x} = \lim_{x\to 0} x^{p-1}$ che esiste reale e vale 0 solo se $p > 1$.
  se $x_0 \neq 0$ si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x)^p-(x_0)^p}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} (x_0)^{p-1} \frac{(\frac{x}{x_0})^p - 1}{\frac{x}{x_0}-1} =$

  $= \lim_{x \to x_0} (x_0)^{p-1} \frac{(e^{p\,\ln(\frac{x}{x_0})}-1)}{p\,\ln(\frac{x}{x_0})} \frac{p\,\ln(\frac{x}{x_0})}{\frac{x}{x_0}-1} = (x_0)^{p-1} \cdot 1 \cdot p$, dai limiti notevoli pag 36 con cambiamento di variabile prima $y = p\,\ln(\frac{x}{x_0})$ e poi $y = \frac{x}{x_0}$.]

---

[48]Elena Muselli

- $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = \cos x}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$;

  Verifica: se $x_0 \in \mathbf{R}$, dalle formule di prostaferesi pag 19 si ha
  $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 2\,\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}\cos(\frac{x+x_0}{2}) = \cos x_0$.

- $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = -\sin x}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$; *Verifica*: analoga a quella precedente.

- $\boldsymbol{f(x) = \tan x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$ $\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi\,,\ k \in \mathbf{Z}$;

  Verifica: poichè $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, dalla *3.* del Teor. 6.3 si ha $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ da cui le formule date.

- $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = a^x \ln a}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$ $a > 1$ $a \neq 0$;

  Verifica: se $x_0 \in \mathbf{R}$ si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} a^{x_0}\,\frac{a^{x-x_0}-1}{x-x_0} = a^{x_0}\ln a$ per il limite pag.36.

- $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e}$ $\forall\, x > 0$ $a > 1$ $a \neq 0$;

  Verifica: se $x_0 > 0$ si ha $\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(\frac{x}{x_0})}{x_0\,(\frac{x}{x_0}-1)} = \frac{1}{x_0}\log_a e$ per il limite pag.36.

- $\boldsymbol{f(x) = \log_a |x|}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e}$ $\forall\, x \neq 0$ $a > 1$ $a \neq 0$;

  Verifica: si ha $f(x) = \begin{cases} \log_a x & x > 0 \\ \log_a(-x) & x < 0 \end{cases}$ e, se $x < 0$, $f'(x) = \frac{1}{-x}\log_a e\,(-1) = \frac{1}{x}\log_a e$.

Le derivate delle funzioni arctangente, arcseno e arccoseno si ottengono dalla *5.* del Teor.6.3; la verifica verrà fatta solo per l'arctangente.

- $\boldsymbol{f(x) = \arctan x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$ $\forall\, x \in \mathbf{R}$;

  Verifica: preso $x_0 \in \mathbf{R} = \tan(\,(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,)$ sia $y_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ t.c. $x_0 = \tan y_0$; dalla *5.* del Teor.6.3 si ha
  $D\arctan(x_0) = \frac{1}{D\tan(y_0)} = \frac{1}{1+\tan^2(y_0)} = \frac{1}{1+x_0^2}$.

- $\boldsymbol{f(x) = \arcsin x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\forall\, x \in (-1, 1)$ $\nexists\ \boldsymbol{f'(-1)}$ $\nexists\ \boldsymbol{f'(1)}$.

- $\boldsymbol{f(x) = \arccos x}$ si ha: $\boldsymbol{f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ $\forall\, x \in (-1, 1)$ $\nexists\ \boldsymbol{f'(-1)}$ $\nexists\ \boldsymbol{f'(1)}$.

Osservazione 6.1 - Sia $h(x) = f(x)^{g(x)}$, $dom\, h = \{x \in dom\, g\ :\ f(x) > 0\}$.
Per calcolare h' riscriviamo la funzione nella forma $h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln(f(x))}$ e poi deriviamo utilizzando le formule del Teor.6.3. Si ottiene

$$D\,f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\,\ln(f(x))}\left(g'(x)\,\ln(f(x)) + \frac{g(x)\,f'(x)}{f(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\,\ln(f(x)) + \frac{g(x)\,f'(x)}{f(x)}\right).$$

[49]Elena Muselli

6.3 - Proprietà delle funzioni derivabili

Teorema 6.4 - *Sia* $f : A \to \mathbf{R}$, $x_0 \in A$ *con* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$ *per qualche* $\delta > 0$. *Se* f *è derivabile in* x_0 *allora* f *è continua in* x_0.

Dimostrazione. - Se $x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \qquad \text{da cui} \qquad f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\,;$$

passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$.

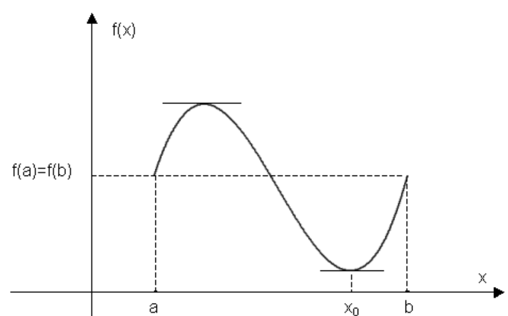
□

Osservazione 6.2

1. Dal Teorema 6.4 segue che **se** f **non è continua in un punto** x_0 **allora non è derivabile in** x_0.
2. Nel Teorema 6.4 non vale il viceversa, cioè la continuità in un punto x_0 non implica la derivabilità in x_0 come dimostra l'esempio: $f(x) = |x|$ che è continua ma non derivabile in $x = 0$.

Teorema 6.5 (**teorema di Rolle**) - *Sia* f *continua in* $[a, b]$, *derivabile in* (a, b) *t.c.* $f(a) = f(b)$. *Allora* $\exists\, x_0 \in (a, b)$ *t.c.* $f'(x_0) = 0$.

Significato geometrico del teorema di Rolle:
nelle ipotesi del teorema di Rolle, esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ t.c. il G_f ha **tangente orizzontale** nel punto $(x_0, f(x_0))$.



Osserviamo che nel grafico in figura ci sono due punti interni all'intervallo (a, b) aventi tangente orizzontale. I punti in cui $f'(x) = 0$ sono detti *punti critici* o *punti stazionari*.

Teorema 6.6 (**teorema di Lagrange**) - *Sia* f *continua in* $[a, b]$, *derivabile in* (a, b). *Allora* $\exists\, x_0 \in (a, b)$ *t.c.* $f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b - a)$.

Dimostrazione.. - Sia $h(x) = f(x)\,(b - a) - x\,(f(b) - f(a))$.
La funzione h è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) con

$$h(a) = f(a)\,(b - a) - a\,(f(b) - f(a)) = b\,f(a) - a\,f(b)$$

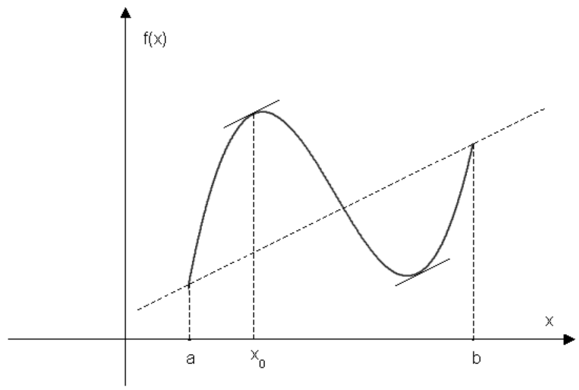
$$h(b) = f(b)\,(b - a) - b\,(f(b) - f(a)) = -a\,f(b) + b\,f(a);$$

per il teor. di Rolle, applicato alla funzione h, $\exists\, x_0 \in (a, b)$ tale che $h'(x_0) = 0 \iff$
$\iff f'(x_0)\,(b - a) - (f(b) - f(a)) = 0$ da cui la tesi.

□

[50]Elena Muselli

Significato geometrico del teorema di Lagrange:
La tesi del teorema equivale a $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ coefficiente angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Quindi il teorema afferma che esiste almeno un $x_0 \in (a, b)$ t.c. la tangente al G_f nel punto $(x_0, f(x_0))$ *è parallela alla retta passanta per i punti* $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



La dimostrazione (omessa) del seguente teorema è un'applicazione del teorema di Lagrange.

__**Teorema 6.7**__ - *Sia* I *intervallo. Allora*

$$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = cost \quad su \;\; I\,.$$

__**Teorema 6.8**__ (primo teorema de l'Hôpital) - *Siano* $x_0 \in \mathbf{R}$, f, g *derivabili in* I_{x_0} *t.c.*

(i) $g(x) \neq 0$ *e* $g'(x) \neq 0$ *in* I_{x_0} $\qquad (ii)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ $\qquad (iii)$ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbf{R}}$.

Allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

__**Teorema 6.9**__ (secondo teorema de l'Hôpital) - *Siano* $x_0 \in \mathbf{R}$, f, g *derivabili in* I_{x_0} *t.c.*

(i) $g'(x) \neq 0$ *in* I_{x_0} $\qquad (ii)$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty\ (-\infty)$ $\qquad (iii)$ $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbf{R}}$.

Allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l.$

Il teorema seguente è una conseguenza del primo teorema de l'Hôpital; l'importanza del suo utilizzo nelle applicazioni è messo in evidenza nella successiva Osservazione 6.4

__**Teorema 6.10**__ - *Sia* f *continua in* (a, b), *derivabile in* $(a, b)\backslash\{x_0\}$ *con* $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$.

Allora $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l.$

Dimostrazione. - Poichè f è continua in x_0, il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$; inoltre la funzione $g(x) = x - x_0$ verifica l'ipotesi (i) del primo teorema de l'Hôpital. Allora, applicando tale teorema si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{D(f(x)-f(x_0))}{D(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = l \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l\,.$$

□

__**Osservazione 6.3**__ - Teoremi analoghi ai precedenti si hanno nei casi di *limite destro* e *limite sinistro*.

[51] Elena Muselli

Osservazione 6.4 -Il Teor.6.10 è un'importante conseguenza del primo teorema de l'Hôpital; dimostra che:

- se f è continua in x_0 ed $\exists \lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$, allora
$$l = \pm\infty \implies \nexists\, f'(x_0) \qquad \text{e} \qquad l \in \mathbf{R} \implies f'(x_0) = l\,.$$

Nei casi di *limite destro* e *limite sinistro* si ottiene

- se f è continua in x_0 ed $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$, allora
$$l = \pm\infty \implies \nexists\, f'_+(x_0) \qquad \text{e} \qquad l \in \mathbf{R} \implies f'_+(x_0) = l\,.$$

- se f è continua in x_0 ed $\exists \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l \in \overline{\mathbf{R}}$, allora
$$l = \pm\infty \implies \nexists\, f'_-(x_0) \qquad \text{e} \qquad l \in \mathbf{R} \implies f'_-(x_0) = l\,.$$

Osservazione 6.5 - L'Oss.6.4 permette di giustificare che, se $f(x) = \arcsin(x)$ si ha $\nexists\, f'(\pm 1)$ (pag. 49); basta osservare che $\forall\, x \in (-1,1)$ si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ da cui
$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty = \lim_{x\to 1^-} f'(x) \implies \nexists\, f'(\pm 1) \qquad \text{poichè arcsin è continua in } x = \pm 1.$$
Analoga verifica vale per la funzione $f(x) = \arccos x$.

Esempi. -

1. *Data* $f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x \le 0 \\ -(x^2+1)\cos x & x > 0 \end{cases}$ *determinare dove* f *è continua e dove è derivabile.*

Si ha $dom\, f = \mathbf{R}$. Per $x \neq 0$ la funzione f è (continua e) derivabile perchè somma e prodotto di funzioni (continue e) derivabili: $e^x - 2,\ x^2+1,\ \cos x$.

Per $x = 0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 = f(0)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$ da cui $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Quindi f è continua su $\mathbf{R}$.

Per la derivabilità in $x = 0$ osserviamo che, per $x \neq 0$, si ha $f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ -2x\cos x + (x^2+1)\sin x & x > 0 \end{cases}$;

e dall'Osservazione 6.5

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \implies f'_-(0) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \implies f'_+(0) = 0$ quindi $\nexists\, f'(0)$.

La f è quindi continua su $\mathbf{R}$ ma derivabile solo per $\{x \neq 0\}$.

2. *Data* $f(x) = \begin{cases} e^x + bx + a & x \le 0 \\ -(x^2+1)\cos x & x > 0 \end{cases}$ *a) determinare, se* $\exists,\ a, b \in \mathbf{R}$, *t.c.* f *sia continua su dom* f; *b) determinare, se* $\exists,\ a, b \in \mathbf{R}$, *t.c.* f *sia derivabile su dom* f.

Si ha $dom\, f = \mathbf{R}$. Per $x \neq 0$ la funzione f è (continua e) derivabile perchè somma e prodotto di funzioni (continue e) derivabili: $e^x,\ bx + a,\ x^2+1,\ \cos x$.

per $x = 0$ si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a = f(0)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$ da cui $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \iff a = -1$.
Allora, la funzione f è continua sul dominio per $a = -1$ e $\forall\ b \in \mathbf{R}$ (se $a \neq -1$ la funzione f è continua solo per $x \neq 0$ qualunque sia $b \in \mathbf{R}$).

Per la derivabilità osserviamo che: se $a \neq -1$ la funzione f non è derivabile in $x = 0$ perchè non è continua in tale punto.

Consideriamo $a = -1$; avremo $f'(x) = \begin{cases} e^x + b & x < 0 \\ -2x\cos x + (x^2+1)\sin x & x > 0 \end{cases}$

e dall'Osservazione 6.5 (poichè per $a = -1$ la f è continua in $x = 0$) si ha
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 + b \implies f'_-(0) = 1 + b \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \implies f'_+(0) = 0$.

La funzione f è derivabile sul $dom\, f = \mathbf{R} \iff a = -1$ e $b = -1$.

[52]Elena Muselli

6.4 - Monotonia e segno della derivata. Massimi e minimi relativi.

Teorema 6.11 (criterio di monotonia) - *Sia* f *derivabile in* (a,b). *Allora*

1. f *crescente in* $(a,b) \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$;
2. f *decrescente in* $(a,b) \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$.

Dimostrazione. - Proviamo solo la *1.* perchè la *2.* si ottiene in modo analogo.

Verifichiamo " $\Longrightarrow$ ". Sia $x_0 \in (a,b)$; f crescente in $(a,b) \Longrightarrow \begin{array}{ll} f(x) \leq f(x_0) & \forall\, x \in (a, x_0] \\ f(x) \geq f(x_0) & \forall\, x \in [x_0, b) \end{array}$,

allora $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$ e dal Teorema 3.4 (del confronto) pag.32 si ha

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ cioè $f'(x_0) \geq 0$.

Per verificare la " $\Longleftarrow$ ", consideriamo $x_1\,,\, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, ed applichiamo il Teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$; si trova che: $\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$ t.c. $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)\,(x_2 - x_1)$.

Poichè per ipotesi $f'(x_0) \geq 0$ il secondo membro risulta ≥ 0 e quindi $f(x_2) \geq f(x_1)$, cioè la tesi.

□

Teorema 6.12 (condizioni suff.ti per estremi relativi) - *Sia* f *continua in* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e derivabile in* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$. *Si ha:*

1. *Se* $\left.\begin{array}{ll} f'(x) \geq 0 & \text{in } (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) \leq 0 & \text{in } (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right) \Longrightarrow x = x_0$ *è punto di* max *relativo.*

2. *Se* $\left.\begin{array}{ll} f'(x) \leq 0 & \text{in } (x_0 - \delta, x_0) \\ f'(x) \geq 0 & \text{in } (x_0, x_0 + \delta) \end{array}\right) \Longrightarrow x = x_0$ *è punto di* min *relativo.*

6.5 - Derivate di ordine superiore e condizioni per estremi relativi

Sia $f : A \to \mathbf{R}$ derivabile in A. Se la funzione f' è a sua volta derivabile in A, la sua derivata si indica con f'' (oppure $D^2 f$) e si chiama **derivata seconda** di f.

Se il processo di derivazione può continuare n volte, sono definite le derivate: **terza**, **quarta**, $\cdots$, $n-$**esima** di f indicate con i simboli f''', $f^{(4)}$, $\cdots$, $f^{(n)}$. La derivata $f^{(n)}$ è anche detta *derivata di ordine* n di f. Per convenzione si pone $f^{(0)} = f$.

Il seguente teorema permette di individuare gli estremi relativi utilizzando le derivate di ordine superiore al primo (la dimostrazione è omessa).

Teorema 6.13 - *Data* $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ *derivabile* n *volte in* (a,b), $n \geq 2$, sia $x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora si ha

$$n \textit{ pari} \quad \begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0 \text{ è punto di min relativo} \\ \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0 \text{ è punto di max relativo} \end{cases}$$

$$n \textit{ dipari} \quad \Longrightarrow x_0 \text{ non è estremo relativo.}$$

---

[53]Elena Museli

CAPITOLO 7

7.1 - Primitive di una funzione, integrale indefinito

Notazione - In tutto il capitolo, dove non specificato, **l'insieme I è considerato intervallo**.

Definizione. - Sia $f : A \to \mathbf{R}$. Una funzione $F : A \to \mathbf{R}$ è detta **primitiva di f in A** se

$$F \text{ è derivabile in } A \text{ e si ha } F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in A\,.$$

Osservazione 7.1 - Ricercare le primitive di una funzione è quindi "risalire ad una funzione F di cui f ne sia la derivata".

Si può verificare che non tutte le funzioni ammettono primitive sul loro dominio. Il teorema seguente (la cui dimostrazione è omessa) afferma che la continuità su un intervallo garantisce l'esistenza di una primitiva.

Teorema 7.1 - *Se f è continua in un intervallo I , allora esistono primitive di f in I.*

Teorema 7.2 - *Sia $f : I \to \mathbf{R}$, I intervallo. Se F è una primitiva di f in I, allora tutte le primitive di f sono date da $F(x) + c$, $c \in \mathbf{R}$.*

Dimostrazione. Sia G un'altra primitiva di f. Consideriamo $h(x) = G(x) - F(x)$; derivando si ha

$$h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall\ x \in I$$

ne segue, dal Teor.6.7 pag.51, che $\exists\ c \in \mathbf{R}$ t.c. $h(x) = c$ su I , cioè $G(x) = F(x) + c$. □

Definizione. - L'**insieme di tutte le primitive** di f in **un intervallo** I si denota

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{detto } \textbf{integrale indefinito di } \boldsymbol{f} \textbf{ sull'intervallo } \boldsymbol{I}\,\textbf{.}$$

Se F è una primitiva di f su I , dal Teor.7.2 si ha

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Notazioni. - La funzione f è detta *integranda*. La variabile x è detta *variabile d'integrazione.*
La notazione dell'integrale indefinito non dipende dalla variabile d'integrazione, cioè si ha

$$\int f(x)\,dx = \int f(t)\,dt = \int f(y)\,dy\,.$$

Teorema 7.3 - *Se f e g sono continue su I intervallo, si ha*

a) $\int (\,f(x) + g(x)\,)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

b) $\int \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \ \ \forall\ \alpha \in \mathbf{R}$.

Dimostrazione. Verifichiamo solo a). Siano F primitiva di f e G primitiva di g , allora
$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,,\ c \in \mathbf{R}$ e $\int g(x)\,dx = G(x) + d\,,\ d \in \mathbf{R}$ da cui
$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + a\,,\ a \in \mathbf{R}$.
D'altra parte poichè $D(\,F(x) + G(x)\,) = f(x) + g(x)$ si ha $\int (\,f(x) + g(x)\,)\,dx = F(x) + G(x) + a\,,\ a \in \mathbf{R}$ e quindi la tesi. □

[54]Elena Muselli

7.2 - Primitive di alcune funzioni

Dalle derivate delle funzioni che conosciamo, abbiamo in modo immediato gli integrali seguenti:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}\,,\ \alpha\neq -1 \qquad\qquad \int e^x\,dx = e^x+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c\,,\qquad c\in\mathbf{R} \qquad\qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+c\,,\qquad c\in\mathbf{R} \qquad\qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x+c\,,\qquad c\in\mathbf{R} \qquad\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}$$

7.3 - Metodi di integrazione

Teorema 7.4 (integrazione per parti) - *Siano* $f\,,\,g\in C^1(I)\,,\ I$ *intervallo. Allora*

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. La tesi equivale a

$$f(x)\,g(x) \in \int f(x)\,g'(x)\,dx + \int f'(x)\,g(x)\,dx = \int (\,f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x)\,)\,dx$$

cioè $D(\,f(x)\,g(x)\,) = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$ che è vera per la formula di derivazione di un prodotto. $\square$

Teorema 7.5 (integrazione per sostituzione) - *Siano* f *continua su* I *intervallo e* $\varphi : J\to I\,,\ \varphi\in C^1(J)$, J *intervallo. Allora*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}\,.$$

Dimostrazione. Se F è una primitiva di f, si ha

$$\int f(t)\,dt = F(t)+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}\qquad\qquad \text{da cui}\qquad\qquad \left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x))+c\,,\qquad c\in\mathbf{R}$$

Per avere la tesi bisogna verificare che $F(\varphi(x))+c = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ ossia che $F(\varphi(x))$ è una primitiva di $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,,$ ma questo è ovvio perchè $D\,(F(\varphi(x))) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$. $\square$

Notazione. Per comodità di scrittura si usa la convenzione $t=\varphi(x) \implies dt = \varphi'(x)\,dx\,.$
Se φ è invertibile, da $t=\varphi(x) \Leftrightarrow x=\varphi^{-1}(t)$ si ottiene $dx = D(\varphi^{-1}(t))\,dt$.

Applicazioni. - Sia $f\in C^1(I)\,,\ I$ intervallo. Gli integrali seguenti si risolvono, in modo immediato, con la sostituzione $t=f(x)$; inseriamo la verifica solo nel primo caso, gli altri si ottengono in modo analogo.

1. se $\alpha\neq -1$ $\quad \displaystyle\int\!\boldsymbol{(f(x))^\alpha\,f'(x)\,dx} = \left[\int t^\alpha\,dt\,\right]_{t=f(x)} = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\right]_{t=f(x)} = \boldsymbol{\frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c}\qquad c\in\mathbf{R}$

2. $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+c}\qquad c\in\mathbf{R}$

[55] Elena Muselli

3. $$\int \boldsymbol{\sin(f(x))\, f'(x)\, dx \;=\; -\cos(f(x)) + c} \qquad c \in \mathbf{R}$$

4. $$\int \boldsymbol{\cos(f(x))\, f'(x)\, dx \;=\; \sin(f(x)) + c} \qquad c \in \mathbf{R}$$

5. $$\int \boldsymbol{e^{f(x)}\, f'(x)\, dx \;=\; e^{f(x)} + c} \qquad c \in \mathbf{R}$$

6. $$\int \boldsymbol{\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\, dx \;=\; \arctan(f(x)) + c} \qquad c \in \mathbf{R}$$

Applicazioni. - Vediamo alcuni tipi di integrali a cui si applica l'integrazione per parti; l'integrazione per parti può essere applicata anche più volte di seguito se necessario.
Le integrande che considereremo saranno tutte continue sul dominio e questo garantisce l'esistenza dei vari integrali indefiniti su intervalli del dominio.

1. Integrali del tipo

$$\int \boldsymbol{x^p \cos(a\,x)\, dx}\;; \qquad \int \boldsymbol{x^p \sin(a\,x)\, dx}\;; \qquad \int \boldsymbol{x^p e^{a\,x}\, dx}\;; \qquad p \in \mathbf{N}^+\,,\;\; a \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$$

si integrano per parti considerando: $f(x) = x^p$ e $g'(x)$ l'altra funzione.

Esempio. - *Calcolare* $\int x^2 \sin(3\,x)\, dx$.

`Consideriamo` $f(x) = x^2$ `e` $g'(x) = \sin(3\,x)$, `da cui, ad es.,` $g(x) = -\dfrac{\cos(3\,x)}{3}$. `Si ha`

$$\int x^2 \sin(3\,x)\, dx \;=\; -x^2\,\frac{\cos(3\,x)}{3} + \frac{2}{3}\int x \cos(3\,x)\, dx$$

`l'integrale a secondo membro lo calcoliamo ancora per parti considerando:` $f(x) = x$ `e` $g'(x) = \cos(3\,x)$, `da cui` $g(x) = \frac{\sin(3\,x)}{3}$. `Si ha`

$$\int x^2 \sin(3\,x)\, dx \;=\; -x^2\,\frac{\cos(3\,x)}{3} + \frac{2}{3}\int x \cos(3\,x)\, dx \;=\; -\frac{1}{3}\,x^2 \cos(3\,x) + \frac{2}{3}\,x\,\frac{\sin(3\,x)}{3} - \frac{2}{9}\int \sin(3\,x)\, dx \;=$$

$$=\; -\frac{1}{3}\,x^2 \cos(3\,x) + \frac{2}{9}\,x \sin(3\,x) + \frac{2}{27}\cos(3\,x) + c \qquad c \in \mathbf{R}$$

2. Integrali del tipo

$$\int \boldsymbol{\cos(ax)\sin(bx)dx}\;; \quad \int \boldsymbol{\cos(ax)\cos(bx)dx}\;; \quad \int \boldsymbol{\sin(ax)\sin(bx)dx}\;; \quad \int \boldsymbol{e^{ax}\sin(bx)dx}\;; \quad \int \boldsymbol{e^{ax}\cos(bx)dx}\;;$$

$a\,,\, b \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$, si integrano per parti; la scelta di f e di g' è a piacere.
Bisogna osservare, però, che gli integrali precedenti non si determinano in modo immediato ma in tutti è necessario un passaggio finale opportuno: si veda la fine dell'esempio seguente.

Esempio. - *Calcolare* $\int e^{2\,x} \sin x\, dx$.

`Consideriamo` $f(x) = e^{2\,x}$ `e` $g'(x) = \sin x$, `da cui, ad es.,` $g(x) = -\cos x$. `Si ha`

$$\int e^{2\,x} \sin x\, dx \;=\; -e^{2\,x} \cos x + 2\int e^{2\,x} \cos x\, dx$$

[56] Elena Muselli

l'integrale a secondo membro lo calcoliamo per parti considerando: $f(x)=e^{2x}$ e $g'(x)=\cos x$, da cui $g(x)=\sin x$

$$\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx \;=\; -e^{2\,x}\,\cos x+2\int e^{2\,x}\,\cos x\,dx \;=\;=\; -e^{2\,x}\,\cos x+2\,e^{2\,x}\,\sin x\,-4\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx$$

osserviamo che, dopo due integrazioni per parti, ritroviamo l'integrale da cui siamo partiti; dall'uguaglianza

$$\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx \;=\; -e^{2\,x}\,\cos x+2\,e^{2\,x}\,\sin x\,-4\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx$$

possiamo ricavare

$5\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx \;=\; -e^{2\,x}\,\cos x{+}2\,e^{2\,x}\,\sin x+c$ da cui $\int e^{2\,x}\,\sin x\,dx \;=\; \frac{1}{5}\,e^{2\,x}\,(-\cos x{+}2\,\sin x)+c \qquad c\in\mathbf{R}$

Esempi. - *Calcoliamo gli integrali di* $\boldsymbol{\sin^2 x}$ *e* $\boldsymbol{\cos^2 x}$ *utilizzando le formule di duplicazioni viste a pag.19.*

- $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx \;=\; \int \frac{1-\cos(2\,x)}{2}\,dx \;=\; \int (\frac{1}{2}-\frac{cos(2\,x)}{2})\,dx \;=\; \int \frac{1}{2}\,dx\;-\;\frac{1}{2}\int \cos(2\,x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,x-\frac{\sin(2\,x)}{4}+c\,, \qquad c\in\mathbf{R}.$

- $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx \;=\; \int \frac{1+\cos(2\,x)}{2}\,dx \;=\; \int (\frac{1}{2}+\frac{cos(2\,x)}{2})\,dx \;=\; \int \frac{1}{2}\,dx\;+\;\frac{1}{2}\int \cos(2\,x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,x+\frac{\sin(2\,x)}{4}+c\,, \qquad c\in\mathbf{R}.$

7.4 - Integrali razionali

In questo paragrafo vediamo come si risolvono alcuni tipi di integrali razionali. Ovviamente l'integrazione è fatta su intervalli del dominio della funzione integranda.

- se $a\,,\,b\in\mathbf{R}^+$ si ha $\displaystyle\int \frac{1}{a\,x^2+b}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{a\,b}}\,\arctan(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x)+c \qquad c\in\mathbf{R}$

[*Verifica*: $\displaystyle\int \frac{1}{a\,x^2+b}\,dx \;=\; \frac{1}{b}\int \frac{1}{(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x)^2+1}\,dx \;=\; \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}\int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x)^2+1}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{a\,b}}\,\arctan(\sqrt{\frac{a}{b}}\,x)+c$
dalla 6. di pag. 56.
Una verifica diretta si ottiene dimostrando che la derivata della funzione ottenuta è uguale all'integranda.]

Nei casi seguenti si suppone che il numeratore non sia la derivata del denominatore, altrimenti l'integrale si risolve direttamente con la 2 di pag. 55

- $\displaystyle\int \frac{A\,x+B}{a\,x^2+b\,x+c}\,dx$ con $\Delta=b^2-4\,a\,c<0\,,$ si risolvono con la sost. $t=x+\frac{b}{2\,a}.$

- $\displaystyle\int \frac{N(x)}{M(x)}\,dx$ con $N(x)$ e $M(x)$ polinomi t.c. $grado\,N<grado\,M$ e
  $M(x)=(x-x_0)\,(x-x_1)^m\,(a\,x^2+b\,x+c)$ con $\Delta=b^2-4\,a\,c<0$

si risolvono scrivendo $\frac{N(x)}{M(x)}$ come somma di frazioni secondo lo schema seguente

$$\frac{N(x)}{M(x)} \;=\; \frac{A_0}{x-x_0}+\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-x_1)^m}+\frac{B\,x+D}{a\,x^2+b\,x+c}$$

con $A_0\,,\,A_1\,,\,\cdots\,,\,A_m\,,\,B\,,\,D$ costanti da determinare (vedi esempio seguente n.2).
L'integrale dato si calcola quindi come somma degli integrali delle frazioni al secondo membro (sono tutti integrali che si sanno calcolare).
Osserviamo che il numero delle costanti da determinare è uguale al grado di M.

[57]Elena Muselli

- $\displaystyle\int \frac{P(x)}{M(x)}\,dx$ con $P(x)$ e $M(x)$ polinomi t.c. $grado\,P \geq grado\,M$;

mediante divisione tra i due polinomi $P(x)$ ed $M(x)$, si ottiene $\dfrac{P(x)}{M(x)} = Q(x) + \dfrac{N(x)}{M(x)}$ con $grado\,N < grado\,M$, così alla frazione $\dfrac{N(x)}{M(x)}$ si applica quanto visto in precedenza.

Esempi. - Nei calcoli il simbolo $\left[\int f(t)\,dt\right]_{t=\varphi(x)}$ è sostituito da $\int f(t)\,dt\Big]_{t=\varphi(x)}$.

1. *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{-x+1}{2\,x^2+2\,x+1}\,dx.$

Osserviamo che $\Delta = 4-8<0$; consideriamo allora la sostituzione $t = x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = t-\frac{1}{2}$ da cui $dx = dt$ e sostituendo si ha

$$\int \frac{-x+1}{2\,x^2+2\,x+1}\,dx = \int \frac{-t+\frac{1}{2}+1}{2\,(t^2+\frac{1}{4}-t)+2\,t-1+1}\,dt\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} = \int \frac{-2\,t+3}{4\,t^2+1}\,dt\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} =$$

$$= \int \frac{-2\,t}{4\,t^2+1}\,dt + \int \frac{3}{4\,t^2+1}\,dt\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\int \frac{8\,t}{4\,t^2+1}\,dt + 3\int \frac{1}{4\,t^2+1}\,dt\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|4\,t^2+1| + \frac{3}{2}\arctan(2\,t)+c\Big]_{t=x+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}\ln(4\,x^2+4\,x+2)+\frac{3}{2}\arctan(2\,x+1)+c \qquad c\in\mathbf{R}\,.$$

2. *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx.$

Osserviamo che il grado di x^2+1 è minore del grado di $(x-1)^2\,(x+2)$ e che il numeratore non è la derivata del denominatore. Cerchiamo allora delle costanti A, B e C t.c,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2\,(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}\,;$$

da tale uguaglianza, svolgendo i conti ed eliminando il denominatore, si ottiene

$x^2+1 = (A+C)x^2+(A+B-2C)x-2A+2B+C$ che è vera $\forall\, x\in\mathbf{R}$ solo se $\begin{cases} A+C=1 \\ A+B-2\,C=0 \\ -2\,A+2\,B+C=1 \end{cases}$

da cui $A=\dfrac{4}{9}$, $B=\dfrac{2}{3}$, $C=\dfrac{5}{9}$. Si ha

$$\int\frac{x^2+1}{(x-1)^2\,(x+2)}\,dx = \frac{4}{9}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{2}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\frac{5}{9}\int\frac{1}{x+2}\,dx = \frac{4}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{3\,(x-1)}+\frac{5}{9}\ln|x+2|+c \qquad c\in\mathbf{R}\,.$$

3. *Calcolare* $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ *usando la sostituzione* $t=e^x$.

Dalla relazione $t=e^x$ si ha $x=\ln t$ da cui $dx=\frac{1}{t}\,dt$ e sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\,\frac{1}{t}\,dt\Big]_{t=e^x} = \int\frac{1}{t^2+1}\,dt\Big]_{t=e^x} = \arctan(e^x)+c \qquad c\in\mathbf{R}$$

4. *Calcolare* $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}\,dx$ *usando la sostituzione* $t=\tan(\frac{x}{2})$.

Dalla relazione $t=\tan(\frac{x}{2})$ si ha $dt=(1+\tan^2(\frac{x}{2}))\,\frac{1}{2}\,dx$ da cui $dt=\dfrac{1+t^2}{2}\,dx$ cioè $dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$.

Sostituiamo nell'integrale ricordando che, dalle formule parametriche, si ha $\cos x = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$ ed otteniamo

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx = \int\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} = \int\frac{2}{(1-t)(1+t)}dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} = \text{(analogamente ai conti degli esempi precedenti)}$$

$$= \int\frac{1}{1-t}\,dt+\int\frac{1}{1+t}\,dt\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})} = -\ln|1-t|+\ln|1+t|\,\Big]_{t=\tan(\frac{x}{2})}+c = -\ln|1-\tan(\frac{x}{2})|+\ln|1+\tan(\frac{x}{2})|+c \qquad c\in\mathbf{R}.$$

[58]Elena Muselli

7.5 - Integrale definito di Riemann

Definizione. - Dato un intervallo $[a, b]$, un insieme di punti $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ di questo intervallo t.c.: $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ è detto **partizione di $[a, b]$**.
Tale partizione verrà denotata con $\mathcal{P}(x_0 \cdots x_n)$, o semplicemente con $\mathcal{P}$.

Premesse e notazioni.

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitata e siano $m = \inf f([a, b])$ e $M = \sup f([a, b])$.

Presa $\mathcal{P}(x_0 \cdots x_n)$, una partizione di $[a, b]$, denotiamo

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \qquad m_k = \inf f(I_k) \qquad M_k = \sup f(I_k) \qquad k = 1, \cdots, n.$$

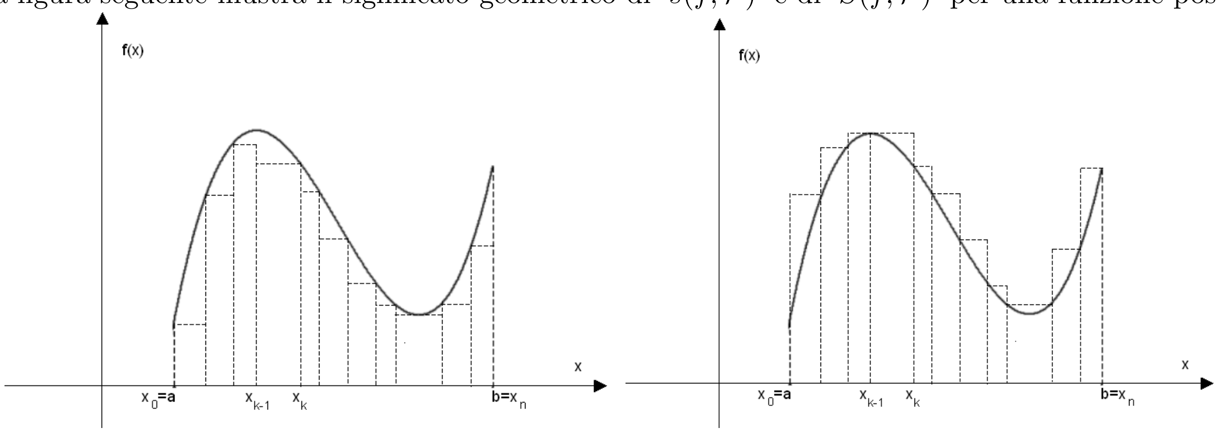
$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}) \qquad S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1})$$ (il n. $x_k - x_{k-1} > 0$ è la lunghezza di I_k).

Osservazione 7.2 - Osserviamo che

$$m \le m_k \le M_k \le M \quad \forall\, k = 1, \cdots, n \qquad \Longrightarrow \qquad m\,(b-a) \le s(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}) \le M\,(b-a).$$

[Infatti, dalla relazione (ovvia) $M_k \le M$ si ha $M_k\,(x_k - x_{k-1}) \le M\,(x_k - x_{k-1})$, $\forall\, k = 1, \cdots, n$ da cui $S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{n} M (x_k - x_{k-1}) = M \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = M(b-a)$. Anal.te si hanno le altre relazioni.]

La figura seguente illustra il significato geometrico di $s(f, \mathcal{P})$ e di $S(f, \mathcal{P})$ per una funzione positiva.



Definizioni. - Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitata. Utilizzando le notazioni introdotte in precedenza definiamo:

1) **integrale inferiore di Riemann di f** relativo all'intervallo $[a, b]$, il numero

$$s(f) = \sup\{\, s(f, \mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} \text{ partizione di } [a, b] \,\}$$

2) **integrale superiore di Riemann di f** relativo all'intervallo $[a, b]$, il numero

$$S(f) = \inf\{\, S(f, \mathcal{P}) \,:\, \mathcal{P} \text{ partizione di } [a, b] \,\}$$

Definizione. - Una funzione $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ limitata è detta **integrabile secondo Riemann** in $[a, b]$ se

$$s(f) = S(f)$$

e tale numero reale, detto **integrale definito** di Riemann **di f in $[a, b]$**, si denota con il simbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

[59] Elena Muselli

Osservazione 7.3 - Si verifica che valgono le relazioni: $m(b-a) \le s(f) \le S(f) \le M(b-a)$ e che esistono funzioni per le quali si ha $s(f) < S(f)$.

Notazioni. - La funzione f è detta *integranda*; l'intervallo $[a,b]$ è detto *intervallo d'integrazione.* Il valore dell'integrale definito non dipende dalla variabile d'integrazione, cioè si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy\,.$$

Definizione. - Se f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$, definiamo

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \qquad e \qquad \int_a^a f(x)\,dx := 0\,.$$

Teorema 7.6 (proprietà degli integrali definiti) - *Date f, g integrabili secondo Riemann in $[a,b]$ ed $\alpha \in \mathbf{R}$, valgono le seguenti proprietà:*

1. $\displaystyle\int_a^b (\,f(x)+g(x)\,)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\ ;$
2. $\displaystyle\int_a^b \alpha\, f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\ ;$
3. *se* $c \in (a,b)$ *si ha* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ ;$
4. $\displaystyle m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$ *con* $m = \inf f([a,b])$ *e* $M = \sup f([a,b])$ *;*
5. *se* $f(x) \le g(x)$ $\forall\, x \in [a,b]$ *allora* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\ ;$
6. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\ .$

(La dimostrazione del teorema è omessa.)

Una classe di funzioni integrabili secondo Riemann è la classe delle funzioni continue, come afferma il seguente teorema (la dimostrazione è omessa).

Teorema 7.7 - *Se f è continua in $[a,b]$ allora f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.*

7.6 - Significato geometrico dell'integrale di Riemann

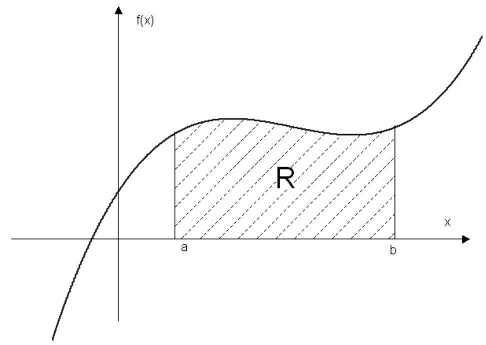
Sia f integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

- Se $f(x) \ge 0$ $\forall\, x \in [a,b]$, allora $m_k \ge 0$, $M_k \ge 0$ $\forall\, k = 1, \cdots, n$. Ne segue che $s(f,\mathcal{P}) \ge 0$, $S(f,\mathcal{P}) \ge 0$ $\forall\,\mathcal{P}$ partizione di $[a,b]$. Quindi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

  Denotiamo con R la parte di piano compresa tra il grafico di f , l'asse delle ascisse e delimitata ai lati dalle rette $x=a$ ed $x=b$ (rettangoloide in figura). Dal procedimento con cui si determinano $s(f)$ ed $S(f)$, si ha

[60] Elena Muselli

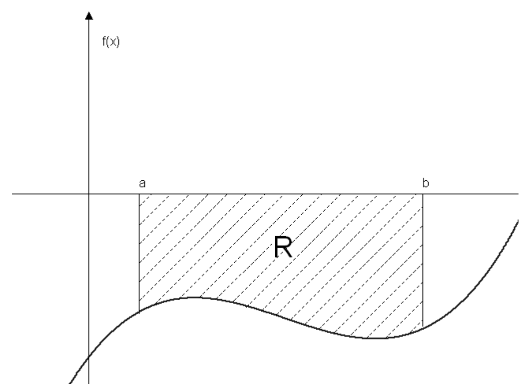
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area}(\mathrm{R})$$



- Se $f(x) \le 0 \ \ \forall\, x \in [a,b]$, allora $m_k \le 0$, $M_k \le 0 \quad \forall\, k = 1, \cdots, n$. Ne segue che $s(f,\mathcal{P}) \le 0$, $S(f,\mathcal{P}) \le 0 \ \ \forall\, \mathcal{P}$ partizione di $[a,b]$. Quindi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le 0.$

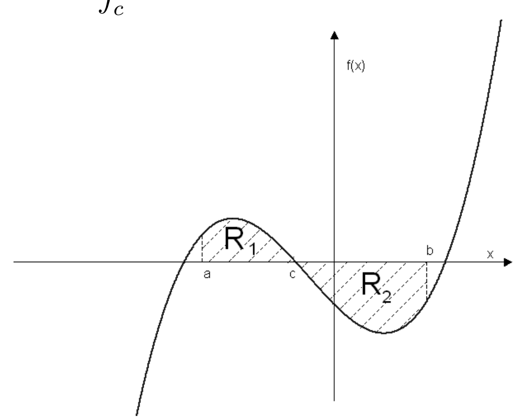
  Denotiamo con R la parte di piano compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e delimitata ai lati dalle rette $x = a$ ed $x = b$ (rettangoloide in figura). Dal procedimento con cui si determinano $s(f)$ ed $S(f)$, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\ \text{Area}(\mathrm{R})$$



- Il caso di funzioni a segno non costante lo discutiamo con un esempio. Sia f come in figura; possiamo dividere l'integrale come segue $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ otteniamo allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area}(\mathrm{R}_1) - \text{Area}(\mathrm{R}_2)$$



7.7 - Legame tra primitive di funzioni continue ed integrale definito (o di Riemann).

<u>Definizione.</u> - Sia f continua su $[a,b]$. Per ogni $x \in [a,b]$ $\exists$, unico, il numero reale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

Resta allora definita una funzione $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ t.c.

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

detta **funzione integrale**.

[61] Elena Muselli

Teorema 7.9 (**teorema fondamentale del calcolo integrale**) - *Se f è continua su $[a,b]$ la funzione integrale*

$$F(x) \;=\; \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f, ossia $F'(x) = f(x)$ in $[a,b]$.

(La dimostrazione è omessa)

Teorema 7.10 (**formula fondamentale del calcolo integrale**) - *Sia f continua su $[a,b]$ e sia G una primitiva di f. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; G(b) - G(a)$$

Dimostrazione. Poichè $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f si ha $G(x) = F(x) + c$ con $c \in \mathbf{R}$, quindi $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$. Dalla relazione precedente si ottiene

$$G(a) = c \qquad \text{e} \qquad G(b) = \int_a^b f(x)\,dx + c = \int_a^b f(x)\,dx + G(a) \qquad \text{da cui la tesi.}$$

da quest'ultima uguaglianza si ricava la tesi. $\square$

Notazione. La differenza $G(b) - G(a)$ si denota con il simbolo: $G(x)\Big|_a^b$

Utilizzando il legame tra integrale definito e primitive, si ottengono due teoremi di integrazione per integrali definiti: per parti e per sostituzione. Le dimostrazioni sono analoghe a quelle viste per gli integrali indefiniti e quindi sono omesse.

Teorema 7.11 (integrazione per parti per integrali definiti) - *Siano f, $g \in C^1([a,b])$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \;=\; f(x)\,g(x)\,\Big|_a^b \;-\; \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Teorema 7.12 (integrazione per sostituzione per integrali definiti) - *Siano f continua su $[a,b]$ e $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ t.c. $\varphi \in C^1([c,d])$. Allora si ha*

$$\int_c^d f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \;=\; \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt\,.$$

Esempi. -

1. *Calcolare* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(2\,x)\,dx.$

   `Integriamo per parti considerando:` $f(x) = x$ `e` $g'(x) = \cos(2\,x)$, `da cui` $g(x) = \frac{\sin(2\,x)}{2}$. `Si ha`

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(2\,x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,x\,\sin(2\,x)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;-\; \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\,x)\,dx \;=\; \frac{1}{4}\,\cos(2\,x)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; -\frac{1}{2}\,.$$

2. *Calcolare* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx.$

   `Integriamo con la sostituzione` $t = e^x$ `; si ha:` $x = \ln t$ `da cui` $dx = \frac{1}{t}\,dt$ `ed inoltre, per quanto riguarda gli estremi, osserviamo che` $x = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{e}$, $x = 1 \Rightarrow t = e$. `Avremo:`

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2\,x}}\,dx \;=\; \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{t}{1+t^2}\,\frac{1}{t}\,dt \;=\; \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \arctan t\,\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} \;=\; \arctan e - \arctan\frac{1}{e}\,.$$

---

[62]Elena Muselli

<u>Teorema 7.13</u> - Sia f continua su $[-a,a]$ con $a>0$. Allora

a) f dispari $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

b) f pari $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Dimostrazione. Verifichiamo solo la a). Dalla 3 del Teorema 7.6 si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Calcolando il primo integrale con la sostituzione $t=-a$, avremo

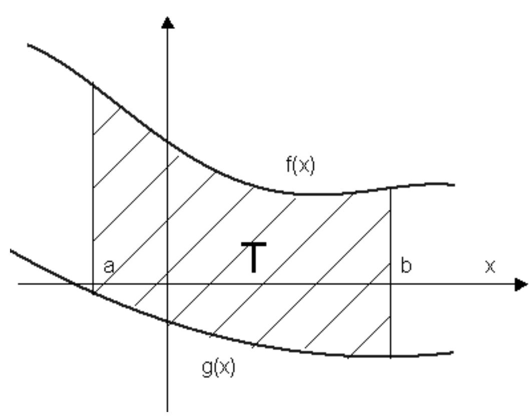
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-\,dt) = \int_{a}^{0} -f(t)\,(-\,dt) = \int_{a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

da cui la tesi. □

7.8 - Calcolo di aree di figure piane mediante l'integrale definito.

<u>Osservazione 7.4</u> - Consideriamo la parte di piano (vedi figura) delimitata

- lateralmente dalle rette $x=a$ e $x=b$;
- inferiormente dalla funzione g continua su $[a,b]$;
- superiormente dalla funzione f continua su $[a,b]$;



possiamo scrivere l'insieme T nel modo seguente:

$$T = \{\,(x,y)\,:\, a \le x \le b\,,\; g(x) \le y \le f(x)\,\} \qquad \text{con} \quad f\,,g \quad \text{continue su} \;\; [a,b]\,;$$

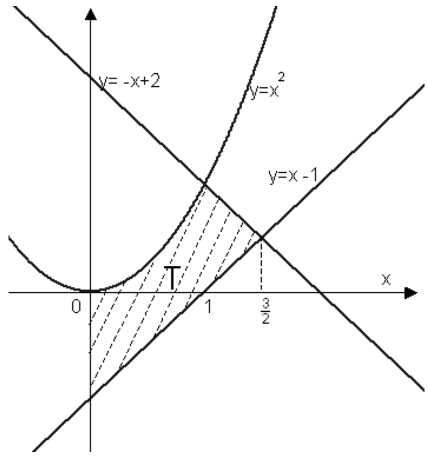
si verifica che

$$\text{Area (T)} = \int_{a}^{b} (\,f(x) - g(x)\,)\,dx$$

(la verifica è omessa).

[63] Elena Muselli

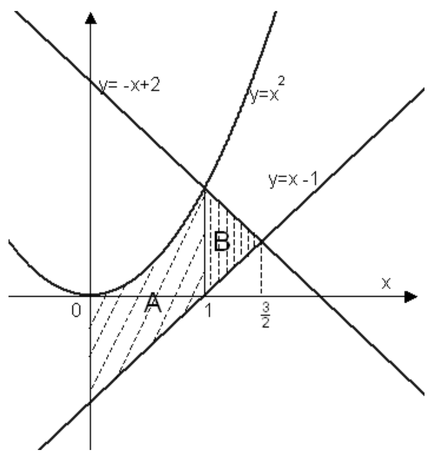
Esempio. - *Calcolare l'area della parte T di piano tratteggiata in figura*



`Osserviamo che l'insieme` T `è limitato:` `lateralmente dalle rette` $x = 0$ `e` $x = \dfrac{3}{2}$,

`inferiormente da` $g(x) = x - 1$, `superiormente da` $f(x) = \begin{cases} x^2 & \texttt{se } 0 \le x \le 1 \\ -x + 2 & \texttt{se } 1 < x \le \frac{3}{2} \end{cases}$.

`Data l'espressione della` f, `dividiamo l'insieme` T `nei due sottoinsiemi` A `e` B `come in figura`



`avremo:` $A = \{ (x, y) \, : \, 0 \le x \le 1 \, , \; x - 1 \le y \le x^2 \}$ $\qquad B = \{ (x, y) \, : \, 1 \le x \le \frac{3}{2} \, , \; x - 1 \le y \le -x + 2 \}$
`e dall'osservazione 7.5`

$$\texttt{Area(T)} \; = \; \texttt{Area(A) + Area(B)} \; = \; \int_0^1 (x^2 - x + 1) \, dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (-x + 2 - x + 1) \, dx \; = \; \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \, \Big|_0^1 \; - x^2 + 3\,x \, \Big|_1^{\frac{3}{2}} \; = \; \frac{13}{12}$$

7.9 - Calcolo di integrali di funzioni con discontinuità eliminabile e di prima specie.

Premesse e notazioni.

Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua su $[a, b] \backslash \{x_0\}$ con $x_0 \in (a, b)$ e

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbf{R} \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbf{R} \, .$$

Osserviamo che le funzioni che hanno nel punto x_0 una discontinuità eliminabile o di prima specie verificano le ipotesi precedenti.

In bibliografia una funzione che verifica le ipotesi precedenti è detta *continua a tratti*, perchè i due tratti, su $[a, x_0)$ e su $(x_0, b]$, sono continui ed ognuno di loro è prolungabile con continuità in x_0.

[64]Elena Muselli

Denotiamo questi prolungamenti con

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, x_0) \\ m & \text{se } x = x_0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (x_0, b] \\ l & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Utilizzando le notazioni precedenti enunciamo il seguente teorema la cui dimostrazione è omessa.

Teorema 7.14 - *Sia* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *continua su* $[a, b] \setminus \{x_0\}$ *con* $x_0 \in (a, b)$ *e*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = m \in \mathbf{R} \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbf{R}.$$

Allora f *è integrabile secondo Riemann in* $[a, b]$ *e si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f_1(x)\,dx + \int_{x_0}^b f_2(x)\,dx.$$

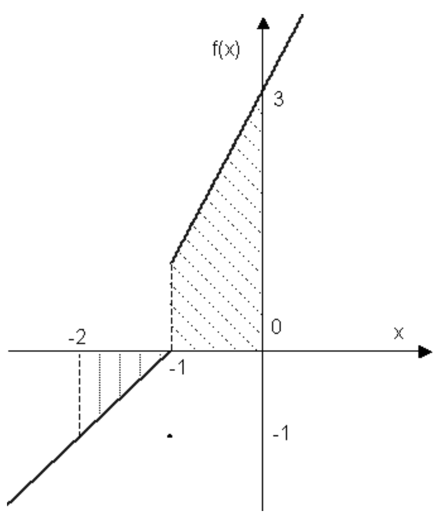
Esempio. - *Sia* $f(x) = \begin{cases} x+1 & se\ x < -1 \\ -1 & se\ x = -1 \\ 2x+3 & se\ x > -1 \end{cases}$ *Calcolare, se esiste,* $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx$.

`Osserviamo che la funzione è continua a tratti perchè: continua per` $x \neq -1$ `con` $\displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ `e` $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1$.
`Allora l'integrale definito di` f `su` $[-2, 0]$ `esiste e si ha`

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x+1)\,dx + \int_{-1}^0 (2x+3)\,dx = \cdots = \frac{3}{2}$$

`poichè` $f_1(x) = x + 1$ `su` $[-2, -1]$ `e` $f_2(x) = 2x + 3$ `su` $[-1, 0]$.

Osservazione 7.5 - I conti fatti nell'esempio mettono in evidenza che, in pratica, l'integrale è la somma degli integrali dei due tratti che formano la funzione, come si vede dalla figura



[65] Elena Muselli