RIDUZIONE SIMPLETTICA DEL SISTEMA DI CALOGERO

C. BARTOCCI

I. Il sistema di Calogero è costituito da n punti distinti e collineari di coordinate $x_1 < \cdots < x_n$ la cui interazione è governata dalla hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\sum y_k^2 + \sum_{k<j}(x_k - x_j)^{-2}\,.$$

Dimostreremo il seguente risultato, attenendoci pedissequamente all'esposizione di J. Moser [Mo] (vedi anche [KKS]).

Teorema 1.1. *Il sistema di Calogero è completamente integrabile; si possono inoltre esplicitamente determinare n integrali primi del moto in involuzione fra loro che siano funzioni algebriche.*

La dimostrazione si riconduce alla costruzione di un'opportuna riduzione simplettica *à la* Marsden-Weinstein relativa all'azione di $U(n)$ sul suo fibrato cotangente.

II. Identifichiamo l'algebra $\mathfrak{u}(n)$ e il suo duale $\mathfrak{u}^*(n)$ tramite la forma di Killing:

$$A, B \in \mathfrak{u}(n) \qquad\qquad \langle A, B\rangle = -\operatorname{tr}(AB)\,.$$

Usando l'applicazione esponenziale possiamo indurre sul fibrato cotangente $T^*U(n)$ coordinate (X, Y), essendo X e Y matrici in $\mathfrak{u}(n)$. La forma di Liouville si scrive allora nella forma:

$$\theta = \operatorname{tr}(Y\mathrm{d}X)$$

e la risultante forma simplettica canonica è

$$\omega = \mathrm{d}\theta = \operatorname{tr}(\mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}X)\,.$$

Data una funzione $F : T^*U(n) \to \mathbb{R}$ indichiamo con F_X la matrice il cui elemento (i, j) è $\frac{\partial F}{\partial X_{ij}}$. La parentesi di Poisson di due funzioni F e G si esprime nella forma:

$$\{F, G\} = \operatorname{tr}(F_X G_Y - F_Y G_X)\,.$$

Di conseguenza, le equazioni di Hamilton associate alla funzione $H(X, Y)$ sono:

$$\begin{cases} \dot{X} = H_Y \\ \dot{Y} = -H_X \end{cases}$$

Seminario tenuto presso il Dipartimento di Matematica di Genova, 3 novembre 2000.

Consideriamo la famiglia di hamiltoniane

$$G_p(Y) = \frac{1}{p}\,\mathrm{tr}(Y^p) \qquad\qquad p \in \mathbb{N}\,.$$

Poiché non dipendono da X, queste funzioni danno tutte luogo a sistemi hamiltoniani completamente integrabili. In particolare, la soluzione delle equazioni del moto associate a G_2 è lineare:

$$\begin{cases} X(t) = X(0) + Y(0)t \\ Y(t) = Y(0) \end{cases}$$

III. I sistemi hamiltoniani associati alle funzioni G_p sono invarianti per l'azione "aggiunta" di $U(n)$ su $T^*U(n)$:

$$\text{data } U \in U(n)\,, \qquad (X,Y) \mapsto (U^{-1}XU, U^{-1}YU)\,.$$

L'azione infinitesima indotta è dunque, per ogni $A \in \mathfrak{u}(n)$:

$$\phi_A : (X,Y) \mapsto ([X,A],[Y,A])\,.$$

Si verifica facilmente che il campo vettoriale generato da A è il campo hamiltoniano associato alla funzione $h_A(X,Y) = \mathrm{tr}(A[X,Y])$. L'applicazione momento dell'azione di $U(n)$

$$\Psi : T^*U(n) \to \mathfrak{u}^*(n)$$

si calcola allora direttamente:

$$\langle \Psi(X,Y), A\rangle = h_A(X,Y) = \mathrm{tr}(A[X,Y]) \qquad \text{per ogni } A \in \mathfrak{u}(n)\,,$$

sicché $\Psi(X,Y) = -[X,Y]$. Le componenti del commutatore $[Y,X]$ sono dunque integrali primi del moto.
Ci proponiamo ora di costruire il quoziente simplettico $\Psi^{-1}(\nu)/G_\nu$, essendo

$$\nu = -\begin{bmatrix} 0 & i & \cdots & i \\ i & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & i \\ i & \cdots & i & 0 \end{bmatrix}$$

e G_ν il sottogruppo di isotropia di ν.

Teorema 1.2. *Il sottogruppo di isotropia dell'elemento ν è costituito dalle matrici $V \in U(n)$ tali che $V\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$, per qualche $\lambda \in U(1)$, essendo*

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione generale dell'equazione

$$[X,Y] = -\nu \tag{$*$}$$

è della forma:

$$\begin{cases} X = V^{-1}\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)V \\ Y = V^{-1}L(\mathbf{x}, \mathbf{y})V \end{cases}$$

essendo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *con* $x_1, \dots, x_n$ *distinti,* $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ *ed* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_n) + iZ(\mathbf{y})$*, con*

$$Z_{kl} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_k - x_l} & \textit{se } k \neq l \\ 0 & \textit{se } k = l \end{cases}$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione consiste nello studiare le soluzioni dell'equazione:

$$[X, Y] = i(v_k \bar{v}_l) - \frac{i}{n}|\mathbf{v}|^2 \delta_{kl} \tag{$**$}$$

con $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$. Tale equazione si riduce all'equazione $(*)$ per $\mathbf{v} = (1, \dots, 1)$. Questa semplice osservazione ci permette di dedurre la prima asserzione del teorema. Infatti, tutti e soli gli elementi $V \in U(n)$ che lasciano invariata l'equazione $(**)$ — avendo fissato il vettore $\mathbf{v}$ — sono quelli che soddisfano l'uguaglianza:

$$v_k \bar{v}_l = V^{-1}(v_k \bar{v}_l)V = w_k \bar{w}_l\,,$$

essendo $\mathbf{w} = V^{-1}\mathbf{v}$. Ma si deve allora avere $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$, con $|\lambda| = 1$.
Per analizzare l'equazione $(**)$ possiamo supporre che X sia in forma diagonale: $X = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$ (infatti diagonalizzando X l'equazione $(**)$ si trasforma in una della stessa forma). Abbiamo dunque:

$$[X, Y]_{kk} = 0 = i(|v_k|^2 - \frac{1}{n}|\mathbf{v}|^2)\,.$$

Se imponiamo che $|\mathbf{v}|^2 = n$, ricaviamo che $|v_k| = 1$, vale a dire $v_k = \exp(i\theta_k)$. Applicando la trasformazione unitaria

$$U = \operatorname{diag}(\exp(i\theta_1), \dots, \exp(i\theta_n))\,,$$

otteniamo dunque $\mathbf{v} = \mathbf{e}$, preservando al contempo la forma diagonale di X. Se $k \neq l$, abbiamo:

$$[X, Y]_{kl} = (x_k - x_l)Y_{kl} = i$$

(in particolare gli x_i sono distinti tra loro). In conclusione $Y = \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_n) + iZ(\mathbf{y})$. Da questa soluzione particolare si ottengono tutte le altre operando trasformazioni $X \mapsto V^{-1}XV$, $Y \mapsto V^{-1}YV$, essendo V un elemento del gruppo di isotropia. $\square$

Dal teorema precedente si deduce che ogni punto dello spazio delle fasi ridotto $\Psi^{-1}(\nu)/G_\nu$ si può identificare con una coppia di matrici $(\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n), L(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, essendo gli $y_1, \dots, y_n$ immaginari puri. Nelle coordinate $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ è immediato scrivere sia la proiezione $\tilde{\omega}$ della forma simplettica $\omega = \operatorname{tr}(\mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}X)$:

$$\tilde{\omega} = \sum_k \mathrm{d}y_k \wedge \mathrm{d}x_k\,,$$

sia le hamiltoniane $G_p(Y) = \frac{1}{p}\,\mathrm{tr}(Y^p)$, che sono invarianti rispetto all'azione del gruppo di isotropia G_ν:

$$\tilde{G}_p(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{p}\,\mathrm{tr}\left(L^p(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) .$$

Dato che $\{G_p, G_q\} = 0$, abbiamo anche $\{\tilde{G}_p, \tilde{G}_q\} = 0$. Con calcoli elementari si ottiene che:

$$\tilde{G}_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(L^2(\mathbf{x},\mathbf{y})\right) = \frac{1}{2}|\mathbf{y}|^2 + \sum_{k<j}(x_k - x_j)^{-2} ,$$

un'espressione identica alla hamiltoniana del sistema di Calogero.
Poiché le soluzioni del sistema associato a G_2 sono $X(t) = X(0) + Y(0)t$, $Y(t) = Y(0)$, restringendosi a $\Psi^{-1}(\nu)$ è possibile trovare matrici unitarie V_t tali che:

$$\begin{aligned}&\Big(V_t\,\mathrm{diag}(x_1(t),\dots,x_n(t))V_t^{-1}, V_t L^p(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))V_t^{-1}\Big) = \\ &\Big(V_0\Big(\mathrm{diag}(x_1(0),\dots,x_n(0)) + tL^p(\mathbf{x}(0),\mathbf{y}(0))\Big)V_0^{-1}, V_0 L^p(\mathbf{x}(0),\mathbf{y}(0))V_0^{-1}\Big) .\end{aligned}$$

Da ciò si deduce che, per ogni t:

$$\mathrm{tr}\left(L^p(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t))\right) = \mathrm{tr}\left(L^p(\mathbf{x}(0),\mathbf{y}(0))\right)$$

e che gli $x_1(t),\dots,x_n(t)$ sono gli autovalori della matrice

$$\mathrm{diag}(x_1(0),\dots,x_n(0)) + tL^p(\mathbf{x}(0),\mathbf{y}(0)) .$$

Possiamo così concludere che le funzioni $\mathrm{tr}\left(L^p(\mathbf{x},\mathbf{y})\right)$ sono integrali primi (in involuzione tra loro) e che le soluzioni del sistema di Calogero sono funzioni algebriche dei dati iniziali. Ciò conclude la dimostrazione del teorema 1.1.

Bibliografia

[GS] V. Guillemin, S. Sternberg, *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1990^2.

[KKS] D. Kazhdan, B. Kostant, S. Sternberg, *Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 481–507.

[Mo] J. Moser, *Various aspects of integrable systems*, in: "Dynamical systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978)", Progr. Math., 8, Birkhäuser, Boston (Mass.) 1980, pp. 233–289.