ESERCIZI CDI - Foglio 1

(1) - Supponendo verificate tutte le condizioni di esistenza delle radici, eseguire moltiplicazioni e divisioni semplificando il risultato quando possibile:

$$\sqrt{a\,b}\,\sqrt[3]{a^2\,b^2}\,\sqrt{2\,a}\;; \qquad \sqrt[4]{\frac{a^2-a}{a^2-2\,a+1}}\,\sqrt{\frac{a-1}{a^2}}\;; \qquad \sqrt{a-\frac{4}{a}}\,\sqrt[3]{\frac{2\,a}{a+2}}\,\sqrt[6]{\frac{2\,a}{(a-2)^3}}\;;$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}:\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\;; \qquad \sqrt{\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}}\,\sqrt{\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}}\,\sqrt{\frac{a^2-a\,b+b^2}{a^2+a\,b+b^2}}\;; \qquad \frac{\sqrt[4]{a^3+a^2}}{\sqrt{a+1}}\,\frac{\sqrt[8]{a+1}}{\sqrt[4]{a}}\;;$$

$$\sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{4\,a}+1}:\sqrt{\frac{a+1}{4\,a}}\,\sqrt[6]{\frac{5\,(a-1)}{4\,a\,(a+1)}}\;; \qquad \sqrt[3]{\frac{2\,x-7}{4\,x^2-49}}:\frac{\sqrt[6]{2\,x+7}}{\sqrt{2\,x+7}}\;; \qquad \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}}\,\sqrt{\frac{x^2+x\,y+y^2}{x^2+2\,x\,y+y^2}}\;;$$

(2) - Supponendo verificate tutte le condizioni di esistenza delle radici, ridurre le seguenti espressioni ad un'unica frazione con denominatore razionale:

$$\frac{5}{7-2\sqrt{6}}\;; \qquad \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\;; \qquad \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\;; \qquad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\;; \qquad \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\;; \qquad \frac{a^2-4\,b}{a-2\sqrt{b}}\;;$$

$$\frac{1-x^2}{2-2\sqrt{x}}\;; \qquad \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\;; \qquad \frac{4\,b}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\;; \qquad \frac{5\,a}{\sqrt{3\,a+b}-\sqrt{b-2\,a}}\;;$$

(3) - Ridurre le espressioni seguenti ad un'unica frazione con denominatore razionale:

$$2\left(\sqrt[3]{b^2}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\right):\left(\sqrt[5]{b^3}-\frac{a}{\sqrt[5]{b^2}}\right)+\sqrt[15]{b}\;; \qquad \frac{2\sqrt{x\,y}}{y-x}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\;;$$

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}\;; \qquad \left(\frac{a+1}{a+\sqrt{a}}-\frac{1-\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}+\frac{2-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)-\frac{3+a}{a+\sqrt{a}}\;;$$

$$\left(\sqrt{\frac{2\,x+y}{2\,x-y}}-\sqrt{\frac{2\,x-y}{2\,x+y}}\right):\sqrt{4\,x^2-y^2}+\frac{4\,x}{y^2-4\,x^2}\;.$$

(4) - Risolvere le seguenti disequazioni con i valori assoluti, ricordando che:

(a) la diseq. $|P(x)| \underset{(<)}{\leq} Q(x)$ si risolve con il sistema $\begin{cases} P(x) \underset{(<)}{\leq} Q(x) \\ \\ P(x) \underset{(>)}{\geq} -Q(x) \end{cases}$

(b) la diseq. $|P(x)| \underset{(>)}{\geq} Q(x)$ si risolve con l'unione $\{P(x) \underset{(>)}{\geq} Q(x)\} \cup \{P(x) \underset{(<)}{\leq} -Q(x)\}$

$$|2x-5|<7\,; \qquad \left|\frac{2x-1}{5}\right| \geq 3\,; \qquad \left|\frac{2x+3}{2}\right| \leq 3\,; \qquad \left|\frac{2x+1}{x-3}\right| < 2\,; \qquad \left|\frac{x}{4}-\frac{2x-1}{3}\right| > 1\,;$$

$$|x^2-3x-8| \leq 2\,; \qquad \left|\frac{x-1}{2}-\frac{3x-6}{3}\right| < 1\,; \qquad x-2 \leq |x|\,; \qquad |x| \geq \frac{1}{x}\,;$$

$$|3x-1|<x\,; \qquad |x^2-4| \geq x\,; \qquad |x^2+4| \leq x\,; \qquad \left|\frac{3x-2}{x-3}\right| \leq 0\,; \qquad |x+2|>|x-1|\,;$$

$$\left|\frac{3x}{x+3}\right| < 2x\,; \qquad \left|\frac{x}{x-1}\right| > 2+x\,; \qquad |1-|x|| \geq 1\,; \qquad |1-|x|| < |x^2|\,.$$

(5) - Per ciascuna delle coppie di funzioni trovare $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ e $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ precisando il dominio di entrambe le composte:

$f(x) = x^2-5x+6$	$g(x) = \sqrt{x}\,;$	$f(x) = \sin(2x+1)$	$g(x) = 1-\sqrt{x}\,;$
$f(x) = 1+\frac{1}{x}$	$g(x) = x+1\,;$	$f(x) = \cos x$	$g(x) = 1-x^2\,;$
$f(x) = \lvert x\rvert$	$g(x) = \ln x\,;$	$f(x) = \lvert x\rvert$	$g(x) = e^{x-1}\,;$
$f(x) = \ln x$	$g(x) = \frac{x+1}{x-1}\,;$	$f(x) = \cos x$	$g(x) = \sqrt{x^2-\frac{1}{2}}\,.$

(6) - Determinare $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$, precisandone il dominio, nei casi seguenti:

$i)$ $f(x) = \sqrt{x-1}\,, \qquad g(x) = x^2+2\,, \qquad h(x) = x+3$

$ii)$ $f(x) = \dfrac{2}{x+1}\,, \qquad g(x) = \cos x\,, \qquad h(x) = \sqrt{x+3}$

(7) - Esprimere le funzioni seguenti come composte di funzioni elementari:

$$f(x) = (x^2+1)^{10}\,; \qquad f(x) = \sin(\sqrt{x})\,; \qquad f(x) = \sqrt{\cos x}\,; \qquad f(x) = (x^2+1)^{10}\,; \qquad f(x) = 1-3^{x^2}\,;$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}\,; \qquad f(x) = \frac{1}{\sin^4(\sqrt{x})}\,; \qquad f(x) = \ln(\arctan(x^2))\,; \qquad f(x) = \frac{\tan x}{1+\tan x}\,.$$