1. Studiare il dominio, i limiti agli estremi e la continuità delle funzioni:

$$\sqrt{(x+7)(x-10)},\quad lg\frac{2x-5}{x+4},\quad \sqrt{1-\frac{3x-1}{x+4}},\quad \sqrt[4]{\frac{(2x-5)^2}{x+4}},\quad lg\Big(\frac{2x-5}{(x+4)^2}-1\Big),\quad lg\Big(-\frac{x^2-3}{x-2/3}\Big)$$

2. Data la funzione

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$$

calcolare $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)$. Studiando la positività tracciare un grafico approssimativo.

3. Delle seguenti funzioni determinare dominio e codominio, limiti agli estremi, studiare la positività ed eventuali simmetrie; usando tali elementi dare un'idea approssimativa del grafico, senza fare le derivate.

$$y=x^3-3x,\qquad y=lg\frac{2x}{1+x},\qquad y=e^{x^2}$$

$$y=\frac{x}{x-1},\qquad y=\frac{1}{x(x-2)},\qquad y=e^{-x^2}$$

$$y=\frac{8x}{x^2+4},\qquad y=\frac{8|x|}{x^2+4},\qquad y=lg\frac{1+x}{1-x}$$

4. Dire se le seguenti funzioni sono continue in $x=0$:

$$f(x)=x|x|,\quad f(x)=\begin{cases} lg(x+1) & \text{se } x\ge 0\\ kx & \text{se } x<0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases},$$

$$f(x)=\begin{cases} sen\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases} xsen\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

5. Vedere sulla circonferenza unitaria che $senx\le x\le tgx$ nel primo quadrante, quindi si ha $1\le \dfrac{x}{senx}\le\dfrac{1}{cosx}$. Dedurre che

$$lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$$

6. Scegliere, se esistono, valori reali dei parametri in modo tale che la funzione risulti continua nel suo dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(ax)}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 1 & \text{se } x=0\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{senx}{x} & \text{se } x>0\\ ax^2+bx+c & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} ae^{x^3+x^2} & \text{se } x<0\\ b & \text{se } x=0\\ ax^3+bx^2+c & \text{se } x>0\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2+x}{|x-1|} & \text{se } x\neq 1\\ k & \text{se } x=1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{2-x} & \text{se } x\ge 1, x\neq 2\\ arctg(-x) & \text{se } x<1\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases} lg\dfrac{2x}{1+x} & \\ k & \text{se } x=0\end{cases}$$

7. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$lim_{x\to\infty}(x^2-x)$, $lim_{x\to-\infty}(x^3-x^2+x)$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{senx}{x}$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{cosx}{x}$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$, $lim_{x\to\infty}tgx$,

$lim_{x\to\infty}arctg(-x)$, $lim_{x\to-\infty}sen\frac{1}{x}$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+\sqrt{x}}{1+3x^2}$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{x+senx}{2x-senx}$, $lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{sen\frac{1}{x}}$,

$lim_{x\to\infty}\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$, $lim_{x\to\infty}xsenx$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{sen2x}{x}$, , $lim_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x^2}$, $lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+x}{x+cosx}$,

$lim_{x\to 0}\dfrac{sen3x}{7x}$, $lim_{x\to 0}\dfrac{1-cosx}{x^2}$, $lim_{x\to\infty}xsen\dfrac{1}{x}$, $lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $lim_{x\to 0}\dfrac{x^2sen\frac{1}{x}}{senx}$, $lim_{x\to 0}\dfrac{xsen\frac{1}{x}}{senx}$.

8. Limiti derivati direttamente dalla definizione di e:

$$lim_{x\to+\infty, x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$i)\quad lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,\qquad ii)\quad lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=log_a e$

$iii)\quad lim_{x\to 0}\frac{lg(1+x)}{x}=1,\qquad iv)\quad lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lg\ a$

9. Calcolare:

$lim_{x\to 0}(1+27x)^{1/x}=e^{27},\quad lim_{x\to+\infty,x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=e^{-2},\quad lim_{x\to+\infty,x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}=e,$

$lim_{x\to+\infty,x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=e^2,\quad lim_{x\to+\infty}\ x\ log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-2,\quad lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lg2x}{lgx}\right)^{lgx}=2.$

10. Equazioni.

i) Provare che l'equazione $x^3+x-1=0$ ha una soluzione reale nell'intervallo $(0,1)$.

ii) Provare che l'equazione $e^x+x=0$ ha una soluzione reale nell'intervallo $(-1,0)$.

11. Confronto di funzioni: vedere in quali punti i grafici di due funzioni si intersecano.

i) $f(x)=x^3,\quad g(x)=1-x$

ii) $f(x)=e^x,\quad g(x)=-x$

(Per i calcoli vedi esercizio precedente).

12. Dicotomia. Determinare un intervallo di lunghezza $1/2$ in cui si trovi la soluzione reale dell'equazione

i) $\quad e^{-x^2}=-x$

ii) $\quad x^2-x=e^x$

iii) $\quad e^{-x}=3+e^{-x^2}$.

13. Esistenza della radice n-sima reale di un numero reale $a\geq 0$.

Si deve trovare una soluzione reale dell'equazione $x^n-a=0$. Se $a=0,1$, una soluzione è $x=0,1$ rispettivamente. Per $a>0,\neq 1$ applichiamo il teorema degli zeri alla funzione $f(x)=x^n-a$.

Se $a\in(0,1)$, allora $f(0)=-a<0$, $f(1)=1-a>0 \Longrightarrow$ esiste $x_0\in(0,1)$ tale che $f(x_0)=0$, cioè $(x_0)^n=a$.

Se $a>1$, allora $f(1)=1-a<0$, $f(a)=a^n-a=a(a^{n-1}-1)>0 \Longrightarrow$ esiste $x_0\in(1,a)$ tale che $f(x_0)=0$, cioè $(x_0)^n=a$.

14. Nei due casi seguenti è possibile dire, usando soltanto il teorema dei valori intermedi, se esiste un punto $c\in[0,\sqrt{2}]$ tale che $f(c)=3$?

i) $f(x)=2^{\left(\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+2\right)}$

ii) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}$

15. Derivate di funzioni elementari secondo la definizione.

i) Se $f(x)=log_a x$ e $x_0\geq 0$, allora

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{log_a(x_0+h)-log_a(x_0)}{h}=\frac{1}{x_0}log_a e\qquad$ perchè

$$\frac{log_a(x_0+h)-log_a(x_0)}{h}=\frac{1}{h}log_a\Big(\frac{x_0+h}{x_0}\Big)=log_a\Big(\frac{x_0+h}{x_0}\Big)^{\frac{1}{h}}=\frac{1}{x_0}log_a\Big(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\Big)^{\frac{x_0}{h}}.$$

ii) Se $f(x)=a^x$ e $x_0\in$, allora

$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h}=a^{x_0}log_e a$ perchè

$\dfrac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h}=a^{x_0}\dfrac{a^h-1}{h}$ e $\dfrac{a^h-1}{h}\to log_e a$ (vedi lezioni precedenti).

OPPURE possiamo usare la formula della derivata delle funzioni inverse:

$(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$ dove $x_0=f^{-1}(y_0)$ (ricorda la bigettività delle funzioni invertibili).

Nel nostro caso $f=log_a x$, $f^{-1}=a^x$. Poichè $y_0=f(x_0)=log_a x_0$, risulta $a^{y_0}=x_0$.

Quindi $(a^x)'(y_0)=(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x_0}log_a e}=\dfrac{x_0}{log_a e}=a^{y_0}log_e a.$

16. Calcolo della derivata di funzioni composte. Calcolare f' per

$$f=5log\frac{x-1}{x^2+1},\quad f=xe^{x^2+2}senx,\quad f=e^{x^2tgx},\quad f=\sqrt{x}+3log(sen^2x)$$

$$f=sen^2(\sqrt{x}),\quad f=\frac{arctg(1-x^2)}{1+x},\quad \sqrt[5]{x^2}+sen(x^2+x),\quad f=x^{logx}$$

17. Dire se le seguenti funzioni sono derivabili in tutto il dominio:

$$f=x|x|,\quad f=|x^3|,\quad f=|(x-1)(x-2)|,\quad f=\sqrt{(x^2+x)|x+2|},\quad f=\begin{cases}-2x^2 & \text{se } x>0\\ x^2 & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

$$f=|cosx|,\quad f=cos|x|,\quad f=|arctgx|,\quad f=arctg|x|,\quad f=arctg|4-x^2|$$

18. i) Studiare dominio, limiti agli estremi, continuità e derivabilità della funzione $f(x)$ e scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0,f(0))$ (ricorda: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$):

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1},\quad f(x)=sen(x^3+2),\quad f(x)=\frac{x-1}{x+1}\quad f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$$

ii) Usando (i), studiare dominio, limiti agli estremi, continuità e derivabilità della funzione $g(x)$ e, quando esiste, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0,g(0))$:

$$g(x)=|f(x)|,\quad f(|x|),\quad xf(x),\quad x|f(x)|,\quad |x|f(x),\quad e^{-f(x)},\quad log(f(x)),\quad \begin{cases}f(x) & \text{se } x\neq 1,-1\\ 0 & \text{se } x=1,-1\end{cases}$$

19. Scegliere, se esistono, valori reali dei parametri in modo tale che la funzione risulti derivabile nel suo dominio:

$$f(x)=\begin{cases}senx & \text{se } x>0\\ ax^2+bx & \text{se } x\le 0\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}ax+b & \text{se } x>1\\ 2 & \text{se } x=1\\ cx^2 & \text{se } x<1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}ae^{x^3+x^2} & \text{se } x<0\\ b & \text{se } x=0\\ ax^3+bx^2+c & \text{se } x>0\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2+x}{|x-1|} & \text{se } x\neq 1\\ k & \text{se } x=1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{2-x} & \text{se } x\ge 1, x\neq 2\\ arctg(-x) & \text{se } x<1\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}lg\dfrac{2x}{1+x} & \text{se } x\neq 0\\ k & \text{se } x=0\end{cases}$$