ESERCIZI CDI - Foglio 4

(1) - Calcolare il limite, se esiste, delle seguenti successioni:

$$\frac{n+1}{2n^2-\sqrt{n}}\,; \qquad \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}\,; \qquad n-\sqrt{2n-1}\,; \qquad \sqrt{n^3}-10n-1\,; \qquad n^3\,(1-e^{-\frac{1}{n^2}})\,; \qquad \frac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n}-2n}\,;$$

$$(-1)^n\,\frac{n+\sqrt{n}}{\sqrt{n}-2n}\,; \qquad \frac{n\,\sin\frac{1}{n}}{n+1}\,; \qquad (-1)^n\,\frac{n^2\,\sin\frac{1}{n}}{n+1}\,; \qquad n\,(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\,; \qquad \frac{e^{-\frac{1}{n^2}}-1}{\sin^2\frac{1}{n}}\,; \qquad n\,\ln(1-\frac{1}{n^2})\,;$$

$$(-1)^n\,n\,\ln(\frac{n^2+1}{n^2-n})\,; \qquad \sin n - n^2\,; \qquad e^n\,\sin\frac{1}{n}\,; \qquad \frac{e^{-n}}{1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})}\,; \qquad \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n-3}}\,; \qquad n^2-\ln\,n\,; \qquad e^n-n^2+n\,;$$

$$n^2-n\,\ln\,n\,; \qquad \frac{\sin n}{n}\,; \qquad (-1)^n\,n\,\sin(\frac{2}{n})\,; \qquad \frac{1-e^{\frac{1}{n^2}}}{1-\cos(\frac{1}{n})}\,; \qquad \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\,; \qquad \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{n}{2}}\,.$$

(2) - Dopo aver determinato se le successioni seguenti sono monotone o definitivamente monotone calcolare: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $\inf\{a_n\}$, $\sup\{a_n\}$, $\min\{a_n\}$, $\max\{a_n\}$ se esistono

$$a_n=\frac{2n-1}{3n+1}\,; \qquad a_n=\frac{n^2-1}{n^2}\,; \qquad a_n=\frac{2^n}{n}\,; \qquad a_n=\frac{-n-1}{n^2+n}\,;$$

$$a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2}\,; \qquad a_n=\frac{n+3}{\sqrt{n}}\,; \qquad a_n=n!\,; \qquad a_n=(-1)^n\,; \qquad a_n=(-1)^n\,\frac{1}{n}\,;$$

(3) - Dopo aver determinato il dominio delle funzioni seguenti, dire se sono continue. Per gli eventuali punti in cui le funzioni non sono continue, discutere il tipo di discontinuità.

$$f(x)=\frac{e^x-1}{\sqrt{|x|}}\,; \qquad f(x)=\arctan\frac{1}{x}\,; \qquad f(x)=\arctan\frac{x+1}{x-1}\,; \qquad f(x)=\frac{\arcsin(\ln(x+1))}{\sin(\pi\,x)}\,;$$

$$f(x)=\begin{cases} 2\,\sin x & \text{se } x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x>0\end{cases}\,; \qquad f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+3x-10}{2-x} & \text{se } x\ne 2\\ 4 & \text{se } x=2\end{cases}\,;$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin(3\,x)}{2x} & \text{se } x\ne 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}\,; \qquad f(x)=\begin{cases} \frac{1+x}{|x^2-1|} & \text{se } x\ne \pm1\\ 1 & \text{se } x=\pm1\end{cases}\,.$$

(4) - Prolungare per continuità a tutto $\mathbf{R}$, se possibile, le funzioni seguenti:

$$f(x)=\frac{x^2+3x-10}{2-x}\,; \qquad f(x)=\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}\,; \qquad f(x)=\frac{x^2}{\ln(1+x)}\,; \qquad f(x)=\frac{x}{\ln(1+|x|)}\,;$$

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{(x+2)^2}\,; \qquad f(x)=\arctan\frac{2\,x}{\sqrt{1-x}}\,; \qquad f(x)=\frac{e^x-1}{x^2-x}\,; \qquad f(x)=\frac{e^x-1}{\sqrt{|x|}}\,.$$

(5) - Dire per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbf{R}$ le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 1 \\ 3 + a\,x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ b\,\cos(x+\pi) & \text{se } x \ge 0 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} 5x & \text{se } x > 3 \\ a & \text{se } x = 3 \\ x - b & \text{se } x < 3 \end{cases};$$

$$f(x) = \begin{cases} -2\,\sin x & \text{se } x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\,\sin x + b & \text{se } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \cos x & \text{se } x > \pi \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{se } x < 0 \\ \sin(b\,x) & \text{se } x \in [0,\pi] \\ c + \cos x & \text{se } x > \pi \end{cases};$$

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^{x^3+x^2} & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x = 0 \\ a\,x^3 + bx + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} & \text{se } x \in (0,1) \\ a + \log_2 x & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}.$$

(6) Utilizzare la <u>definizione</u> di **derivata di una funzione in un punto** per calcolare se esiste e, in caso affermativo, quanto vale $f'(x_0)$ nei casi seguenti:

$$f(x) = 2x^2 - x \quad x_0 = 1; \qquad f(x) = x^3 - x^2 + 1 \quad x_0 = 2; \qquad f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad x_0 = 0;$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \quad x_0 = 1; \qquad f(x) = |x^2 - 1| \quad x_0 = -1; \qquad f(x) = |2x^2 - x| \quad x_0 = 1.$$

(7) - Calcolare con le regole di derivazione, dopo aver detto dove è possibile, la derivata delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 3x^4+9x^2-x-4; \quad f(x) = x^3\cos x; \quad f(x) = x^3(3x^2+1)^2; \quad f(x) = (\sin x)^2; \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}};$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}; \quad f(x) = (\sin x - \frac{1}{x})^2; \quad f(x) = \cos(e^x); \quad f(x) = \ln(\cos x); \quad f(x) = \ln\sqrt{1-x^2};$$

$$f(x) = |x^3|; \quad f(x) = x\,\arcsin x; \quad f(x) = \arctan\frac{x+1}{x-1}; \quad f(x) = x\arctan\frac{1}{x}; \quad f(x) = x\,\sin(x^2)+\cos^3(x^2);$$

$$f(x) = \frac{x^3-1}{1+x^2+x^3}; \quad f(x) = x\,\ln|x-1|; \quad f(x) = \ln(|\ln x|); \quad f(x) = \tan^2(x)-x^2; \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}(1+x^2);$$

$$f(x)=\sqrt{x}\ln|x|; \quad f(x)=e^{-\frac{1}{(x-5)}}; \quad f(x)=\ln|\cos x|+x\tan x; \quad f(x)=\frac{2^x\sin x}{\cos x-\sin x}; \quad f(x)=e^{-\frac{1}{x}}(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x});$$

(8) - Scrivere, nei casi seguenti, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (x_0, f(x_0))$:

$$f(x) = 3x^2 - x + 2 \quad x_0 = 2; \qquad f(x) = x + \sin x \quad x_0 = \tfrac{\pi}{3}; \qquad f(x) = x^7 + 1 \quad x_0 = 5;$$

$$f(x) = x\,e^x \quad x_0 = 1; \qquad f(x) = |x+1| - x^2 \quad x_0 = 0; \qquad f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x-1} \quad x_0 = 0.$$

(9) - Determinare, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, dove sono continue e dove sono derivabili le seguenti funzioni e calcolarne la derivata dove esiste:

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & x \ne 0 \\ b & x = 0 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} b - \sin(2\sqrt{x}) & x \ge 0 \\ 1 - a\,e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} a + \sqrt[3]{x^2+1} & x \le 0 \\ -b\,\cos^2 x - 1 + x & x > 0 \end{cases};$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} + b & x < 1 \\ a & x = 1 \\ 3\,x + 1 & x > 1 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} 1 + b\arctan x^3 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ a + \tan x & x > 0 \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-ax^2}{x^4+1} & x < -1 \cup x > 1 \\ b + \ln(2-x^2) & -1 \le x \le 1 \end{cases}.$$