CORSO DI STUDI IN INFORMATICA 14 Giugno 2013

1. Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\sin(2x)} - x\ \left(e^{3x}-1\right)}{\ln^2(1+\sqrt[3]{x}) - \sqrt{1-\cos(\sqrt{x})}}.$
   - determinando, di ogni termine a numeratore e a denominatore, se si tratta di un infinito o di un infinitesimo e, quando è possibile, quale è l' ordine di infinitesimo o di infinito e la relativa parte principale;
   - specificando quali termini - tra quelli a numeratore e tra quelli a denominatore rispettivamente - sono trascurabili.

2. Sia $f(x)$ una funzione definita sull' asse reale. Se $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$, è vero che esiste un intervallo $I = (3-\delta, 3+\delta)$ tale che
$$f(x) < 10^{-5}, \quad \forall x \in I?$$

3. Si consideri la funzione $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^2}{x+2}\right)$.
   (a) Determinare dominio e limiti agli estremi;
   (b) discutere la crescenza e la decrescenza e la presenza di eventuali punti di massimo e di minimo locale;
   (c) tracciare un grafico qualitativo.
   (d) È vero che per ogni $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ esiste un punto x_0 tale che $f(x_0) = a$?

4. Se $f(x)$ è la funzione dell' esercizio precedente, disegnare il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$, discutendone continuitá e derivabilitá.

5. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin(2x)}{\cos^2 x + 3\cos x + 2}$.
   - Calcolare $\int f(x)\ dx$.
   - Calcolare l' integrale definito $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)\ dx$.
   - Calcolare l' area della regione compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ e l' asse delle ascisse per $x \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Esame di CDI del 10 luglio 2013

1. Calcolare il seguente limite, specificando di ogni termine a numeratore e a denominatore l'ordine di infinito o infinitesimo, se possibile, e dicendo quali termini sono trascurabili:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1} - (x^4-3x)^3}{ln(x^3+1) - \sqrt{2x+1}}$$

2. Sia $f(x)$ una funzione definita sull'asse reale tale che $f'(x) < 0 \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
   i) E' vero che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$?
   ii) E' vero che esiste un intervallo $I = (a, +\infty)$ tale che $f(x) < 0 \ \ \forall\ x \in I$?

3. i) Calcolare il seguente integrale: $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x(1+ln^2 x)}dx.$
   ii) Determinare un valore $a \in \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{x(1+ln^2 x)}dx = \frac{\pi}{6}.$

4. Si consideri la funzione: $\quad f(x) = e^{\frac{2|x|}{1+x}}$.

i) Determinare dominio e limiti agli estremi.

ii) Discutere la crescenza e eventuali punti di massimo e minimo relativi.

iii) Tracciare un grafico qualitativo.

iv) E' vero che esiste $a \in (-1, 0)$ tale che tale che $f(a) = 5$?

5. Data la funzione $f(x)$ dell'esercizio precedente,

i) discutere la continuità in ogni punto del dominio;

ii) discutere la derivabilità in ogni punto del dominio;

iii) calcolare il valore della derivata per $x = -3$.

CORSO DI STUDI IN INFORMATICA 26 Luglio 2013

1. Calcolare il seguente limite: $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + 2x^3) - (x^3 - x)^2}{\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right)^3 - \sqrt{4x + x^5}}$.

   - determinando, di ogni termine a numeratore e a denominatore, se si tratta di un infinito o di un infinitesimo e, quando è possibile, quale è l' ordine di infinitesimo o di infinito e la relativa parte principale;
   - specificando quali termini - tra quelli a numeratore e tra quelli a denominatore rispettivamente - sono trascurabili.

2. Sia $f(x)$ una funzione continua e derivabile nell' intervallo $(-1, 1)$.
Se $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

   (a) è vero o falso che $f'(x) > 0$ in $(-1, 1)$?

   (b) è vero o falso che esiste $c \in (-1, 1)$ tale che $f'(c) > 0$?

3. Si consideri la funzione: $\quad f(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$.

   (a) Determinare dominio e limiti agli estremi;

   (b) discutere la crescenza e la decrescenza e la presenza di eventuali punti di massimo e di minimo locale;

   (c) tracciare un grafico qualitativo.

   (d) È vero o falso che la funzione è invertibile nell' intervallo $(1, +\infty)$?

4. Si consideri la funzione: $\quad g(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln\left(\frac{|x|}{x^2+1}\right)}$ se $x \neq 0$, $\quad k$ se $x = 0$.

   (a) Determinare per quale valore di k la funzione g è continua nel suo dominio.

   (b) Per tale valore, discutere la derivabilitá della funzione g.

   (c) Per tale valore, tracciare un grafico qualitativo della funzione.

   (d) Stabilire se è vero o falso che $\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0$.

5. Si consideri la funzione: $\quad f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x - e^{-x}}$.

   - Calcolare $\int f(x)\, dx$.
   - Calcolare l' integrale definito $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

- Stabilire se esiste $a > 0$ tale che $\int_0^a f(x)\ dx < 0$.

PROVA SCRITTA del 13 Settembre 2013

1. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\ e^{-\sqrt{x}} - (x^2 - 2x^3)^3}{x\ \ln(x^2+1) - \sqrt{x+3x^3}}.$$
   - determinando, di ogni termine a numeratore e a denominatore, se si tratta di un infinito o di un infinitesimo e, quando è possibile, quale è l' ordine di infinitesimo o di infinito e la relativa parte principale;
   - specificando quali termini - tra quelli a numeratore e tra quelli a denominatore rispettivamente - sono trascurabili.

2. Data la funzione
$$g(x) = \ln x \text{ per x} \geq \text{e}, \quad \frac{2}{\text{e}}\text{x} - 1 \text{ per x} < \text{e}$$
   i) provare che $g(x)$ è bigettiva su $\mathbb{R}$;
   ii) determinare l'inversa $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
   iii) discutere la continuità e la derivabilità di $g(x)$ nel punto $x = e$.

3. i) Determinare tutti i valori $b \in \mathbb{R}$ tali che $\displaystyle\int_0^b \sin(3x)dx = 0$.

   ii) Determinare, se esiste, un valore $b \in \mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\int_0^b \sin(\lambda x)dx = 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{Z}$.

4. Si consideri la funzione $f(x) = x^2 e^{-|x|}$.
   i) Dire se nel punto $x = 0$ esiste la retta tangente al grafico.
   ii) E' vero o falso che per $x > 10^9$ si ha che $f(x) < \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$?
   iii) Calcolare l'area compresa tra il grafico $y = f(x)$ e l'asse x nell'intervallo $[-1, 1]$.

5. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1-x}{x} + \ln|x|$$
   i) determinare dominio e limiti agli estremi del dominio;
   ii) discutere la crescenza e determinare gli eventuali punti di massimo/ minimo relativi;
   iii) tracciare un grafico qualitativo;
   iv) provare che esiste un punto $a \in (-4, -3)$ tale che $f(a) = 0$ e trovare tutti i punti in cui la funzione si annulla.

Esame di CDI del 14 gennaio 2014

1. Dire se le seguenti funzioni sono invertibili nel loro dominio e, in caso affermativo, trovare la funzione inversa specificandone il dominio.
   i) $f(x) = \sqrt{11 - 2x}$.
   ii) $g(x) = x^3 - x^2$.

2. E' data la funzione $f(x) = x^2 \left[1 + sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ se $x \neq 0$, $\quad f(0) = 0$.
   i) Studiare continuità e derivabilità di f nel suo dominio.
   ii) Esiste un valore massimo assunto da f? Esiste un valore minimo assunto da f?
   iii) E' vero che $f(x) > 0$ in un opportuno intorno dell'origine delle coordinate?

3. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1+|lnx|}{1+lnx}$.

   i) Dire qual è il dominio di f.

   ii) Dopo aver studiato la positività, calcolare i limiti agli estremi.

   iii) Calcolare, se esistono, $f'(1), f'(4)$ (f' denota la derivata di f).

   iv) Dire se esiste $a > 1$ tale che $\displaystyle\int_1^a f(x)dx = 0$.

4. Sia $f(x)$ una funzione tale che $f(x) \geq 0 \ \ \forall\, x \in [a,b]$.

   i) Nel caso f continua, è vero che se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ allora $f(x) = 0 \ \ \forall\, x \in [a,b]$?

   ii) E se la funzione non è continua?

5. i) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 1}\; dx$.

   ii) Trovare una primitiva di $\sqrt{e^x - 1}$ che nel punto $x = 0$ valga $\sqrt{2}$.

Esame di CDI del 10 febbraio 2014

1. Date le due funzioni $f(x) = 0$ per $x \geq 0$, $f(x) = \pi$ per $x < 0$ e $g(x) = cosx$,

   i) fare il grafico della funzione composta $f \circ g$ e determinarne il dominio, l'eventuale periodo e i punti di discontinuità;

   ii) fare il grafico della funzione composta $g \circ f$ e determinarne il dominio, l'eventuale periodo e i punti di discontinuità.

2. i) Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 1^+} (x^2 + x - 2)^{1/(x-1)}$.

   ii) Determinare, se esiste, $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to a} (x^2 + x - 2)^{1/(x-1)} = 4$.

3. i) Stabilire in quali punti del dominio la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ per $-2 < x < 0$, $f(x) = \sqrt{x^5}$ per $0 \leq x < 2$ è derivabile.

   ii) E' vero o falso che esiste un punto $c \in (0,2)$ tale che $f(c) = 10^{-2}$?

4. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x(x^2 - 1)}$.

   i) Dire qual è il dominio di f.

   ii) Dopo aver studiato la parità, calcolare i limiti agli estremi.

   iii) Calcolare, se esistono, $f'(0), f'(1), f'(2)$ (f' denota la derivata di f).

   iv) Determinare $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ tali che $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$.

5. i) Calcolare l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-4}\; dx$.

   ii) Dire se esiste una primitiva $F(x)$ di $\dfrac{x^3+1}{x^2-4}$ tale che $\lim_{x \to \infty} F(x) = -\infty$.