ESERCIZI CDI - Foglio 5

(1) - Calcolare, se esistono, i seguenti limiti usando eventualmente i teoremi de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}\,; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x^6-1}\,; \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}\,; \qquad \lim_{x\to \pi} \frac{\cos x+1}{\sin(x+\frac{x^2}{\pi})}\,;$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-\sqrt{x}}\,; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1-\sin x}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{\sin(x-\pi)}\,; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}\,;$$

(2) - Disegnare il grafico delle seguenti funzioni dopo aver determinato: *dom f, limiti agli estremi del dominio, intervalli di monotonia, eventuali min e max relativi e/o assoluti*, se esistono. Dal grafico determinare Imf ed indicare se f è limitata inf.te e/o sup.te.

$$f(x)=x^2e^x\,; \qquad f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}\,; \qquad f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}\,; \qquad f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}\,; \qquad f(x)=x\sqrt{\ln x}\,;$$

$$f(x)=x^2\ln|x|\,; \quad f(x)=x+\ln(1-x^2)\,; \quad f(x)=(x^2-x)\sqrt[3]{x}\,; \quad f(x)=x+\sqrt{2x^2-x}\,; \quad f(x)=\frac{x^2}{e^x+x^2}\,;$$

$$f(x)=x^2-\ln|x|\,; \quad f(x)=2-\frac{1}{x}-\ln x\,; \quad f(x)=\frac{\ln x}{x}\,; \quad f(x)=-\frac{x^2}{5}+\arctan\left(\frac{-1}{x^2+1}\right);$$

$$f(x)=\frac{x}{\ln|x|}\,; \quad f(x)=\frac{\sqrt{x}-x}{x-1}\,; \quad f(x)=\frac{|x|}{1+x^2}\,; \quad f(x)=\left|\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right|\,; \quad f(x)=\sqrt[3]{x}\,e^{-x^2}\,; \quad f(x)=\frac{\log(|x|)}{\sqrt[3]{x}}\,.$$

(3) - Sia $f(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{3-x}}$.

(a) Tracciare il grafico di f;

(b) dire se $f_{/[0,3)}$ è invertibile; in caso affermativo, detta g la funzione inversa, tracciarne il grafico dopo averne determinato il dominio e calcolare, se esiste, $g'(\frac{\ln 3}{\sqrt{3}})$ (non è necessaria l'espressione della g).

(4) -

(a) Dire per quali valori di a e $b \in \mathbf{R}$ la funzione $f(x)=\begin{cases} a\,\arctan(e^x-x) & x\geq 0 \\ \ln(1-x)+bx+1 & x<0 \end{cases}$ è derivabile e per tali valori disegnare il grafico.

(b) Dire se f è invertibile ed in caso affermativo detta g la funzione inversa disegnarne il grafico dopo averne determinato il dominio e calcolare, se esiste, $g'(\ln 2)$ (non è necessaria l'espressione della g).

(5) Sia $\quad f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$;

(a) determinare $dom\, f$ e dire dove f è continua;

(b) determinare dove f è derivabile e calcolarne la derivata: in particolare dire se esiste $f'(1)$;

(c) dopo aver tracciato il grafico di f (non è richiesta la f''): dterminare $Im\, f$, dire se f è monotona, dire se f è limitata indicando, se esistono, *max* e/o *min* assoluti.

(d) Tracciare il grafico di $|f(x+2)|$.

(6) - Sia $f(x) = (2 - \frac{1}{x^2})\, e^{\frac{2}{x}}$;

(a) determinare $dom\, f$ e limiti agli estremi del $dom\, f$;

(b) dire dove f è continua, dove è derivabile e calcorarne la derivata;

(c) indicare: dove f è crescente, dove è decrescente, eventuali estremi relativi e poi disegnarne il grafico (non è richiesto lo studio della f'');

(d) dire se $f_{/(0,1]}$ è invertibile ed in caso affermativo determinare il grafico dell'inversa dopo averne dato il dominio.

(7) Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x}$.

a) determinare limiti agli estremi del $dom\, f$ dire dove f è continua e dove è derivabile;

b) indicare: dove f è crescente, dove è decrescente, eventuali estremi relativi; disegnarne il grafico (non è richiesto lo studio della f'');

c) data

$$h(x) = \begin{cases} a + \arctan(x) + \sqrt[3]{x+1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 2x} & \text{se } x \in dom\, f \cap [-1, +\infty) \end{cases}$$

dire se esistono valori di $a \in \mathbf{R}$ per i quali h risulti derivabile in $x = -1$.

(8) Sia $f(x) = x^2\, \ln(3\,x)$.

a) determinare $dom\, f$, limiti agli estremi del $dom\, f$, dire dove f è continua e dove è derivabile;

b) indicare: dove f è crescente, dove è decrescente, eventuali estremi relativi; disegnarne il grafico (non è richiesto lo studio della f'');

c) data $g(x) = x^2\, \ln(3\,|x|)$ verificare se la funzione g è pari, o dispari, o ne' pari ne' dispari e poi disegnarne il grafico.